ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 8 (435)

УДК 517.546

В.Г. ГОРДИЕНКО

МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ НАЧАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

Пусть S — класс регулярных однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots$; S^M — класс функций $f \in S$, удовлетворяющих в E условию $|f(z)| < M$, $M > 1$.

В теории однолистных функций одно из центральных мест занимает проблема коэффициентов, заключающаяся в описании множества значений системы $V_n = \{a_2, \dots, a_n\}$. В частности, исследованию множеств V_n посвящены монографии [1] и [2]. В них исследуются аналитические и топологические свойства границы ∂V_n множества V_n. В [1] показано, что если A_1 — множество особенностей ∂V_n и $x \in A_1$, то функция $f(z)$, доставляющая точку x, является алгебраической функцией. В [2] получено полное описание множества V_3 в классе S.

В последнее время исследованием множеств V_n активно занимались О. Тамми, Д.В. Прохоров (см. [3]). Д.В. Прохоров получил полное описание границы $\partial V_4(M)$ в классе S_R^M типично вещественных функций $f \in S$, удовлетворяющих в круге E неравенству $|f(z)| < M$.

В данной работе применением методов оптимизации для управляемых систем, порожденных уравнением Левнера, получено полное описание границы $\partial U_4(M)$ множества $U_4(M)$, являющегося проекцией множества $V_4(M)$ в пространство $(a_2, a_3, \operatorname{Re} a_4)$ в классе S^M. Нашла подтверждение гипотеза Д.В. Прохорова о характере угловых точек и соединяющей их кривой, являющейся ребром граничной гиперповерхности. Результаты работы позволили получить усиление гипотезы о двух функционалах в классе S. В частности, локальный экстремум двух функционалов может доставляться функциями, отображающими единичный круг на плоскость с двумя разрезами вдоль вещественной оси.

1. Параметрическое представление граничной гиперповерхности

Производящим для класса S^M является дифференциальное уравнение Левнера

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{e^{iu} + w}{e^{iu} - w}, \quad w\big|_{t=0} = z, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $u = u(t)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция. Интегралы $w(z,t)$ дифференциального уравнения (1) представляют всюду плотное в S^M семейство функций f, определяемых равенством $f(z) = Mw(z, \log M)$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в разложении обеих частей уравнения (1), получим для $x_k(t) = a_{k+1}(t)$, $k = 1, 2, 3$, управляемую систему

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = -2e^{-(t+iu)}, \\
&\frac{dx_2}{dt} = -2e^{-(t+iu)}(2x_1 + e^{-(t+iu)}), \\
&\frac{dx_3}{dt} = -2e^{-(t+iu)}(x_1^2 + 2x_2 + 3x_1e^{-(t+iu)} + e^{-2(t+iu)}), \\
&x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Множество значений системы $\{a_2, a_3, a_4\}$ в классе S^M есть множество достижимости уровня $t = \log M$ фазового вектора $x = (x_1, x_2, x_3)$ управляемой системы (2). Обозначим через $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ вектор множителей Лагранжа и составим функцию Гамильтона $H(t, x, \overline{\Psi}, u) = \operatorname{Re} \sum\limits_{k=1}^{3} \frac{dx_k}{dt} \overline{\Psi}_k$. Вектор $\Psi = \Psi(t)$ локально является опорным к границе множества достижимости уровня t системы (2) и удовлетворяет сопряженной гамильтоновой системе

$$\begin{aligned}
&\frac{d\overline{\Psi}_1}{dt} = 2e^{-(t+iu)}(2\overline{\Psi}_2 + (2x_1 + 3e^{-(t+iu)})\overline{\Psi}_3), \quad \overline{\Psi}_1(0) = c_1, \\
&\frac{d\overline{\Psi}_2}{dt} = 4e^{-(t+iu)}\overline{\Psi}_3, \quad \overline{\Psi}_2(0) = c_2, \\
&\frac{d\overline{\Psi}_3}{dt} = 0, \quad \overline{\Psi}_3(0) = c_3.
\end{aligned} \tag{3}$$

Класс S^M инвариантен относительно вращения: вместе с каждой функцией $w = f(z)$ он содержит все функции $w = e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$. Поэтому множество $V_4(M)$ обладает определенным свойством симметрии, а именно, вместе со всякой точкой $(a_2, a_3, a_4) \in V_4(M)$ точка $(e^{i\alpha}a_2, e^{2i\alpha}a_3, e^{3i\alpha}a_4)$ также принадлежит множеству $V_4(M)$. Таким образом, для описания множества $V_4(M)$ достаточно рассмотреть проекцию $U_4(M) = \{a_2, a_3, \operatorname{Re} a_4\}$ шестимерного тела коэффициентов в пятимерное пространство. Для точек граничной гиперповерхности $\partial V_4(M)$, проектирующихся на границу $\partial U_4(M)$ множества $U_4(M)$, выполняется условие $\operatorname{Im} \Psi_3 = 0$. На $\partial U_4(M)$ выделим два подмножества, соответствующие значениям $\operatorname{Re} \Psi_3 > 0$ и $\operatorname{Re} \Psi_3 < 0$. Оба эти подмножества исследуются аналогично. Случай $\Psi_3 = 0$ соответствует отысканию на границе $\partial U_4(M)$ множества, проекция которого в (a_2, a_3) дает границу множества системы коэффициентов $\{a_2, a_3\}$ в классе S^M. Рассмотрим случай $\operatorname{Re} \Psi_3 > 0$, нормировав вектор Ψ условием $\Psi_3 = 1$.

Сравнением систем (2) и (3) можно получить формулы

$$\overline{\Psi}_1 = 4x_1^2 - 2c_2x_1 - 3x_2 + c_1, \quad \overline{\Psi}_2 = -2x_1 + c_2 \tag{4}$$

с произвольными постоянными $c_1 = \overline{\Psi}_1(0)$, $c_2 = \overline{\Psi}_2(0)$. Таким образом, при известной траектории $x(t)$ функции $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ задаются вектором $c = (c_1, c_2)$. При каждом допустимом значении (t, x, c) функция H является тригонометрическим многочленом 3-й степени переменного u. Найдем управление $u = \widetilde{u}(t, x, c)$ с обратной связью, максимизирующее функцию H на $[0, 2\pi)$. Обозначим через $\mathcal{M}_k(t)$ множество всех допустимых пар (x, c), для которых многозначное управление $\widetilde{u}(t, x, c)$ принимает не менее k значений на $[0, 2\pi)$. Множество $\mathcal{M}_k(t)$ пусто при $k > 3$. Положим $\mathcal{M}_k(t, x) = \{c = (c_1, c_2) \mid (t, x, c) \in \mathcal{M}_k(t)\}$, $k = 1, 2, 3$. В множестве $\mathcal{M}_1(t, x)$ выделим подмножества $\mathcal{M}_1^0(0, 0)$ и $\mathcal{M}_1^\pi(0, 0)$. Функции, соответствующие этим подмножествам, получаются интегрированием уравнения Левнера на отрезке $[0, \log M]$ с постоянными управлениями $\widetilde{u}(t, x, c) = 0$ и $\widetilde{u}(t, x, c) = \pi$ соответственно.

Лемма 1. *Справедливы описания*

$$\mathcal{M}_1^0(0,0) = \{(c_1,c_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 4c_2 + c_1 + 9 \le 0,\ c_1 < -1\},$$
$$\mathcal{M}_1^\pi(0,0) = \{(c_1,c_2) \in \mathbf{R}^2 \mid c_2^2 + 4c_2 - 4c_1 < 0,\ -1 < c_1 < 15\} \bigcup$$
$$\{(c_1,c_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 4c_2 - c_1 - 9 \le 0,\ c_1 \ge 15\}.$$

Доказательство. Случай $(c_1,c_2) \in \mathbf{R}^2$ исследован в [3]. Остается показать, что если $(c_1,c_2) \notin \mathbf{R}^2$, то управления $\tilde{u}(t,x,c) = 0$ и $\tilde{u}(t,x,c) = \pi$ не будут максимизировать функцию $H(t,x(t),\overline{\Psi}(t),u(t))$ на отрезке $[0,\log M]$. Пусть $c_1 = \xi_1 + ie_1$, $c_2 = \xi_2 + ie_2$ с вещественными ξ_1, ξ_2, e_1, e_2. Как следует из формулировки принципа максимума, для оптимальности траектории $x(t)$ и управления $u(t)$ необходимо существование такого нетривиального решения $\Psi(t)$ сопряженной гамильтоновой системы, что для любого момента t, $0 \le t \le \log M$, выполнено условие максимума

$$H(t,x(t),\overline{\Psi}(t),u(t)) = \max_{v\in[0,2\pi)} \mathcal{H}(t,x(t),\overline{\Psi}(t),v).$$

Разложим функцию $\mathcal{H}(t,x(t),\overline{\Psi}(t),v)$ по степеням t в окрестности нулевой точки

$$\mathcal{H}(t,x(t),\overline{\Psi}(t),v) = \mathcal{H}(0,x(0),\overline{\Psi}(0),v) + \mathcal{H}_t(0,x(0),\overline{\Psi}(0),v)t + o(t).$$

Если управление $u = \pi$ оптимально, то с учетом равенства $\frac{d}{dt}\mathcal{H}(t,x(t),\overline{\Psi}(t),v) = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}(t,x(t),\overline{\Psi}(t),v)$, при $t = 0$ и $v = \pi$ должны выполняться условия $\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial v} = 0$, $\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial v\partial t} = 0$. Отсюда $e_1 = 2e_2$ и $e_1 = 4e_2$, следовательно, $e_1 = e_2 = 0$. Случай $\tilde{u}(t,x,c) = 0$ проверяется аналогично. $\square$

Если $c \in \mathcal{M}_k(t,x)$, $k = 2,3$, т. е. имеет место скользящий режим в системе (2), то от уравнения (1) перейдем к обобщенному уравнению Левнера

$$\frac{dw}{dt} = -w\sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{e^{iu_j} + w}{e^{iu_j} - w}, \quad w\big|_{t=0} = z, \quad t \ge 0, \tag{5}$$

с кусочно-непрерывными управлениями u_j, $1 \le j \le k$, и неотрицательными постоянными λ_j, $\sum\limits_{j=1}^k \lambda_j = 1$. Для $k = 2$ управляемая система (2) заменится семейством систем

$$\frac{dx}{dt} = \lambda G(t,x,u_1) + (1-\lambda)G(t,x,u_2), \quad x(0) = 0, \tag{6}$$

зависящих от постоянного параметра $\lambda \in [0,1]$. Здесь через $G(t,x,u)$ обозначен вектор правых частей управляемой системы (2). Для всех $t \ge 0$ должны выполняться условия скольжения

$$\max_{0\le v\le 2\pi} \mathcal{H}(t,x(t),\overline{\Psi}(t),v) = H(t,x(t),\overline{\Psi}(t),u_1) = H(t,x(t),\overline{\Psi}(t),u_2).$$

Выделим в множестве $\mathcal{M}_2(t,x)$ подмножество $\mathcal{M}_2^{0,\pi}(0,0)$, для которого $u_1 = 0$, $u_2 = \pi$.

Лемма 2. *Справедливо описание*

$$\mathcal{M}_2^{0,\pi}(0,0) = \{(c_1,c_2) \in \mathbf{R}^2 \mid c_1 = -1,\ c_2 \le -2\}.$$

Доказательство. Случай $(c_1,c_2) \in \mathbf{R}^2$ исследован в [3]. Остается показать, что если $(c_1,c_2) \notin \mathbf{R}^2$, то управления $u_1 = 0$ и $u_2 = \pi$ не максимизируют функцию $H(t,x(t),\overline{\Psi}(t),u(t))$ на отрезке $[0,\log M]$. Положим $c_1 = \xi_1 + ie_1$, $c_2 = \xi_2 + ie_2$ с вещественными ξ_1, ξ_2, e_1, e_2. Предположим, что управления $u_1 = 0$ и $u_2 = \pi$ удовлетворяют условиям скольжения при всех $t \in [0,\log M]$. Тогда, проверяя необходимое условие экстремума по u при $u = 0$ и $u = \pi$ для функции $H(0,0,c,u)$, убеждаемся, что скользящий режим в системе (2) с управлениями $u_1 = 0$ и $u_2 = \pi$ возможен только в том случае, если $e_1 = e_2 = 0$. Следовательно, $(c_1,c_2) \in \mathbf{R}^2$. $\square$

Для $c \in \mathcal{M}_3(t,x)$ рассмотрим обобщенное уравнение Левнера (5) с $k=3$, которое порождает семейство обобщенных систем

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j G(t,x,u_j), \quad x(0)=0,$$

где λ_j — произвольные неотрицательные числа, $\sum_{j=1}^{3} \lambda_j = 1$. Множество $\mathcal{M}_3(t,x)$ не пусто уже при $(c_1,c_2) \in \mathbf{R}^2$. Таким образом, рассматриваемая часть граничной гиперповерхности $\partial U_4(M)$ является объединением попарно непересекающихся множеств Ω_1, Ω_2, Ω_3. Каждому из этих множеств взаимно однозначно соответствует множество $\mathcal{M}_k(0,0)$. Справедливо параметрическое представление

$$\Omega_k = \left\{ x(\log M, c, \lambda) : \mathcal{M}_k(0,0),\ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k),\ \lambda_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq k,\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \right\}, \quad k=1,2,3, \tag{7}$$

где $(x(t,c,\lambda), \Psi(t,c,\lambda))$ — решение задачи Коши для семейства управляемых систем, порожденных дифференциальным уравнением (5), и сопряженной системы с непрерывными ветвями $u_j(t,x,c)$.

Полагая теперь $\Psi_3 = -1$ и повторяя предыдущие рассуждения, получим два утверждения.

Лемма 3. *Справедливы описания*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^{\pi}(0,0) &= \{(c_1,c_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 4c_2 - c_1 + 9 \leq 0,\ c_1 > 1\}, \\ \mathcal{M}_1^{0}(0,0) &= \{(c_1,c_2) \in \mathbf{R}^2 \mid c_2^2 + 4c_2 + 4c_1 < 0,\ -15 < c_1 < 1\} \bigcup \\ &\qquad \{(c_1,c_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 4c_2 + c_1 - 9 \leq 0,\ c_1 \geq -15\}. \end{aligned}$$

Лемма 4. *Справедливы описания*

$$\mathcal{M}_2^{0,\pi}(0,0) = \{(c_1,c_2) \in \mathbf{R}^2 \mid c_1 = 1,\ c_2 \leq -2\}.$$

Для этой части граничной гиперповерхности также остается справедливо параметрическое представление (7).

2. Свойства граничной гиперповерхности

Все рассуждения этого параграфа проводятся для той части границы $\partial U_4(M)$, на которой $\Psi_3 = 1$. Они остаются справедливы и для части границы $\partial U_4(M)$, на которой $\Psi_3 = -1$, с соответствующими изменениями.

1. В классе S^M для произвольного значения M выделим две функции $P_\theta^M(z)$, определяемые равенством

$$\frac{M^2 P_\theta^M(z)}{(M - P_\theta^M(z))^2} = K_\theta(z), \quad K_\theta(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2}, \quad \theta = 0, \pi,$$

и называемые функциями Пика. Покажем, что точки граничной гиперповерхности $\partial U_4(M)$, доставляемые этими функциями, являются угловыми точками выпуклого характера. Опорные гиперплоскости (здесь и далее опорные гиперплоскости рассматриваются в локальной окрестности точки), проведенные через эти точки, имеют касание с $\partial U_4(M)$ вдоль некоторых направлений. Проведем рассуждения относительно точки, которая является решением задачи Коши для гамильтоновых систем (2) и (3) с оптимальным постоянным управлением $u = \pi$ в правой части. Обозначим

$$c_1^* = c_1 + \varepsilon \xi_1, \quad c_2^* = c_2 + \varepsilon \xi_2, \tag{8}$$

где (c_1, c_2) — внутренняя точка множества $\mathcal{M}_1^\pi(0,0)$, $\xi_2 = 1 + i\delta_1$, $\xi_1 = \delta_2 + i\delta_3$, $\varepsilon > 0$. Пусть

$$\begin{gathered} u^* = u^*(t, x^*, c^*) = \pi + \varepsilon v + o(\varepsilon), \quad \text{где} \quad v = v(t, x^*, c^*), \\ x_j^*(t, c^*, u^*) = x_j(t, c, \pi) + \varepsilon A_j(t, c^*, u^*) + o(\varepsilon), \\ \Psi_j^*(t, c^*, u^*) = \Psi_j(t, c, \pi) + \varepsilon \Psi_j(t, c^*, u^*) + o(\varepsilon), \\ j = 1, 2, 3. \end{gathered}$$

Записав фазовую управляемую систему для вектора $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_2^*)$, установим, что $\operatorname{Re} A_j \equiv 0$, а для $\operatorname{Im} A_j$ будем иметь систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d \operatorname{Im} A_1}{dt} = -2e^{-t} v, \quad \operatorname{Im} A_1(0) = 0, \\ &\frac{d \operatorname{Im} A_2}{dt} = 4e^{-t}(\operatorname{Im} A_1 - v(x_1 - e^{-t})), \quad \operatorname{Im} A_2(0) = 0, \\ &\frac{d \operatorname{Im} A_3}{dt} = -2e^{-t}(\operatorname{Im} A_1(-2x_1 + 3e^{-t}) - 2 \operatorname{Im} A_2 + v(3e^{-2t} - 6e^{-t} x_1 + x_1^2 + 2x_2)), \quad \operatorname{Im} A_3(0) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Используя (4), для координат сопряженного вектора $\overline{\Psi}^* = (\overline{\Psi}_1^*, \overline{\Psi}_2^*, 1)$ получим формулы

$$\overline{\Psi}_1^* = 4x_1^{*2} - 2c_2^* x_1^* = 3x_2^* + c_1^*, \quad \overline{\Psi}_2^* = -2x_1^* + c_2^*.$$

Приравнивая нулю производную $H_u(t, x^*, \overline{\Psi}^*, u^*)$, для вариации $v = v(t, x^*, c^*)$ при $t = 0$ будем иметь равенство

$$v = \frac{\delta_3 - 2\delta_1}{c_1 - 4c_2 + 9}.$$

Отсюда видно, что $v \neq 0$, если $\delta_3 \neq 2\delta_1$ и $\delta_1^2 + \delta_3^2 > 0$. Поэтому, подставляя v в правые части системы (9), по теореме о гладкой зависимости решений системы дифференциальных уравнений от начальных данных получим решение $x^* = x^*(\log M, c)$. Это позволяет сделать вывод, что вариация порядка ε вектора начальных данных вызывает изменение фазового вектора управляемой системы (2) на величину того же порядка. Следовательно, опорная гиперплоскость вдоль указанных направлений имеет касание с $\partial U_4(M)$. Пусть $\delta_1 = \delta_3 = 0$. Изменение вектора начальных данных при произвольном сколь угодно малом положительном ε в формуле (8) будет вызывать изменение вектора $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, 1)$, который является нормальным вектором опорной гиперплоскости, проведенной через точку граничной гиперповерхности. В то же время фазовый вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ будет оставаться постоянным, т.к. $c = (c_1, c_2)$ — внутренняя точка множества $\mathcal{M}_1^\pi(0,0)$. Следовательно, множество параметров c_1, c_2 порождает семейство опорных гиперповерхностей и, таким образом, точка граничной гиперповерхности $\partial U_4(M)$, доставляемая функцией Пика, является угловой точкой локально выпуклого характера.

2. Как следует из леммы 2, значения параметров $c_1 = -1$, $c_2 \leq 2$ соответствуют скользящему режиму в системе (2). В этом случае, интегрируя систему (6) с $u_1 = 0$ и $u_2 = \pi$, на $\partial U_4(M)$ получаем множество точек, зависящее от параметра λ. Это множество является кривой l на граничной гиперповерхности, которая соединяет угловые точки, соответствующие функциям Пика.

Выберем на кривой l произвольно точку Y и зафиксируем параметр λ. Изменение параметра c_2 при $\delta_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, в формуле (8) вызовет изменение вектора Ψ. В то же время фазовый вектор x останется неизменным. Следовательно, изменение c_2 порождает семейство опорных гиперплоскостей в каждой точке кривой. Поэтому кривая l является ребром граничной гиперповерхности. Покажем, что опорные гиперплоскости, проведенные через точки ребра, по некоторым направлениям касаются $\partial U_4(M)$. Сохраним обозначения (8), полагая точку $c = (c_1, c_2)$ внутренней точкой множества $\mathcal{M}_2^{0,\pi}(0,0)$. Пусть

$$\begin{aligned} u_1^*(t, x^*, c^*) &= \varepsilon v + o(\varepsilon), \qquad \text{где} \;\; v = v(t, x^*, c^*), \\ u_2^*(t, x^*, c^*) &= \pi + \varepsilon h + o(\varepsilon), \quad \text{где} \;\; h = h(t, x^*, c^*). \end{aligned} \tag{10}$$

В условиях скользящего режима векторы $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ и $\overline{\Psi}^* = (\overline{\Psi}_1^*, \overline{\Psi}_2^*, 1)$ будут зависеть еще и от параметра λ, $\lambda \in [0,1]$. Система дифференциальных уравнений (9) заменится системой, зависящей от λ, с вариациями v и h в правой части. Анализируя равенство $H(0,0,c^*,u_1^*) = H(0,0,c^*,u_2^*)$, которое необходимо выполняется, если в системе (2) имеет место скользящий режим с управлениями u_1^*, u_2^*, определяемыми формулами (10), находим $\delta_2 = 0$. Приравнивая нулю производную H_u, для v и h при $t = 0$ получим равенства

$$v = \frac{\delta_3 + 2\delta_1}{8 - 4c_2}, \quad h = \frac{\delta_3 - 2\delta_1}{8 - 4c_2}.$$

Пусть $\delta_1^2 + \delta_3^2 > 0$ и $\delta_3 \neq 2\delta_1$, $\delta_3 \neq -2\delta_1$. Тогда интегрируя соответствующую скользящему режиму систему (9), по теореме о гладкой зависимости решений системы дифференциальных уравнений от параметров получим решение $x^* = x^*(\log M, c^*, \lambda)$. Следовательно, вариация порядка ε вектора начальных данных вызывает изменение фазового вектора управляемой системы (6) на величину того же порядка. Поэтому вдоль указанных направлений опорная гиперплоскость имеет касание с $\partial U_4(M)$.

Если $\delta_2 \neq 0$, то в управляемой системе не будет скользящего режима и, более того, в силу произвольности ε можно утверждать, что в зависимости от знака δ_2 оптимальным управлением будет либо управление u_1^*, либо u_2^*.

В пп. 1 и 2 данного параграфа применением методов оптимизации установлено, что на граничной гиперповерхности имеются две угловые точки выпуклого характера и особая кривая, их соединяющая. Покажем, что все остальные особые точки, в которых нарушается гладкость $\partial U_4(M)$, являются особыми точками алгебраического характера и множество особых точек имеет размерность меньшую, чем размерность фазового пространства.

Запишем функцию Гамильтона

$$H(t, x, \overline{\Psi}, u) = -A_1 \cos u + B_1 \sin u - A_2 \cos 2u + B_2 \sin 2u - C \cos 3u,$$

где

$$u \in \mathcal{M}_k(t,x) \setminus \left(\mathcal{M}_1^0(0,0) \bigcup \mathcal{M}_1^{\pi}(0,0) \bigcup \mathcal{M}_1^{0,\pi}(0,0)\right),$$
$$A_1 = A_1(t, x_1, \operatorname{Re} x_2, \operatorname{Re}\Psi_1, \Psi_2), \quad B_1 = B_1(t, x_1, \operatorname{Im} x_2, \operatorname{Im}\Psi_1, \Psi_2),$$
$$A_2 = A_2(t, \operatorname{Re} x_1, \operatorname{Re}\Psi_2), \quad B_2 = B_2(t, \operatorname{Im} x_1, \operatorname{Im}\Psi_2), \quad C = C(t).$$

Управление $u = u(t, x, c)$, максимизирующее функцию H, определяется из уравнения

$$H_u(t, x, \overline{\Psi}, u) = 0. \tag{11}$$

Если $H_{u^2}(t, x, \overline{\Psi}, u) \neq 0$, то по теореме о неявной функции уравнение (11) разрешимо, и функция $u = u(t, x, c)$, являющаяся решением этого уравнения, будет непрерывной и кусочно-гладкой. Следовательно, решение $x = x(\log M, c)$ задачи Коши для системы (2) определяет гладкую гиперповерхность Ω_1 с непрерывным вектором нормали Ψ. Если управление $u = u(t, x, c)$ многозначно, то решение $x = x(\log M, c, \lambda)$ задачи Коши для семейства управляемых систем, порожденных уравнением (5), задает гладкую гиперповерхность Ω_k, $k = 2, 3$.

Другая ситуация будет, если для управления $u(t, x, c)$, максимизирующего функцию H, производная $H_{u^2}(t, x, \overline{\Psi}, u)$ равна нулю. В этом случае не применима теорема о неявной функции.

Обозначим через M множество, на котором имеет место последнее равенство, и покажем, что его размерность меньше, чем размерность проекции фазового пространства X. Тогда, поскольку задача нахождения множества достижимости для управляемой системы (2) эквивалентна задаче оптимального быстродействия [3], можем использовать теорему о достаточных условиях оптимальности в форме принципа динамического программирования [4].

Будем рассуждать от противного, т. е. предположим, что $\dim M = \dim X$. Обозначим через $G_k(t, x, \overline{\Psi}, u)$, $1 \leq k \leq 4$, k-ю производную по u функции H и предположим $G_4(t, x, \overline{\Psi}, u) \neq 0$, а

$G_k(t,x,\overline{\Psi},u)=0$, $1\le k\le 3$. Заметим, что функции G_k, как и функция H, являются алгебраическими многочленами шестой степени относительно переменной $h=\operatorname{tg} u/2$ и коэффициент при старшей степени отличен от нуля при всех G_k. Рассмотрим отдельно равенства

$$G_1(t,x,\overline{\Psi},u)=0,\quad G_2(t,x,\overline{\Psi},u)=0. \tag{12}$$

Отметим все различные между собой нули $z_1,\dots,z_m$ многочленов $D_1(z)$ и $D_2(z)$, $z=z(t,x,\Psi)$, являющихся дискриминантами уравнений (12), и обозначим $M_1=\{z \mid z=z_j,\ j=1,\dots,m\}$.

Функции $G_1(t,x,\overline{\Psi},u)$ и $G_2(t,x,\overline{\Psi},u)$ аналитичны во всех точках множества M за исключением конечного числа изолированных точек множества M_1. Равенства (12) позволяют записать

$$G_1(t,x,\overline{\Psi},u)=G_2(t,x,\overline{\Psi},u). \tag{13}$$

Но тогда в силу предположения о размерности множества M и теоремы единственности аналитических функций заключаем, что (13) имеет место всюду на множестве X, что приводит к противоречию. Следовательно, $\dim M<\dim X$.

На основании изложенного в данном параграфе, имеет место

Теорема 1. *Граничная гиперповерхность $\partial U_4(M)$, являющаяся границей проекции множества $V_4(M)$ в пространство $(a_2,a_3,\operatorname{Re}a_4)$, является гладкой всюду за исключением некоторого множества особых точек алгебраического характера, имеющего меньшую размерность. Эта гиперповерхность имеет две угловые точки выпуклого характера, соответствующие функциям Пика, и соединяющее их ребро.*

3. Приложения

Результаты, полученные в § § 1, 2, позволяют решать некоторые экстремальные задачи.

Пусть $H(E)$ — класс функций, аналитических в единичном круге E. Функция $f\in S$ называется опорной точкой класса S, если существует линейный непрерывный функционал L на $H(E)$, $L\ne\mathrm{const}$, такой, что f доставляет максимум $\operatorname{Re}L$ на S. Исследованию свойств опорных точек класса S посвящено много работ (см., напр., библиографию в [5]). Известна гипотеза о двух функционалах в классе S [5]: если одна и та же функция доставляет экстремум двум линейно независимым функционалам, то это функция $K(z)=z/(1-z)^2$ и ее вращения. Эта гипотеза доказывалась многими авторами для различных функционалов.

Рассмотрим линейный функционал

$$L(f)=\operatorname{Re}\{\alpha a_2+\beta a_3+\gamma a_4\}, \tag{14}$$

где α, β, γ — комплексные числа, а a_2, a_3, a_4 — коэффициенты функции $f\in S^M$.

Теорема 2. 1) *Если* $\gamma=1$, $\beta=\overline{\Psi}_2\in\{c_2-4(1-1/M)\}$, $\alpha=\overline{\Psi}_1\in\{c_1+(1-1/M)(7-1/M-4c_2)\}$, $(c_1,c_2)\in\mathcal{M}_1^{\pi}(0,0)$, *то*

$$\max_{f\in S^M}L(f)=4/M^3-(4+3c_2)/M^2+(8c_2-2c_1-6)/M-5c_2+2c_1+6. \tag{15}$$

2) *Если* $\gamma=1$, $\beta=\overline{\Psi}_2\in\{c_2+4(1-1/M)\}$, $\alpha=\overline{\Psi}_1\in\{c_1+(1-1/M)(7-1/M+4c_2)\}$, $(c_1,c_2)\in\mathcal{M}_1^{0}(0,0)$, *то*

$$\max_{f\in S^M}L(f)=-4/M^3-(4-3c_2)/M^2+(8c_2+2c_1+6)/M-5c_2-2c_1-6. \tag{16}$$

3) *Если* $\gamma=1$, $\beta=\overline{\Psi}_2\in\{c_2+4-8\lambda+(8\lambda-4)/M\}$, $\alpha=\overline{\Psi}_1\in\{(16\lambda^2-16\lambda+1)/M^2+(-32\lambda^2+(32+8c_2)\lambda-8-4c_2)/M+16\lambda^2-(16+8c_2)\lambda+4c_2+c_1+7\}$, $(c_1,c_2)\in\mathcal{M}_2^{0,\pi}(0,0)$, *то*

$$\begin{aligned}\max_{f\in S^M}L(f)&=(8\lambda-4)/M^3+(16c_2\lambda(1-\lambda)-8\lambda+4-3c_2)/M^2+\\&+(32c_2\lambda^2-(12+32c_2+4c_1)\lambda+8c_2+2c_1+6)/M-\\&-16c_2\lambda^2+(12+16c_2+4c_1)\lambda-5c_2-2c_1-6.\end{aligned} \tag{17}$$

Доказательство. Вектор $(\alpha, \beta, \gamma) = (\overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}_2, 1) = \overline{\Psi}$ является локально опорным к границе множества достижимости уровня t управляемой системы (2). Множествам (см. § 1) $(c_1, c_2) \in \mathcal{M}_1^{\pi}(0,0)$, $(c_1, c_2) \in \mathcal{M}_1^{0}(0,0)$, $(c_1, c_2) \in \mathcal{M}_2^{0,\pi}(0,0)$ отвечают точки граничной гиперповерхности $\partial U_4(M)$, доставляемые соответственно функциями $P_{\pi}^{M}(z)$, $P_0^{M}(z)$ и функцией $Q_{0,\pi}^{M,\lambda}(z)$, отображающей единичный круг на круг радиуса M с двумя разрезами вдоль вещественной оси. Поэтому уравнения (15), (16), (17) являются уравнениями опорных гиперплоскостей в локальных окрестностях указанных точек граничной гиперповерхности. Следовательно, в условиях теоремы функции $P_{\pi}^{M}(z)$, $P_0^{M}(z)$ и $Q_{0,\pi}^{M,\lambda}(z)$ локально максимизируют функционал (14). $\square$

Устремляя M к бесконечности, распространяем два последних утверждения на класс S. Известно (см. [6]), что опорные точки класса S отображают единичный круг на дополнение аналитической кривой Γ и удовлетворяют некоторому дифференциальному уравнению. Таким образом, функции, отображающие единичный круг на плоскость с двумя разрезами вдоль вещественной оси, не являются опорными в классе S. Как показывают результаты данной работы, эти функции локально максимизируют функционал (14) и, следовательно, являются локально опорными.

Автор благодарит Д.В. Прохорова за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Бабенко К.И. *К теории экстремальных задач для однолистных функций класса S* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1972. – Т. 101. – 320 с.
2. Schaeffer A.S., Spenser D.C. *Coefficient regions for schlicht functions* // Amer. Math. Soc. Colloquim Publ. – 1950. – V. 35.
3. Prokhorov D.V. *Reachable set methods in extremal problems for univalent functions.* – Saratov: Saratov Univ., 1993. – 228 p.
4. Болтянский В.Г. *Математические методы оптимального управления.* – М., 1966.
5. Goh S.S. *Support points and double poles* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1994. – V. 122. – № 2. – P. 463–468.
6. Duren P.I. *Univalent functions.* – Springer-Verlag, 1993.

Саратовский государственный педагогический институт

Поступила
26.12.1995