ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 6 (421)

УДК 517.925

В.В. ПЕТРОВА, Е.Л. ТОНКОВ

ДОПУСТИМОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ. II

Здесь мы продолжаем исследование, начатое в [1].

3. Периодические решения нелинейной системы

Формулируемая ниже теорема отличается от многих стандартных теорем существования своей большей геометричностью, что позволяет полнее учитывать специфику изучаемой системы. С другой стороны, эффективность применения этой теоремы зависит от того, насколько точно мы представляем область расположения предполагаемого периодического решения в фазовом пространстве системы.

Будем записывать систему в виде

$$\dot{x} = A(t,x)x + B(t,x)f(t,x), \tag{3.1}$$

где функции $A : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $B : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $f : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^m$. Пусть дополнительно задана функция $X : \mathbb{R} \to \Omega(\mathbb{R}^n)$. В дальнейшем предполагается, что

а) функция $t \to X(t)$ непрерывна, периодична с периодом $T > 0$, и для каждого фиксированного t множество $X(t)$ компактно и выпукло в $\mathbb{R}^n$ (инвариантность X относительно системы (3.1) не предполагается);

б) при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$ функции A, B, f измеримы по t, ограничены на $\mathbb{R}$ и T-периодичны;

в) при каждом фиксированном t функции A, B, f локально липшицевы в каждой точке x из некоторой окрестности множества $X(t)$.

Теорема 3. *Если для каждой непрерывной T-периодической функции $t \to \hat{x}(t) \in X(t)$ система*

$$\dot{x} = A(t,\hat{x}(t))x + B(t,\hat{x}(t))u \tag{3.2}$$

(U, X)-допустима, где $U(t) = f(t, X(t))$, то существует по крайней мере одно T-периодическое решение $x(t)$ системы (3.1)*, причем $x(t) \in X(t)$.*

Замечание 6. Эквивалентная формулировка [2]: если для каждой непрерывной T-периодической функции $t \to \hat{x}(t) \in X(t)$ система $\dot{x} = A(t,\hat{x}(t))x$ регулярна и для любой точки $(t_0, x_0) \in [0,T] \times \partial X(t_0)$ и всех $\xi \in N(t_0, x_0)$ выполнено неравенство

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \max_{x \in X(t)} \hat{\psi}(t,\xi) B(t,\hat{x}(t)) f(t,x) dt \leqslant \xi x_0, \tag{3.3}$$

Исследования выполнены в рамках программы “Университеты России” по направлению “Фундаментальные проблемы математики и механики” (проект 1.5.22) и поддержаны РФФИ (грант 94-01-00843-а) и конкурсным центром фундаментального естествознания (грант 93-1-46-18).

где $\hat{\psi}(t,\xi)$ — решение задачи

$$\dot{\psi} = -\psi A(t,\hat{x}(t)), \quad \psi(t_0+T) - \psi(t_0) = \xi, \tag{3.4}$$

то система (3.1) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение, расположенное в $X(t)$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\Gamma(t,s,\hat{x}(\cdot))$ — матрица Грина (см. замечание 1 и равенство (2.6)) системы $\dot{x} = A(t,\hat{x}(t))x$. Из условия допустимости следует существование константы M, обеспечивающей для всех $(t,s,x(\cdot)) \in \Pi \times \mathfrak{X}$ выполнение неравенства

$$|\Gamma(t,s,x(\cdot))| \leqslant M, \tag{3.5}$$

где $\Pi = \{(t,s) : t-T \leqslant s \leqslant t,\ t \in \mathbb{R}\}$, $\mathfrak{X}$ — совокупность измеримых T-периодических сечений функции $t \to X(t)$.

Пусть $x_0(\cdot)$ – непрерывное T-периодическое сечение множества $X(t)$. По $x_0(\cdot)$ построим $u_0(t) = f(t,x_0(t))$, $A_0(t) = A(t,x_0(t))$, $B_0(t) = B(t,x_0(t))$ и функцию $\Gamma_0(t,s) = \Gamma(t,s,x_0(\cdot))$. Обозначим через $x_1(\cdot)$ T-периодическое решение системы

$$\dot{x} = A_0(t)x + B_0(t)u_0(t).$$

Оно расположено в $X(t)$. Далее строим $u_1(\cdot)$, $A_1(\cdot)$, $B_1(\cdot)$ и $\Gamma_1(\cdot,\cdot)$. Продолжая этот процесс, построим последовательности $\{x_i\}$, $\{u_i\}$, $\{A_i\}$, $\{B_i\}$, $\{\Gamma_i\}$, причем

$$x_i(t) = \int_{t-T}^{t} \Gamma_{i-1}(t,s)B_{i-1}(s)u_{i-1}(s)ds. \tag{3.6}$$

Из ограниченности множеств $X(t)$, $f(t,X(t))$ и функций A, B на $\mathbb{R}\times X(t)$ следует оценка $|\dot{x}_i(t)| \leqslant$ $\leqslant M$ для некоторой константы M и всех $i = 0,1,\ldots$ Поэтому последовательность $\{x_i\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна и, следовательно, компактна в $C([0,T],\mathbb{R}^n)$. Аналогичным образом доказывается (с привлечением (3.5) и равенства $\frac{d}{dt}\Gamma_i(t,s) = A(t,x_{i-1}(t))\Gamma_i(t,s)$) компактность последовательности $\{\Gamma_i\}$ в $\mathrm{C}(K,\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$, где $K = \{(t,s) : t-T \leqslant s \leqslant t,$ $0 \leqslant t \leqslant T\}$.

Выделим из последовательности $\{(x_i,\Gamma_i)\}$ сходящуюся подпоследовательность, которую, после соответствующей перенумерации снова обозначим $\{(x_i,\Gamma_i)\}$, а ее предел – через $(\hat{x}(\cdot),\hat{\Gamma}(\cdot,\cdot))$.

В силу локальной липшицевости A по x при достаточно больших i справедливо неравенство $|A(t,x_i(t)) - A(t,\hat{x}(t))| \leqslant l|x_i(t) - \hat{x}(t)|$, поэтому $A(t,x_i(t))$ сходится к $A(t,\hat{x}(t))$ при почти всех t, и, следовательно, $\Gamma_i(t,s)$ сходится к $\hat{\Gamma}(t,s)$ равномерно на компакте K. Кроме того (в силу локальной липшицевости), $B(t,x_i(t))$ и $f(t,x_i(t))$ сходятся к $B(t,\hat{x}(t))$ и $f(t,\hat{x}(t))$ при почти всех $t \in \mathbb{R}$. Переходя в (3.6) к пределу (при каждом фиксированном t), получаем равенство

$$\hat{x}(t) = \int_{t-T}^{t} \hat{\Gamma}(t,s)B(s,\hat{x}(t))f(s,\hat{x}(s))ds,$$

из которого следует, что $\hat{x}(t)$ — T-периодическое решение системы (3.1). $\square$

Следствие 3. Если система $\dot{x} = A(t)x$ регулярна и найдется такое $r > 0$, что

$$\max_{t_0,\xi} \int_{t_0}^{t_0+T} |\psi(t,\xi)|\omega_r(t)dt \leqslant r, \quad (t_0,\xi) \in [0,T]\times S^{n-1}, \tag{3.7}$$

где $\omega_r(t) = \max\limits_{|x|\leqslant r} |f(t,x)|$, $\psi(t,\xi)$ — решение задачи

$$\dot{\psi} = -\psi A(t), \quad \psi(t_0+T) - \psi(t_0) = \xi, \quad \xi \in S^{n-1},$$

то система

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x) \tag{3.8}$$

(A и f периодичны по t с периодом $T > 0$) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение $x(\cdot)$, удовлетворяющее неравенству $\|x(\cdot)\|_0 \leqslant r$.

Это стандартное утверждение получается из теоремы 3, если положить $X_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant r\}$. Действительно, пусть $x_0 \in \partial X_r$, тогда касательный вектор $\xi = x_0^*/|x_0|$. Поскольку $\xi x_0 = r$ и

$$\max_{x\in X_r} \psi(t,\xi)f(t,x) = |\psi(t,\xi)| \max_{x\in X_r} \frac{\psi(t,\xi)}{|\psi(t,\xi)|} f(t,x) \leqslant$$
$$\leqslant |\psi(t,\xi)| \max_{(\mu,x)\in S^{n-1}\times X_r} \mu f(t,x) \leqslant |\psi(t,\xi)| \max_{|x|\leqslant r} |f(t,x)| \leqslant |\psi(t,\xi)|\omega_r(t),$$

то из неравенства (3.7) следует неравенство (3.3).

Следствие 4. Пусть множество

$$X(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu_i(t)x \leqslant \alpha_i(t),\ i = 1,\ldots,s\}$$

(функции $\mu_i : \mathbb{R} \to S^{n-1}$, $\alpha_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывны и T-периодичны) компактно при каждом t и система $\dot{x} = A(t)x$ регулярна. Если для каждого $i = 1,\ldots,s$ и всех $t_0 \in [0,T]$ выполнены неравенства

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \max_{x\in X(t)} \psi_i(t)f(t,x)dt \leqslant \alpha_i(t_0),$$

где $\psi_i(t)$ — решение задачи

$$\dot{\psi} = -\psi A(t), \quad \psi(t_0+T) - \psi(t_0) = \mu_i(t_0),$$

то система (3.3) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение, расположенное в $X(t)$.

Пример 4. Нелинейная система

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \quad i = 1,\ldots,n-1; \\ \dot{x}_n &= \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(t)x_j + f(t,x_1,\ldots,x_n) \end{aligned} \tag{3.9}$$

с T-периодическими коэффициентами $a_{ij}(t)$ и T-периодической по t функцией f имеет T-периодическое решение с неотрицательной первой координатой, если выполнены следующие условия:

1) для каждого $t_0 \in [0,T]$ имеет место равенство $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{1}{r} \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} \omega_r(t)dt = 0$, где $\omega_r(t) = \max\limits_{x\in X_r} f(t,x)$, $X_r = \{x = \mathrm{col}(x_1,\ldots,x_n) : x_1 \geqslant 0, |x| \leqslant r\}$;
2) $f(t,x) \geqslant 0$ для всех $(t,x) \in \mathbb{R} \times X_\infty$;
3) для каждого $t_0 \in [0,T]$ последняя координата $\psi_n(t)$ решения задачи

$$\dot{\psi} = -\psi A(t), \quad \psi(t_0+T) - \psi(t_0) = (1,0,\ldots,0),$$

где $A(t) = (a_{ij}(t))$, удовлетворяет неравенству $\psi_n(t) \geqslant 0$.

4. Доказательство теоремы 1

Лемма 1. *Линейная система*

$$\begin{cases} \dot p = -(f_1(t)+k)p + f_1(t)q, \\ \dot q = f_2(t)p - (f_2(t)+f_3(t))q \end{cases} \tag{4.1}$$

с измеримыми (не обязательно периодическими) коэффициентами f_i, удовлетворяющими неравенствам $0 \leqslant f_i(t) \leqslant r_i$, $f_3(t) \geqslant \delta > 0$, $k > 0$, равномерно экспоненциально устойчива.

Доказательство. Отметим, что множество $\mathbb{R}^2_+ = \{(p,q) : p \geqslant 0, \ q \geqslant 0\}$ положительно инвариантно, т.е. всякое решение системы (4.1), начинающееся в $\mathbb{R}^2_+$ в произвольный момент времени t_0, остается в $\mathbb{R}^2_+$ при всех $t \geqslant t_0$.

Пусть $z(t) = (p(t), q(t))$ — решение системы (4.1), удовлетворяющее условию $z(t_0) = (1,0)$. Тогда найдется такой момент времени $t_1 > t_0$, что для всех $t \in I_1 = [t_0, t_1)$ $\ z(t) \in Q_1 = \{(p,q) : 0 \leqslant q < p\}$. Из первого уравнения системы (4.1) имеем $\dot p = -f_1(t)(p(t)-q(t)) - kp(t) \leqslant -kp(t)$. Следовательно, $p(t) \leqslant exp(-k(t-t_0)), t \in I_1$, и (в силу неравенства $q(t) \leqslant p(t)$) $\ q(t) \leqslant \exp(-k(t-t_0))$. Поэтому, если $t_1 = \infty$, решение $z(t)$ допускает экспоненциальную оценку (равномерную относительно t_0). Пусть $t_1 < \infty$, тогда $p(t_1) = q(t_1)$. Если при $t > t_1$ решение $z(t)$ вошло в $Q_2 = \{(p,q) : 0 \leqslant p < q\}$, то из второго уравнения системы (4.1) имеем $\dot q(t) = f_2(t)(p(t)-q(t)) - f_3(t)q(t) \leqslant -f_3(t)q(t) \leqslant -\delta q(t)$. Следовательно,

$$q(t) \leqslant q(t_1)e^{-\delta(t-t_1)} \leqslant e^{-k(t_1-t_0)}e^{-\delta(t-t_1)} \leqslant e^{-\gamma(t-t_0)},$$

где $\gamma = \min\{k, \delta\}$ и (в силу неравенства $p(t) < q(t)$) $\ p(t) \leqslant \exp(-\gamma(t-t_0))$. Эти неравенства сохраняются до тех пор, пока $z(t) \in Q_2$. Таким образом, для всех $t \in I_1 \cup I_2$, где $I_2 = [t_1, t_2)$, t_2 — первый момент возвращения решения $z(t)$ из области Q_2 на прямую $q = p$, решение допускает экспоненциальную оценку (равномерную относительно t_0) с показателем $-\gamma$. Решение $z(t)$ может многократно пересекать прямую $q = p$, но при этом, как теперь легко проверить, экспоненциальная устойчивость (с показателем $-\gamma$) сохраняется.

Аналогично можно доказать, что решение $z(t)$ системы (4.1), удовлетворяющее начальному условию $z(t_0) = (0,1)$, допускает экспоненциальную оценку (равномерную относительно t_0) с показателем $-\gamma$. $\square$

Докажем первое утверждение теоремы 1. Фиксируем допустимое управление $v(t)$ (т.е. измеримую T-периодическую функцию со значениями в $[\alpha, \beta]$) и произвольную непрерывную T-периодическую функцию $\hat x(t)$ со значениями в множестве $\operatorname{cl} X_\varepsilon$, где X_ε определено равенством (1.3). Рассмотрим систему

$$\dot x = A(t, \hat x(t))x + b, \tag{4.2}$$

где $b = \operatorname{col}(k_2, 0)$, а элементы $a_{ij}(t)$ матрицы $A(t, \hat x(t))$ определены равенствами $a_{11}(t) = -(k_1 v(t) + k_2 + 2k_3 v(t)\hat x_1(t))$, $a_{12}(t) = -(k_2 - 2k_4 \hat x_2(t))$, $a_{21}(t) = 2k_3 v(t)\hat x_1(t)$, $a_{22}(t) = -2k_4 \hat x_2(t)$. Предварительно докажем, что система (4.2) $(U, \operatorname{cl} X_\varepsilon)$-допустима (для всех T-периодических $\hat x(t) \in \operatorname{cl} X_\varepsilon$), где $U = f(t, \operatorname{cl} X_\varepsilon)$ и поскольку $f(t,x) \equiv 1$, то $U = \{1\}$. Следовательно, доказательство $(U, \operatorname{cl} X_\varepsilon)$-допустимости сводится к проверке двух фактов: во-первых, для каждой T-периодической $\hat x(t) \in \operatorname{cl} X_\varepsilon$ система

$$\dot x = A(t, \hat x(t))x \tag{4.3}$$

регулярна и, во-вторых, единственное T-периодическое решение системы (4.2) содержится в $\operatorname{cl} X_\varepsilon$.

Покажем, что система (4.3) регулярна. Перейдем к новым координатам $p = x_1 + x_2$, $q = x_2$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} \dot{p} = -(f_1(t) + k_2)p + f_1(t)q, \\ \dot{q} = f_2(t)p - (f_2(t) + f_3(t))q, \end{cases} \tag{4.4}$$

где $f_1 = k_1 v(t) > 0$, $f_2 = 2k_3 v(t)\hat{x}_1(t) \geqslant 0$, $f_3 = 2k_4\hat{x}_2(t) \geqslant 0$.

Система (4.4) — это система вида (4.1) и (4.2), но применить к ней лемму 1 мы пока не можем, поскольку не выполнено условие $f_3(t) \geqslant \delta > 0$.

Легко проверить, что для каждого нетривиального решения системы (4.4), находящегося в момент времени t в множестве $S_2 = \{(p,q) : p \leqslant 0,\ q \geqslant 0\}$, выполнено неравенство $\dot{p}(t) > 0$. Поэтому система (4.4) не имеет нетривиальных T-периодических решений, целиком расположенных в S_2 (и, следовательно, нет T-периодических решений в $S_4 = -S_2$). Отметим теперь, что в силу инвариантности множества $\mathbb{R}^2_+$ относительно решений системы (4.4), нет нетривиальных периодических решений, пересекающих полуось $l_+ = \{(p,q) : p = 0,\ q \geqslant 0\}$. Аналогичные рассуждения верны для $\mathbb{R}^2_- = -\mathbb{R}^2_+$ и $l_- = -l_+$. Таким образом, если система (4.4) имеет нетривиальное T-периодическое решение, то оно целиком расположено в $\mathbb{R}^2_+$.

Перепишем первое уравнение системы (4.4) в виде $\dot{p} = -f_1(t)(p-q) - k_2 p$. Поскольку в множестве $Q_1 = \{(p,q) : 0 \leqslant q < p\}$ имеет место неравенство $\dot{p}(t) < 0$, то первая координата $p(t)$ монотонно убывает (до тех пор, пока решение находится в Q_1). Следовательно, нет T-периодических решений, целиком находящихся в Q_1. Аналогичные рассуждения можно провести для области $Q_2 = \{(p,q) : 0 \leqslant p < q\}$. В этом случае $\dot{q} = f_2(t)(p-q) - f_3(t)q$ и поскольку $f_2(t)$ и $f_3(t)$ не могут одновременно обратиться в нуль (т.к. $\hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t) \geqslant \varepsilon$), то $\dot{q}(t) < 0$. Поэтому в Q_2 тоже нет T-периодических решений.

Допустим, что существует решение $(p(t), q(t))$ системы (4.4) (не обязательно периодическое), находящееся в $\mathbb{R}^2_+$ и имеющее соприкосновения (пересечения или касания) с полупрямой $l_+ = \{(p,q) : p = q,\ q \geqslant 0\}$. Тогда в моменты соприкосновения $t_1 < t_2 < \cdots$ выполнены неравенства $\dot{p}(t_i) < 0$, $\dot{q}(t_i) \leqslant 0$, и поэтому последовательность $(p(t_i), q(t_i))$ убывает вдоль прямой l_+, т.е. $|p(t_i)| + |q(t_i)| = 2|p(t_i)| > 2|p(t_{i+1})|$. Следовательно, система (4.4) не имеет периодических решений, находящихся в $\mathbb{R}^2_+$ и имеющих соприкосновения с полупрямой l_+. Мы доказали, что система (4.4), а следовательно, и система (4.3) регулярны.

Докажем теперь, что каждой T-периодической функции $\hat{x}(t) \in \operatorname{cl} X_\varepsilon$ отвечает T-периодическое решение системы (4.2), целиком содержащееся в $\operatorname{cl} X_\varepsilon$. Перейдем к новым координатам $p = x_1 + x_2$, $q = x_2$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} \dot{p} = -(f_1(t) + k_2)p + f_1(t)q + k_2, \\ \dot{q} = f_2(t)p - (f_2(t) + f_3(t))q, \end{cases} \tag{4.5}$$

а множество $\operatorname{cl} X_\varepsilon$ перейдет в множество $H_\varepsilon = \{(p,q) : 0 \leqslant q \leqslant p \leqslant 1,\ p \geqslant \varepsilon\}$. Для доказательства (U, H_ε)-допустимости, где $U = \{1\}$, системы (4.5) воспользуемся следствием 2. Система, сопряженная к системе (4.4), имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi} = (f_1(t) + k_2)\xi - f_2(t)\eta, \\ \dot{\eta} = -f_1(t)\xi + (f_2(t) + f_3(t))\eta. \end{cases} \tag{4.6}$$

Покажем сначала, что выполнено неравенство (2.13) для полуплоскости $p \leqslant 1$. В этом случае условие (2.13) запишется в виде

$$k_2 \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t)dt \leqslant 1, \tag{4.7}$$

где $\xi(\cdot)$ – первая координата решения $(\xi(\cdot), \eta(\cdot))$ системы (4.6) с краевыми условиями

$$\xi(t_0+T) - \xi(t_0) = 1, \quad \eta(t_0+T) - \eta(t_0) = 0. \tag{4.8}$$

Интегрируя на решении равенства (4.6) и складывая результаты интегрирования, получим $1 = k_2 \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t)dt + \int_{t_0}^{t_0+T} f_3(t)\eta(t)dt$, поэтому неравенство (4.7) эквивалентно неравенству $\int_{t_0}^{t_0+T} f_3(t)\eta(t)dt \geqslant 0$, и, поскольку f_3 и η периодичны, последнее неравенство примет вид $\int_0^T f_3(t)\eta(t)dt \geqslant 0$. Покажем, что $\eta(t) \geqslant 0$. Действительно, решение задачи (4.6),(4.8) не может целиком располагаться в $S_4 = \{(\xi,\eta) : \xi \geqslant 0,\ \eta \leqslant 0\}$, поскольку в силу системы (4.6) в S_4 имеет место неравенство $\dot\eta(t) < 0$, что противоречит условию $\eta(T) = \eta(0)$. В $S_3 = \{(\xi,\eta) : \xi \leqslant 0,\ \eta \leqslant 0\}$ решение задачи (4.6), (4.8) также отсутствует: если оно находится в S_3, то для $\mu(t) = \xi(t) + \eta(t)$ получаем равенство $\dot\mu(t) = k_2\xi(t) + f_3(t)\eta(t)$, из которого в силу условий (4.8) следует противоречие $1 = \int_0^T \dot\mu(t)dt = k_2\int_0^T \xi(t)dt + \int_0^T f_3(t)\eta(t)dt < 0$.

Покажем, что в объединении $S_3 \cup S_4$ решение задачи (4.6), (4.8) тоже отсутствует. Действительно, если решение $\psi(\cdot) = (\xi(\cdot), \eta(\cdot))$ находится в $S_3 \cup S_4$ то (в силу условия $\xi(T) = \xi(0) + 1$) $\psi(0) \in S_3$, $\psi(T) \in S_4$ и с возрастанием времени точка $\psi(t)$ переходит из S_3 в S_4, пересекая полуось $l_- = \{\xi = 0,\ \eta < 0\}$ ровно один раз. (Легко заметить, что всякое решение системы (4.6) пересекает координатные оси не более одного раза.) Пусть $\psi(t_1) \in l_-$. Тогда функция $\mu(t) = \xi(t) + \eta(t)$ строго монотонно убывает при $t \in [0, t_1]$ и, поскольку координата $\xi(t)$ обязана возрастать (в силу условия $\xi(T) = \xi(0) + 1$), то координата $\eta(t)$ убывает. При $t \in [t_1, T]$ в силу второго уравнения системы (4.6) имеем неравенство $\dot\eta(t) < 0$. Тогда $\eta(t)$ убывает на $[0, T]$ и, следовательно, не удовлетворяет условию $\eta(T) = \eta(0)$. Таким образом, в $S_3 \cup S_4$ нет решения задачи (4.6), (4.8). Отметим еще, что траектория $\psi(\cdot)$ решения задачи (4.6),(4.8) не может пересекать ось $\eta = 0$, т. к. в силу периодичности координаты $\eta(\cdot)$ таких пересечений было бы не менее двух. Из этих рассуждений следует, что траектория решения задачи (4.6), (4.8) расположена в полуплоскости $\eta > 0$ и, следовательно, имеет место неравенство $\eta(t) > 0$, $t \in [0, T]$. Мы показали, что выполнено неравенство (4.7).

Покажем теперь, что неравенство (2.13) выполнено для полуплоскости $q \geqslant 0$. В этом случае оно запишется в виде

$$k_2 \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t)dt \leqslant 0, \tag{4.9}$$

где $\xi(t)$ — первая координата решения $\psi(\cdot) = (\xi(\cdot), \eta(\cdot))$ системы (4.6) с краевыми условиями

$$\xi(t_0+T) - \xi(t_0) = 0, \quad \eta(t_0+T) - \eta(t_0) = -1. \tag{4.10}$$

Покажем, что $\xi(t) \leqslant 0$. Решение $\psi(\cdot)$ задачи (4.6), (4.10) не может целиком находиться в $S_4 = \{(\xi,\eta) : \xi > 0,\ \eta \leqslant 0\}$, поскольку в S_4 в силу первого уравнения системы (4.6) выполнено неравенство $\dot\xi(t) > 0$. Решение $\psi(\cdot)$ не может располагаться и в $S_1 = \mathbb{R}^2_+$ (в противном случае для $\mu(t) = \xi(t) + \eta(t)$ имеем $-1 = \int_{t_0}^{t_0+T} \dot\mu(t)dt = \int_{t_0}^{t_0+T} (k_2\xi(t) + f_3(t)\eta(t))dt > 0$). Решение $\psi(\cdot)$ не может располагаться и в $S_1 \cup S_4$. Действительно, если оно находится в $S_1 \cup S_4$, то $\psi(t_0) \in S_1$, $\psi(t_0+T) \in S_4$ (в силу условия $\eta(t_0+T) = \eta(t_0) - 1$). Поскольку в S_1 выполнено неравенство $\dot\mu(t) = k_2\xi(t) + f_3(t)\eta(t) > 0$ и $\eta(t)$ убывает, то $\xi(t)$ возрастает при $t \in [t_0, t_1)$, где t_1 — момент пересечения полуоси $l_+ = \{(\xi,\eta) : \xi > 0, \eta = 0\}$. Так как $\psi(t) \in S_4$, то при $t \in [t_1, t_0+T]$ из первого уравнения системы (4.6) следует неравенство $\dot\xi(t) > 0$, т. е. $\xi(t)$ продолжает возрастать, что противоречит условию периодичности $\xi(t)$. Отметим наконец, что траектория решения $\psi(\cdot)$ не пересекает ось η (по той же причине, что и ранее: решения не могут дважды пересекать координатные оси). Мы показали, что первая координата решения задачи (4.6), (4.10) удовлетворяет неравенству $\xi(t) \leqslant 0$, и поэтому условие (4.9) выполнено.

Покажем, что условие (2.13) выполнено для полуплоскости $q \leqslant p$. В этом случае условие (2.13) примет вид (4.9), где $\xi(\cdot)$ — первая координата решения $\psi(\cdot) = (\xi(\cdot), \eta(\cdot))$ системы (4.6) с краевыми условиями

$$\xi(t_0+T) - \xi(t_0) = -1/\sqrt{2}, \quad \eta(t_0+T) - \eta(t_0) = 1/\sqrt{2}. \tag{4.11}$$

Покажем, что (4.9) выполнено. Из равенства $\dot{\mu}(t) = k_2\xi(t)+f_3(t)\eta(t)$ для $\mu(t) = \xi(t)+\eta(t)$ следует, что решение $\psi(\cdot)$ не может целиком располагаться в S_1, а из второго уравнения системы (4.6) и второго краевого условия (4.11) следует, что $\psi(t)$ не может находиться в S_4 для всех $t \in [t_0, t_0+T]$. Далее, поскольку S_4 инвариантно, то снова в силу второго условия (4.11) решение не может целиком располагаться в $S_1 \cup S_4$, а в силу первого краевого условия (4.11) — в $S_3 \cup S_4$. Если $\psi(t) \in S_3 \cup S_4$, $t \in [t_0, t_0+T]$, то, интегрируя $\dot{\mu}(t)$, получим $k_2 \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t)dt = -\int_{t_0}^{t_0+T} f_3(t)\eta(t)dt \leqslant$ $\leqslant 0$ (поскольку $f_3(t) \geqslant 0, \eta(t) \geqslant 0$), что означает справедливость неравенства (4.9). Тем более неравенство (4.9) выполнено, если $\psi(\cdot)$ целиком находится в $S_2 \cup S_3$.

Осталось доказать, что условие (2.13) выполнено для полупространства $p \geqslant \varepsilon$. В этом случае неравенство (2.13) запишется в виде

$$k_2 \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t)dt \leqslant -\varepsilon, \quad \varepsilon = k_2(k_1\beta + k_2)^{-1}, \tag{4.12}$$

где $\xi(\cdot)$ — первая координата решения $\psi(\cdot) = (\xi(\cdot), \eta(\cdot))$ системы (4.6) с краевыми условиями

$$\xi(t_0+T) - \xi(t_0) = -1, \quad \eta(t_0+T) - \eta(t_0) = 0. \tag{4.13}$$

Решение задачи (4.6), (4.13) целиком расположено в S_3. Это утверждение доказывается, как и во всех предыдущих случаях, с применением равенства $\dot{\mu}(t) = k_2\xi(t)+f_3(t)\eta(t)$ для $\mu(t) = \xi(t)+\eta(t)$, вида краевых условий (4.13) и системы (4.6). Поскольку $\psi(t) \in S_3, t \in [t_0, t_0+T]$, то $\eta(t) > 0$, поэтому из первого уравнения системы (4.6) следует неравенство $\dot{\xi}(t) \leqslant (f_1(t) + k_2)\xi(t)$. Так как $\xi(t) < 0$ и $f_1(t) = k_1 v(t) \leqslant k_1\beta$, то $\dot{\xi}(t) \leqslant (k_1\beta + k_2)\xi(t)$. После интегрирования последнего неравенства получим неравенство $-1 \leqslant \dfrac{k_1\beta + k_2}{k_2} k_2 \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \xi(t)dt$, из которого следует (4.12).

Таким образом, доказано, что система (4.2) $(U, \operatorname{cl} X_\varepsilon)$-допустима (для каждой фиксированной T-периодической функции $v(t) \in [\alpha, \beta]$ и любой T-периодической функции $\hat{x}(t) \in \operatorname{cl} X_\varepsilon$), поэтому в силу теоремы 3 система (1.1) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение, расположенное в $\operatorname{cl} X_\varepsilon$. Поскольку вектор скорости всякого решения системы (1.1) (при фиксированном $v(t) \in [\alpha, \beta]$) на координатных осях направлен строго внутрь $\mathbb{R}^2_+$, то фактически периодическое решение системы (1.1) не может касаться координатных осей и поэтому находится в X_ε. Первое утверждение теоремы 1 доказано.

Докажем второе утверждение теоремы. Допустим, что существует по крайней мере два T-периодических решения $x(\cdot)$ и $\hat{x}(\cdot)$ системы (1.1), целиком расположенные в X_ε. Тогда пара функций $z_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$, $z_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ является T-периодическим решением линейной системы

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -(f_1(t) + k_2 + f_2(t))z_1 - (k_2 - f_3(t))z_2, \\ \dot{z}_2 = f_2(t)z_1 - f_3(t)z_2, \end{cases} \tag{4.14}$$

где $f_1 = k_1\hat{v}(t) > 0$, $f_2 = 2k_3\hat{v}(t)r(t) > 0$, $f_3 = 2k_4h(t) > 0$, $r(t) = x_1(t) + \hat{x}_1(t)$, $h(t) = x_2(t) + \hat{x}_2(t)$. Перейдем к новым координатам $p = z_1 + z_2$, $q = z_2$ и получим систему вида (4.1) с T-периодическими коэффициентами, причем выполнены все условия леммы 1. Система (4.1) не имеет периодических решений, кроме тривиального; это же верно и для системы (4.14), что и доказывает второе утверждение теоремы.

Аналогично доказывается третье утверждение теоремы. Мы составляем разность $z(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, где $\hat{x}(\cdot)$ — T-периодическое решение, а $x(t)$ — произвольное решение системы (4.1) с начальным условием $x(t_0) \in X$. Тогда относительно $z(\cdot)$ получим систему (4.14) и (после замены $p = z_1 + z_2$, $q = z_2$) — систему (4.1), относительно которой выполнены все условия леммы 1.

Для доказательства четвертого утверждения теоремы 1 воспользуемся теоремой 2 работы [3]. С этой целью убедимся, что выполнены условия А и Б теоремы 2: условие Б выполнено в силу компактности множества $\mathrm{cl}\, X_\varepsilon$ (все периодические решения системы (1.1) при всевозможных допустимых управлениях находятся в X_ε). Условие А — это условие регулярности системы первого приближения на паре $\hat{v}(\cdot), \hat{x}(\cdot)$. Система первого приближения имеет вид

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -(k_1\hat{v}(t) + k_2 + 4k_4\hat{v}(t)\hat{x}_1(t))z_1 + (4k_4\hat{x}_2(t) - k_2)z_2, \\ \dot{z}_2 = 4k_3\hat{v}(t)\hat{x}_1(t)z_1 - 4k_4\hat{x}_2(t)z_2. \end{cases} \tag{4.15}$$

Для новых переменных $p = z_1 + z_2$, $q = z_2$ получим систему вида (4.1), где $f_1 = k_1\hat{v}(t)$, $k = k_2$, $f_2 = 4k_3\hat{v}(t)\hat{x}_1(t)$, $f_3 = 4k_4\hat{x}_2(t)$. Поскольку $\hat{x}_2(t) > 0$ (см. доказательство первого утверждения теоремы 1), то найдется $\delta > 0$, с которым $f_3(t) \geqslant \delta$, $t \in \mathbb{R}$. Поэтому выполнены все условия леммы 1 и, следовательно, система (4.15) не имеет периодических решений, кроме тривиального.

Литература

1. Петрова В.В., Тонков Е.Л. *Допустимость периодических процессов и теоремы существования периодических решений.* I // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 11. – С. 65–72.
2. Петрова В.В.,Тонков Е.Л. *О периодических решениях, возникающих в одной задаче химического катализа* // Вторые республ. научн. чтения по обыкнов. дифференц. уравнениям, посвящ. 75-летию Ю.С. Богданова. – Минск, 1995. – С. 66–67.
3. Тонков Е.Л. *Оптимальное управление периодическими движениями* // Матем. физика. – Киев, 1977. – Вып. 22. – С. 54–64.

Удмуртский университет

Поступила
27.04.1996