ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 1 (428)

УДК 517.94

В.А. КАКИЧЕВ, НГУЕН СУАН ТХАО

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ КОНСТРУИРОВАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СВЕРТОК

В данной работе предложен конструктивный метод определения наиболее общих интегральных сверток с весом, позволяющий построить новые типы сверток. Здесь нами не исследуются алгебраические свойства полученных сверток и не оговариваются ограничения на классы функций, при которых эти свертки имеют смысл.

1. Исходные примеры

Пусть дан биективный линейный оператор $K: X \to Y$, отображающий линейное пространство X на алгебру Y. Умножение в Y, обозначим его точкой, порождает в X операцию свертывания с весом $r \in Y$, определяемую равенством [1]

$$x_1 \overset{r}{*} x_2 = K^{-1}(r \cdot Kx_1 \cdot Kx_2), \quad x_1, x_2 \in Y, \tag{1.1}$$

и превращает X в сверточную алгебру. Из (1.1) вытекает факторизованное равенство

$$K(x_1 \overset{r}{*} x_2) = r \cdot Kx_1 \cdot Kx_2. \tag{1.2}$$

Приведем четыре примера из работ [2]–[4], которые содержат факторизованные равенства более общего характера, чем (1.2).

Пример 1. Для синус- и косинус-преобразований Фурье F_s и F_c [5] справедливо факторизационное равенство [2]

$$F_s(f * g) = F_c f \cdot F_s g, \tag{1.3}$$

где $(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} g(y)[f(|x-y|) + f(x+y)]dy$.

Пример 2. Пусть [6] $(K_i f)(x) = \int_0^{+\infty} k_i(\frac{x}{t}) f(t) \frac{dt}{t}$, $i = \overline{0,2}$, f^* — преобразование Меллина [5] функции f,

$$(f * g)(x) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\sigma_s} \int_{\sigma_t} \frac{k_1^*(s) k_2^*(t)}{k_0^*(s+t)} f^*(s) g^*(t) x^{-s-t} ds\, dt, \quad x > 0,$$

— свертка преобразования типа Меллина. Тогда имеет место равенство [3]

$$K_0(f * g) = K_1 f \cdot K_2 g. \tag{1.4}$$

Пример 3. Преобразованию типа Канторовича-Лебедева [7] соответствует равенство [4]

$$I_{i\tau}^{k}(f * g) = (I_{i\tau}^{k_1} f) \cdot (I_{i\tau}^{k_2} g), \quad \tau \in R. \tag{1.5}$$

Здесь

$$I_{i\tau}^{k_j} f = \int_0^{+\infty} I_{kj}(\tau, u) f(u) du, \quad I_{kj}(\tau, u) = \int_0^{+\infty} K_{i\tau}(x) k_j(ux) \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad j = \overline{1,3},$$

$k_3(x)$ и $k(x)$ — пара сопряженных ядер [8], $K_{i\tau}(x)$ — функция Макдональда [9], [15, [16],

$$(f*g)(x)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\Theta(x,y,z)f(y)g(z)dy\,dz,\quad x>0,$$
$$\Theta(x,y,z)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{uw}{v}+\frac{vw}{u}+\frac{uv}{w}\right)\right]\frac{k_3(xu)k_1(yv)k_2(zw)}{\sqrt{uvw}}du\,dv\,dw.$$

Пример 4. Для G-преобразования [10] справедливо равенство [11]

$$G_1(f*g)=(G_2f)\cdot(G_3g), \tag{1.6}$$

где

$$(G_jf)(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_s}\Theta_j(s)f^*(s)x^{-s}ds,\quad x>0,\ \ j=\overline{1,3},$$
$$\Theta_j(s)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{m_j}\Gamma(\beta_k^j+s)\prod\limits_{k=1}^{n_j}\Gamma(1-\alpha_k^j-s)}{\prod\limits_{k=n_j+1}^{p_j}\Gamma(\alpha_k^j+s)\prod\limits_{k=m_j+1}^{q_j}\Gamma(1-\beta_k^j-s)},$$
$$(f*g)(x)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\sigma_s}\int_{\sigma_t}\frac{\Theta_2(s)\Theta_3(t)}{\Theta_1(s+t)}f^*(s)g^*(t)x^{-s-t}ds\,dt,$$

$\Gamma(\,\cdot\,)$ — гамма-функция [9], [15], [16].

2. Основное определение

Пусть даны линейные интегральные операторы K_j, $j=1,2,3$, отображающие биективно линейные пространства $U_j(X_j)$ на алгебру $U(X)$:

$$F_j(x)=(K_jf_j)(x)=\int_{X_j}k_j(x,x_j)f_j(x_j)dx_j\in U(X)\quad \forall f_j\in U_j(X_j)$$

и

$$f_j(x_j)=(K_j^{-1}F_j)(x_j)=\int_X k_j^{-1}(x_j,x)F_j(x)dx\in U_j(X_j),$$

где $k_j(x,x_j)$ и $k_j^{-1}(x_j,x)$ — ядра операторов K_j и K_j^{-1}.

Пусть l, m, n — попарно различные числа из множества $\{1,2,3\}$, $r_l(x)$ — фиксированный элемент из $U(X)$.

Свертка типа 1. Если имеют место равенства

$$r_l(x)k_l^{-1}(x_l,x)k_m(x,x_m)=\sum_{i=1}^{p}c_ik_n^{-1}(\alpha_i(x_l,x_m),x),$$

то свертки типа 1, порожденные операторами K_m, K_n, K_l и весовыми функциями $r_l(x)\in U(X)$ и действующие из пространства $U_m(X_m)\times U_n(X_n)$ в $U_l(X_l)$, определим так:

$$\begin{gathered}(f_m\overset{r_l}{*}f_n)(x_l)=\sum_{i=1}^{p}c_i\int_{X_m}f_m(x_m)f_n(\alpha_i(x_l,x_m))dx_m,\\ m,n,l=1,2,3,\quad l\neq m,\ \ l\neq n,\ \ m\neq n.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Свертки типа 2. Пусть существуют интегралы

$$\Theta_{l,m,n}(x_l,x_m,x_n)=\int_X r_l(x)k_l^{-1}(x_l,x)k_m(x,x_m)k_n(x,x_n)dx,$$

тогда свертки, порожденные операторами K_m, K_n, K_l и весовыми функциями $r_l(x) \in U(X)$, определим равенствами

$$
\begin{gathered}
(f_m \overset{r_l}{*} f_n)(x_l) = \int_{X_m} \int_{X_n} \Theta_{l,m,n}(x_l, x_m, x_n) f_m(x_m) f_n(x_n) dx_m\, dx_n, \\
m, n, l = 1, 2, 3, \quad l \neq m, \quad l \neq n, \quad m \neq n.
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

Свертки (2.1) и (2.2) приводят к факторизованным соотношениям

$$
K_l(f_m \overset{r_l}{*} f_n)(x) = r_l(x) \cdot (K_m f_m)(x)(K_n f_n)(x),
$$

содержащим в себе как частные случаи (1.3) (свертки типа 1), так и (1.4)–(1.6) (свертки типа 2).

Таким образом, операторы K_j определяют, вообще говоря, три различные свертки.

Если $K_j = K$, $j = \overline{1,3}$, то приходим к свертке (1.1).

Если же, например, $K_1 = K_2 \neq K_3$, то возникают две свертки $f_1 \overset{r_1}{*} f_3$, $f_1 \overset{r_3}{*} f_3$, часто встречающиеся в интегральных уравнениях типа свертки и “экзотические” свертки $f_1 \overset{r_3}{*} g_1$, $f_3 \overset{r_1}{*} g_3$, действующие соответственно по схемам

$$
U_1(X_1) \times U_3(X_3) \to U_1(X_1), \quad U_1(X_1) \times U_3(X_3) \to U_3(X_3),
$$

и

$$
U_1(X_1) \times U_1(X_1) \to U_3(X_3), \quad U_3(X_3) \times U_3(X_3) \to U_1(X_1).
$$

Если операторы K_i, $i = \overline{1,3}$, симметричные ($K_i = K_i^{-1}$), то свертки $f_1 \overset{r_3}{*} f_2$, $f_2 \overset{r_1}{*} f_3$, $f_1 \overset{r_2}{*} f_3$ одновременно существуют или не существуют и имеют одно и то же ядро.

3. Новые примеры

Приведем девять новых примеров сверток, построенных по схеме п. 2. В примере 1 свертки типа 1, а в остальных — типа 2, причем в примере 1 ядра несимметричные, в примерах 2–4 ядра симметричные, а в примерах 7–9 совпадают два из трех операторов; в примерах 1–6 принципиально различных сверток 18, а ядер — только шесть.

Нетрудно увидеть, что приведенные примеры не исчерпывают всего множества сверток, которые могут быть получены аналогичным образом.

Пример 1. Пусть $K_1 = F$ — преобразование Фурье [5], $K_2 = F_c$, $K_3 = F_s$ — преобразования косинус- и синус-Фурье [5]. При $r_1 = \operatorname{sign} x$, $r_2 = r_3 = 1$, учитывая свойства преобразования Фурье [12] четной функции или нечетной и нечетность функции f_1, найдем, что

$$
(f_m \overset{r_1}{*} f_n)(x_l) = \int_0^{+\infty} f_m(u)[c_1 f_n(|cx_l - u|) + c_2 f_n(cx_l + u)] du,
$$

где

$$
\begin{gathered}
c_1 = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} (\operatorname{sign} x_l)^{\frac{(l-2)(l-3)}{2}} \operatorname{sign}(u - x_l)^{\frac{(l-1)(3-l)}{2}}, \\
c_2 = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} (-1)^l (\operatorname{sign} x_l)^{\frac{(l-2)(l-3)}{2}}, \quad c = (\operatorname{sign} x_l)^{\frac{(l-2)(l-3)}{2}}, \\
x_1 \in R, \quad x_2, x_3 \in R_+, \quad l, m, n = 1, 2, 3, \quad l \neq m, \quad l \neq n, \quad m \neq n.
\end{gathered}
$$

Пример 2. Пусть $K_1 = F_s$ и $K_3 = F_c$ — синус- и косинус-преобразования Фурье [5], $K_2 = J_\gamma$, $\operatorname{Re}\gamma > -\frac{1}{2}$ — преобразование Ханкеля [5]. При $r_2 = t^{-1}$, $r_1 = r_3 = 1$ из формулы 2.12.15.2 ([13], с.192) найдем, что

$$\Theta_2(x_1,x_2,x_3) = \int_0^{+\infty} \sin(x_1 t)\cos(x_3 t) J_\gamma(x_2 t)dt =$$

$$= \begin{cases} \frac{\cos\frac{\gamma\pi}{2}}{2} x_2^\gamma \left[\frac{x_1+x_3+\sqrt{(x_1+x_3)^2-x_2^2}}{\sqrt{(x_1+x_3)^2-x_2^2}} + \frac{x_1-x_3+\sqrt{(x_1-x_3)^2-x_2^2}}{\sqrt{(x_1-x_3)^2-x_2^2}}\right], & x_2 < x_1 - x_3; \\ \frac{\sin\left(\gamma\arcsin\frac{x_1-x_3}{2}\right)}{2\sqrt{x_2^2-(x_1-x_3)^2}} + \frac{x_2^\gamma\left[x_1+x_3+\sqrt{(x_1+x_3)^2-x_2^2}\right]}{2\sqrt{(x_1+x_3)^2-x_2^2}}, & |x_2 - x_1| < x_3; \\ \frac{\sin\left(\gamma\arcsin\frac{x_1+x_3}{2}\right)}{2\sqrt{x_2^2-(x_1+x_3)^2}} + \frac{\sin\left(\gamma\arcsin\frac{x_1-x_3}{2}\right)}{2\sqrt{x_2^2-(x_1-x_3)^2}}, & x_1 + x_3 < x_2. \end{cases}$$

Следовательно, свертки имеют вид

$$(f_m \overset{r_l}{*} g_n)(x_l) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \Theta_2(x_1,x_2,x_3) f_m(x_m) g_n(x_n) x_2^{|\sin\frac{l\pi}{2}|} dx_m\, dx_n, \quad m,n,l = 1,2,3.$$

Пример 3. Если $K_1 = J_\lambda$, $K_3 = J_\mu$, где $\mu \neq \lambda$, $\operatorname{Re}\lambda > -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2}$, а $K_2 = K_{i\tau}^{-1}$ — обратное преобразование Канторовича-Лебедева [7], то в силу формулы 2.16.37 из ([13], с.391) имеем

$$\Theta_3(x_1,x_2,x_3) = \int_0^{+\infty} J_\lambda(x_1 t) J_\mu(x_3 t) K_{ix_2}(t)dt = \frac{x_1^\lambda x_3^\mu}{2}\Gamma\begin{bmatrix} \frac{1+\lambda+\mu+ix_2}{2} & \frac{1+\lambda+\mu-ix_2}{2} \\ 1+\lambda & 1+\mu \end{bmatrix} A_{\mu,\lambda}(u) A_{\lambda,\mu}(v),$$

где

$$A_{\mu,\lambda}(u) = {}_2F_1\left(\frac{\lambda+\mu+ix_2}{2}, \frac{\lambda+\mu-ix_2}{2}, \mu+1, u\right),$$

$$u = \frac{1-x_1^2+x_3^2-\sqrt{(1-x_1^2+x_3^2)^2+4x_1^2}}{2}, \quad v = \frac{1+x_1^2-x_3^2-\sqrt{(1+x_1^2-x_3^2)^2+4x_3^2}}{2},$$

${}_2F_1(a;b;c;z)$ — гипергеометрическая функция [9], [15], [16]. Отсюда

$$(f_m \overset{r_l}{*} g_n)(x_l) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \Theta_3(x_1,x_2,x_3) x_m x_n f_m(x_m) g_n(x_n) (\operatorname{sh}\pi x_2)^{|\sin\frac{l\pi}{2}|} dx_m\, dx_n,$$

где $r_1 = r_3 = t^{-1}$, $r_2 = 1$.

Пример 4. Пусть (см. [8])

$$(K_2 f)(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} xy\sin(xy) f(y)dy$$

— преобразование с функцией интегрального синуса [9], [15], [16] в ядре, тогда [8]

$$(K_2^{-1} f)(y) = \int_0^{+\infty}\left[\frac{\sin(xy)}{xy} + \cos(xy)\right]\bar{f}(x)dx.$$

Если $K_1 = F_c$, а $K_3 = L$ — преобразование Лапласа [5], то из формулы 2.6.5.2 в ([13], с.87) будем иметь

$$\Theta_4(x_1,x_2,x_3) = \int_0^{+\infty} e^{-x_3 t}\cos(x_1 t)\sin(x_2 t)dt =$$

$$-\frac{1}{2(x_1+x_3)}\operatorname{arctg}\frac{x_3+ix_1}{x_2} - \frac{1}{2(x_3-ix_1)}\operatorname{arctg}\frac{x_3-ix_1}{x_2}, \quad x_1, x_2, \operatorname{Re} x_3 > 0.$$

Следовательно,

$$(f_m \overset{\bar r_l}{*} g_n)(x_l) = -\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{3/2} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \Theta_4(x_1,x_2,x_3)x_2 f_m(x_m) g_n(x_n) dx_m\, dx_n,$$

где $\bar r_l = t^{-1}$, $l = \overline{1,3}$.

Пример 5. Пусть $K_1 = L$, $K_2 = \{{F_s \atop F_c}\}$, $K_3 = J_\gamma$, $\operatorname{Re}\gamma > -\frac{1}{2}$. Тогда, используя формулу 2.12.25.3 из ([13], с.204), получим

$$\Theta_5(x_1,x_2,x_3) = \int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-x_1 t} \begin{Bmatrix}\sin(x_2 t)\\ \cos(x_2 t)\end{Bmatrix} J_\gamma(x_3 t) dt = \frac{(2x_3)^\gamma}{\gamma}(c + \sqrt{c^2 - 2x_3^2})^{-\gamma} \begin{Bmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{Bmatrix},$$

$$\alpha = \gamma \arcsin\frac{2x_2}{c}, \quad c = \sqrt{x_1^2 + (x_2+x_3)^2} + \sqrt{x_1^2 + (x_2 - x_3)^2}, \quad \operatorname{Re}\gamma > \begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{Bmatrix}.$$

Отсюда при $r_2 = t^{-1}$, $r_3 = t^{-2}$ найдем, что

$$(f_1 \overset{r_l}{*} g_n)(x_l) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \Theta_5(x_1,x_2,x_3) x_3^{3-l} f_1(x_1) g_n dx_1\, dx_n, \quad n,l = 2,3,$$

$$f_2 \overset{\bar r_1}{*} g_3)(x_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \Theta_5(x_1,x_2,x_3) x_3 f_2(x_2) g_3(x_3) dx_2\, dx_3,$$

где $\bar r_1 = t^{-1}$.

Пример 6. При $K_1 = L$, $K_2 = J_\mu$, $K_3 = J_\gamma$, $\mu \neq \gamma$, $\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}\gamma > -\frac{1}{2}$ в силу формулы 2.12.38.4 из ([13], с.222)

$$\Theta_6(x_1,x_2,x_3) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-x_1 t} J_\mu(x_2 t) J_\gamma(x_3 t) dt =$$

$$\frac{x_2^\mu x_3^\gamma}{2^{\mu+\gamma} x_1^{\alpha+\mu+\gamma}} \Gamma\begin{bmatrix}\alpha+\mu+\gamma\\ \mu+1 \quad \gamma+1\end{bmatrix} F_4\Big(\frac{\alpha+\mu+\gamma}{2}, \frac{\alpha+\mu+\gamma+1}{2};\ \mu+1;\ \gamma+1;\ -\frac{x_1^2}{x_3^2},\ -\frac{x_2^2}{x_3^2}\Big),$$

$$\operatorname{Re} x_1 > 0, \quad \operatorname{Re}(\alpha+\mu+\gamma) > 0,$$

$F_4(a,b,c,d,x,y)$ — гипергеометрическая функция [9], [15], [16]. Поэтому

$$(f_1 \overset{r_l}{*} g_n)(x_l) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \Theta_6(x_1,x_2,x_3) x_n f_1(x_1) g_n(x_n) dx_1\, dx_n, \quad n,l = 2,3,$$

$$\bar r_1 = t^{\alpha-1}, \quad r_l = t^{\alpha-2}, \quad n \neq l, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0,$$

$$(f_2 \overset{\bar r_1}{*} g_3)(x_1) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \Theta_6(x_1,x_2,x_3) x_2 x_3 f_2(x_2) g_3(x_3) dx_2\, dx_3.$$

Пример 7. Пусть теперь $K_1 = K_2 = J_\gamma$, $\operatorname{Re}\gamma > -\frac{1}{2}$, $K_3 = L$, тогда, используя формулу 2.12.38.1 из ([13], с.218), ядро запишем так:

$$\Theta_7(x_1,x_2,x_3) = \int_0^{+\infty} e^{-x_3 t} J_\gamma(x_1 t) J_\gamma(x_2 t) dt = \frac{1}{\pi\sqrt{x_1 x_2}} Q_{\gamma-1/2}\Big(\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2x_1 x_2}\Big),$$

где $\operatorname{Re} x_3 > 0$, $Q_\gamma(z)$ — функция Лежандра 2-го рода [9], [15], [16]. Отсюда следует, что при $r_2 = t^{-1}$, $\bar r_3 = 1$

$$(f_1 \overset{r_2}{*} g_3)(x_2) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \Theta_7(x_1,x_2,x_3) x_1 f_1(x_1) g_3(x_3) dx_1\, dx_3,$$

$$(f_1 \overset{\bar r_3}{*} g_2)(x_3) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \Theta_7(x_1,x_2,x_3) x_1 x_2 f_1(x_1) g_2(x_2) dx_1\, dx_2.$$

Пример 8. При $K_1 = J_\gamma$, $\operatorname{Re}\gamma > -\frac{1}{2}$, $K_2 = K_3 = K_{i\tau}^{-1}$, учитывая формулу 2.16.43.1 из ([13], с.399), определим ядро

$$\Theta_8(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} J_\gamma(x_1 t) K_{ix_2}(t) K_{ix_3}(t) dt = \frac{2^{\alpha-3} x_1^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} [A(ix_2) + A(-ix_2)],$$

в котором

$$A(\zeta) = \Gamma[-\zeta, u, v] F_4(u, v, \gamma+1, 1+\zeta, -x_1^2, 1), \quad \zeta = ix_2, -ix_2,$$
$$u = \frac{\alpha + \gamma + i(x_2 - x_3)}{2}, \quad v = \frac{\alpha + \gamma + i(x_2 + x_3)}{2}, \quad \operatorname{Re}(\alpha+\gamma) > 0.$$

Отсюда

$$(f_m \overset{r_l}{*} g_3)(x_l) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \Theta_8(x_1, x_2, x_3) x_m x_3 f_m(x_m) g_3(x_3) \operatorname{sh}(\pi x_3) (\operatorname{sh} \pi x_m)^{\sin \frac{l\pi}{2}} dx_m \, dx_3,$$

где $r_1 = t^{\alpha-2}$, $r_2 = t^{\alpha-1}$, $m, l = 1, 2$.

Пример 9. Положим $K_1 = K_2 = J_\mu$, $K_3 = J_\gamma$, $\mu \neq \gamma$, $\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}\gamma > -\frac{1}{2}$, воспользуемся формулой 2.12.42.11 из ([13], с.229). В этом случае

$$\Theta_9(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{+\infty} x^{1-\gamma} J_\gamma(x_3 t) J_\mu(x_1 t) J_\mu(x_2 t) dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 < x_3 < |x_1 - x_2|; \\ \frac{(x_1 x_2)^{\gamma-1}}{\sqrt{2\pi}\, x_3^\gamma} \sin^{\gamma-1/2} \nu P_{\mu-1/2}^{1/2-\gamma}(\cos v), & |x_1 - x_2| < x_3 < x_1 + x_2, \\ & \quad 2x_1 x_2 \cos v = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2; \\ -\sqrt{\frac{2}{\pi^3}} \frac{(x_1 x_2)^{\gamma-1}}{x_3^\gamma} \operatorname{sh}^{\gamma-1/2} u \sin(\pi(\mu-\gamma)) e^{\frac{i\pi}{2}(2\gamma-1)} Q_{\mu-1/2}^{1/2-\gamma}(\operatorname{ch} u), & x_3 > x_1 + x_2, \\ & \quad 2x_1 x_2 \operatorname{ch} u = x_3^2 - x_1^2 - x_2^2, \end{cases}$$

где $P_\gamma^\mu(x)$ — присоединенная функция Лежандра 1-го рода [9], [15], [16] и

$$(f_1 \overset{r_i}{*} g_3)(x_i) = x_i \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \Theta_9(x_1, x_2, x_3) x_1 x_3 f_1(x_1) g_3(x_3) dx_1 \, dx_3, \quad r_i = t^{-1-\gamma}, \quad i = 1, 3.$$

4. Приложение к интегральным уравнениям

Пусть φ_j — искомые функции; f_j, g_j, h_j, ζ_j — известные функции, принадлежащие $U_j(X_j)$; r_{ij} — весовые функции; λ_{ij} — комплексные постоянные числа.

Ниже рассматривается следующая общая схема интегральных уравнений со свертками:

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \lambda_{12}(\varphi_2 \overset{r_{12}}{*} f_3) + \lambda_{13}(f_2 \overset{r_{13}}{*} \varphi_3) &= \zeta_1, \\ \lambda_{21}(\varphi_1 \overset{r_{21}}{*} g_3) + \varphi_2 + \lambda_{23}(g_1 \overset{r_{23}}{*} \varphi_3) &= \zeta_2, \\ \lambda_{31}(\varphi_1 \overset{r_{31}}{*} h_2) + \lambda_{32}(h_1 \overset{r_{32}}{*} \varphi_2) + \varphi_3 &= \zeta_3. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Теорема 1. *Пусть существуют* $P_{ij} \in \begin{cases} U_i(X_i), & j = i; \\ U_t(X_t), & j \neq i, \ t \neq i, \ t \neq j \end{cases}$, *такие, что*

$$\frac{\Delta_{ij}}{r_{ij}\Delta} = \begin{cases} k_i P_{ii}, & j = i; \\ K_t P_{ti}, & j \neq i, \ t \neq i, \ t \neq j, \end{cases} \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}, \quad t = \overline{1,3},$$

где $\Delta = \det(a_{ij}) \neq 0$, $a_{ij} = \lambda_{ij} r_{ij} K_t q_{it}$, $i \neq t$, $j \neq t$, $\lambda_{ii} = 1$, $i = \overline{1,3}$, $q_{1t} = f_t$, $q_{2t} = g_t$, $q_{3t} = h_t$, Δ_{ij} *— алгебраическое дополнение к элементу* a_{ij} *определителя* Δ, *тогда система* (4.1) *имеет решение* $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, *в котором*

$$\varphi_1 = \zeta_1 \overset{r_{11}}{*} p_{11} - \zeta_2 \overset{r_{12}}{*} p_{32} + \zeta_3 \overset{r_{13}}{*} p_{23},$$
$$\varphi_2 = -\zeta_1 \overset{r_{21}}{*} p_{31} + \zeta_2 \overset{r_{22}}{*} p_{22} - \zeta_3 \overset{r_{23}}{*} p_{13},$$
$$\varphi_3 = \zeta_1 \overset{r_{31}}{*} p_{21} - \zeta_2 \overset{r_{32}}{*} p_{12} + \zeta_3 \overset{r_{33}}{*} p_{33}.$$

Следствие 1. Система двух уравнений

$$\varphi_1 + \lambda_1(\varphi_2 \overset{r_1}{*} f_3) = \zeta_1, \quad \lambda_2(\varphi_1 \overset{r_2}{*} g_3) + \varphi_2 = \zeta_2,$$

при существовании $q_1 \in U_1(X_1)$, $p_2 \in U_2(X_2)$, $p_3, q_3 \in U_3(X_3)$, r, s, таких, что

$$K_3 f_3 = \Delta \cdot (K_3 q_3), \quad K_3 g_3 = \Delta \cdot (K_3 p_3), \quad r\Delta \cdot (K_1 q_1) = 1, \quad s\Delta \cdot (K_2 p_2) = 1,$$
$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 r_1 (K_3 f_3) \\ \lambda_2 r_2 (K_3 q_3) & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

имеет решение

$$\varphi_1 = \zeta_1 \overset{r}{*} q_1 - \lambda_1 \zeta_2 \overset{r_1}{*} q_3, \quad \varphi_2 = \zeta_2 \overset{s}{*} p_2 - \lambda_2 \zeta_1 \overset{r_2}{*} p_3.$$

Следствие 2. Пусть существует функция $q_2 \in U_2(X_2)$ такая, что $-\frac{K_2 f_2}{1 + r_1(K_2 f_2)} = K_2 q_2$, тогда интегральное уравнение $\varphi_1 + \lambda(\varphi_1 \overset{r_1}{*} f_2) = h_1$ имеет решение $\varphi_1 = h_1 + \lambda(h_1 \overset{r_1}{*} q_2)$.

Следствие 3. Если существуют функции r_1 и $q_2 \in U_2(X_2)$ такие, что $\frac{1}{r_3(K_2 f_2)} = r_1(K_2 q_2)$, то интегральное уравнение $\lambda(\varphi_1 \overset{r_3}{*} f_2) = h_3$ имеет решение $\varphi_1 = \frac{1}{\lambda}(q_2 \overset{r_1}{*} h_3)$, $\lambda \neq 0$.

Перед приведением других примеров понадобится следующая теорема, относящаяся к сверткам из примера 1.

Теорема 2. *Пусть* $f_i \in L_1(X_i)$, *где* $X_1 = R$, $X_2 = X_3 = R_+$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. $f_2 \overset{r_1}{*} f_3$ *существует и принадлежит* $L_1(R)$, *причем*

$$F(f_2 \overset{r_1}{*} f_3)(x) = \operatorname{sign} x (F_c f_2)(|x|)(F_s f_3)(|x|).$$

2. *Если* f_1 *нечетная, то свертки* $f_1 \overset{r_2}{*} f_3$, $f_1 \overset{r_3}{*} f_2$ *существуют и принадлежат* $L_1(R_+)$, *причем имеют место равенства*

$$F_c(f_1 \overset{r_2}{*} f_3)(x) = (F_+ f)(x)(F_s f_3)(x), \quad F_s(f_1 \overset{r_r}{*} f_2)(x) = (F_+ f)(x)(F_c f_2)(x),$$

где $(F_+ f)(x)$ *— сужение преобразования Фурье на полуось* $x \geq 0$.

Доказательство. Из примера 1 имеем

$$(f_2 \overset{r_1}{*} f_3)(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sign} x \int_0^{+\infty} f_2(u)[f_3(||x| - u|) - f_3(||x| + u|)]du.$$

Выполнив замену переменных $u = s$, $u - |x| = t (u + |x| = t)$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|(f_2 \overset{r_1}{*} f_3)(x)\right| |dx| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_2(u)| \left|f_3(||x| - u|) - f_3(|x| + u)\right| |dx| du \leq$$
$$\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} |f_2(s)| ds \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f_3(|t|)\right| |dt| = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} |f_2(s)| ds \int_0^{+\infty} |f_3(t)| dt < +\infty,$$

т.е. $f_2 \overset{r_1}{*} f_3 \in L_1(R)$. С другой стороны имеем

$$F(f_2 \overset{r_1}{*} f_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sign} t \int_0^{+\infty} f_2(u) |f_3(||t|-u|) - f_3(|t|+u)| du\, dt =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iru} \operatorname{sign} u (F_c f_2)(|u|)(F_s f_3)(|u|) du = \operatorname{sign} x (F_c f_2)(|x|)(F_s f_3)(|x|).$$

Последнее равенство следует из того, что функция $\operatorname{sign} x (F_c f_2)(|x|) \cdot (F_s f_3)(|x|)$ удовлетворяет условиям Дирихле в интервале $(+\infty, -\infty)$ и непрерывна в этом интервале. Первое утверждение полностью доказано. Аналогично может быть получено и второе утверждение. □

Следствие 4. При условии теоремы 2 свертка (1.4) существует и принадлежит $L_1(R_+)$, и имеет место равенство (1.3).

Пример 1. На основании формул 3.548.3 и 3.522.2 из ([14], сс.148, 190 и теоремы 1.2) система трех уравнений

$$\varphi_1(y) + \lambda_{12} \int_0^{+\infty} A_1\Big(\frac{1}{u}\Big)(y)\varphi_2(u) du + \lambda_{13} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{tg} u}{u} A_1(\varphi_3(u))(y) du = \zeta_1(y),$$
$$\lambda_{21} \int_0^{+\infty} A_2\Big(\frac{1}{u}\Big)(x)\varphi_1(u) du + \varphi_2 + \lambda_{23} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} A_2(\varphi_3(u))(x) du = \zeta_2(x),$$
$$\lambda_{31} \int_0^{+\infty} A_3\Big(\frac{\operatorname{tg} u}{u}\Big)(x)\varphi_1(u) du + \lambda_{32} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} A_3(\varphi_2(u))(x) du + \varphi_3(x) = \zeta_3(x),$$

где ζ_1, φ_1 нечетные; $\zeta_i \in L_1(X_i)$, $i = \overline{1,3}$, удовлетворяют условиям Дирихле и непрерывны,

$$A_j(f(u))(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sign} x [f(||x|-u|) - f(|x|+u)], & j = 1; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\operatorname{sign}(u-x) f(|x-u|) + f(x+u)], & j = 2; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(|x-u|) - f(x+u)], & j = 3, \end{cases}$$

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{\pi}{2}}\lambda_{12} \operatorname{sign} y & \sqrt{\frac{\pi}{2}}\lambda_{13} \operatorname{sign} y \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\lambda_{21} & 1 & i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\lambda_{23} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\lambda_{31} & i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\lambda_{32} & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

имеет решение

$$\varphi_1(y) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}\zeta_1(y) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sign} y \frac{\Delta_{21}}{\Delta}\Big(\zeta_2 \overset{r_1}{*} \tfrac{1}{u}\Big)(y) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sign} y \frac{\Delta_{31}}{\Delta}\Big(\tfrac{\operatorname{tg} u}{u} \overset{r_1}{*} \zeta_3\Big)(y),$$
$$\varphi_2(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Delta_{12}}{\Delta}\Big(\zeta_1 \overset{r_2}{*} \tfrac{1}{u}\Big)(x) + \frac{\Delta_{22}}{\Delta}\zeta_2(x) + i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Delta_{32}}{\Delta}\Big(\tfrac{1}{u} \overset{r_2}{*} \zeta_3\Big)(x),$$
$$\varphi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Delta_{13}}{\Delta}\Big(\zeta_1 \overset{r_3}{*} \tfrac{\operatorname{tg} u}{u}\Big)(x) + i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Delta_{23}}{\Delta}\Big(\tfrac{1}{u} \overset{r_3}{*} \zeta_2\Big)(x) + \frac{\Delta_{33}}{\Delta}\zeta_3(x),$$
$$x > 0, \quad y \in R.$$

Отсюда и из теоремы 2 вытекает, что $\varphi_i \in L_1(X_i)$, $i = \overline{1,3}$.

Пример 2. Используя формулу 3.522.2 из ([14], с.190) и следствие 1, найдем, что система двух уравнений

$$\varphi_2(x) + i\lambda_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{u}{u^2 - x^2} \varphi_3(u) du = \zeta_2(x),$$
$$\lambda_3 \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} [\varphi_2(|x-u|) - \varphi_2(x+u)] du + \varphi_3(x) = \zeta_3(x), \quad x > 0,$$

при $1+\frac{\pi}{2}\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, где $\zeta_2(x), \zeta_3(x) \in L_1(R_+)$, непрерывные и удовлетворяют условиям Дирихле, разрешима и

$$\varphi_2(x) = \frac{2}{2+\lambda_2\lambda_3\pi}\left[\zeta_2(x) + i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda_2\Big(\tfrac{1}{u} \overset{r_2}{*} \zeta_3\Big)(x)\right],$$

$$\varphi_3(x) = \frac{2}{2+\lambda_2\lambda_3\pi}\left[\zeta_3(x) + i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda_3\Big(\tfrac{1}{u} \overset{r_3}{*} \zeta_2\Big)(x)\right],$$

причем эти решения также принадлежат $L_1(R_+)$.

Пример 3. В силу формулы 3.548.3 из ([14], с.198) и следствий 4 и 2 функция $\varphi(x) = \frac{1}{2}\zeta(x)$ дает решение уравнения

$$\varphi(x) + \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\varphi(u)\left[\frac{\operatorname{tg}(x-u)}{x-u} - \frac{\operatorname{tg}(x+u)}{x+u}\right]du = \zeta(x), \quad x>0,$$

функция $\zeta(x) \in L_1(R_+)$ непрерывная и удовлетворяет условиям Дирихле.

Пример 4. Применяя формулу 3.522.2 из ([14], с.190) и следствие 3, убедимся, что интегральное уравнение типа свертки

$$i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\varphi(u)\frac{u}{u^2-x^2}du = \zeta(x), \quad x>0,$$

где $\zeta(x) \in L_1(R_+)$, имеет решение в $L_1(R_+)$, представимое в виде

$$\varphi(x) = -\frac{2}{\pi}\Big(\zeta \overset{r_3}{*} \tfrac{1}{u}\Big)(x).$$

Литература

1. Какичев В.А. *О свертках для интегральных преобразований* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. – 1967. – № 2. – С.48–57.
2. Churchill R.V. *Fourier series and boundary value problems.* – New York, 1941 – 58 p.
3. Якубович С.Б. *Об одном конструктивном методе построения интегральных сверток* // ДАН БССР. – 1990. – Т.34. – № 7. – С.588–591.
4. Якубович С.Б., Мошинский О.И. *Интегральные уравнения и свертки, связанные с преобразованиями типа Конторовича-Лебедева* // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т.29. – № 7. – С.1272–1284.
5. Снеддон И. *Преобразования Фурье.* – М.: Ин. лит., 1955. – 668 с.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Вычисление интегралов и преобразование Меллина* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Матем. анализ. – 1989. – Т.27. – С.3–146.
7. Диткин В.А., Прудников А.П. *Интегральные преобразования и операционное исчисление.* – М.: Физматгиз, 1961. – 523 с.
8. Ву Ким Туан. *К теории обобщенных интегральных преобразований в некотором пространстве функций* // ДАН СССР. – 1986. – Т.286. – № 3. – С.521–524.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т.1. – М.: Наука, 1965. – 294 с.
10. Ву Ким Туан, Маричев О.И., Якубович С.Б. *Композиционная структура интегральных преобразований* // ДАН СССР. – 1986. – Т.286. – № 3. – С.786–790.
11. Saigo M, Yakubovich S.B. *On the theory of convolution integrals for G-transforms.* – Fukuoka: Univ. Sci. Reports. – 1991. – V.21. – № 2. – P.181–193.
12. Bateman H. *Tables of integral transforms.* V.1. – 1954. – 391 p.

13. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Специальные функции.* – М.: Наука, 1983. – 750 с.
14. Рыжик И.М., Градштейн И.С. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* – М.–Л.: Физматгиз, 1951. – 464 с.
15. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т.2. – М.: Наука, 1966. – 295 с.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т.3. – М.: Наука, 1967. – 299 с.

Новгородский государственный университет

Поступила
17.07.1995