ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 7 (446)

УДК 517.929

Д.С. КАЩЕНКО

ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ В УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка являются базовыми при моделировании многих прикладных задач. Важное место среди них занимают уравнения с нелинейной запаздывающей обратной связью [1]–[6]. В работе асимптотическими методами изучается динамика таких уравнений, которые содержат малый параметр, характеризующий потери (трение, добротность фильтра). Показано, что одновременно могут существовать локальные и нелокальные циклы, найдена асимптотика и исследована устойчивость. Приведен сравнительный анализ динамических свойств уравнений с различными нелинейностями. Все динамические эффекты обусловлены наличием запаздывания.

Рассматривается вопрос о динамике решений уравнений

$$\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + \omega^2 x = F(x(t-T)) \tag{0.1}$$

и

$$\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + \omega^2 x = \frac{d}{dt}F(x(t-T)). \tag{0.2}$$

Здесь $T > 0$, а положительный параметр ε, характеризующий затухание линейного осциллятора (потери), предполагается достаточно малым

$$0 < \varepsilon \ll 1. \tag{0.3}$$

Основное предположение о нелинейной функции $F(x)$ заключается в том, что она имеет "простое" поведение на бесконечности, т. е. для некоторого $p > 0$

$$F(x) = \begin{cases} f_1 & \text{при } x \le -p, \\ f_0(x) & \text{при } |x| < p, \\ f_2 & \text{при } x \ge p. \end{cases}$$

Кроме этого, удобно считать, что функция $F(x)$ достаточно гладкая. В качестве фазового пространства фиксируем $C_{[-T,0]} \times R^1$.

Поставим задачу асимптотического при условии (0.3) изучения динамических свойств решений уравнений (0.1) и (0.2). В § 1 будет приведен локальный — в окрестности состояний равновесия — анализ поведения решений рассматриваемых уравнений, а в § § 2, 3 будут изучены решения, амплитуды которых неограниченно растут при $\varepsilon \to 0$.

1. Локальный анализ решений

Сначала отметим, что количество параметров в уравнениях (0.1) и (0.2) можно уменьшить. Удобно сделать замену времени $\omega t = \tau$ и переобозначить $\tau \to t$, $\varepsilon\omega^{-1} \to \varepsilon$, $\omega^{-1}T \to T$ и $\omega^{-2}F \to F$ в уравнении (0.1) и $\omega^{-1}F \to F$ в уравнении (0.2). В итоге получим соответственно уравнения

$$\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + x = F(x(t-T)) \tag{1.1}$$

и

$$\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + x = \frac{d}{dt}F(x(t-T)). \qquad (1.2)$$

Пусть x_0 — состояние равновесия уравнения (1.1) или (1.2) (в последнем случае необходимо $x_0 = 0$). В этом параграфе исследуем вопрос о поведении решений в достаточно малой, но не зависящей от ε окрестности x_0 (тем самым, информация о поведении функции $F(x)$ вне окрестности x_0 не используется). Напомним, что вопрос об устойчивости состояния равновесия x_0 связан с расположением корней характеристических квазиполиномов при $\varepsilon = 0$

$$\lambda^2 + 1 = a\exp(-\lambda T) \qquad (1.3)$$

и

$$\lambda^2 + 1 = \lambda a\exp(-\lambda T) \qquad (1.4)$$

для уравнений (1.1) и (1.2) соответственно, где $a = F'(x_0)$. В тех случаях, когда все корни имеют отрицательные вещественные части, состояние равновесия x_0 асимптотически устойчиво, и все решения с начальными условиями из некоторой (малой, но не зависящей от ε) его окрестности стремятся к x_0 при $t \to \infty$. Если же найдется корень с положительной вещественной частью, то задача изучения динамики при условии (0.3) становится нелокальной: в сколь угодно малой окрестности x_0 найдется решение, покидающее некоторую фиксированную окрестность x_0.

Ниже будут изучены ситуации, когда характеристический квазиполином имеет корни с нулевой вещественной частью и не имеет корней с положительной.

1. *Линейный анализ.* Остановимся сначала на изучении квазиполинома (1.3). При $a = 0$ имеем пару чисто мнимых корней $\lambda_\pm = \pm i$, причем

$$\frac{d}{da}\operatorname{Re}\lambda_\pm(a)\Big|_{a=0} = -\sin T \quad (\lambda_\pm(0) = \lambda_\pm).$$

Далее отметим, что если некоторый корень λ_k уравнения (1.3) при значении параметра $a = a_k$ принимает чисто мнимое значение $i\sigma_k$ ($\sigma_k \geq 0$), то из (1.3) получим

$$\sigma_k = \pi k T^{-1}, \quad (-1)^k a_k = -(\pi T^{-1})^2 k^2 + 1 \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Важно иметь в виду, что при увеличении $|a|$, начиная от значения $a = a_k \neq 0$, корень $\lambda_k = \lambda_k(a)$ переходит из левой комплексной полуплоскости в правую, поскольку

$$\frac{d}{da}\operatorname{Re}\lambda_k(a)\Big|_{a=a_k} = a_k T\left[4\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 k^2 + a_k^2 T^2\right]^{-1}.$$

Отсюда вытекает важный критерий устойчивости x_0 (при достаточно малых ε) в терминах коэффициентов a и T.

Пусть

$$2\pi m < T < (2m+1)\pi.$$

Тогда при условии

$$0 < a < \min(a_{2m}, a_{2m+1}) \quad (a_{2m} > 0, \quad a_{2m+1} > 0) \qquad (1.5)$$

все корни квазиполинома (1.3) имеют отрицательные вещественные части, а при условии $a < 0$ или $a > \min(a_{2m}, a_{2m+1})$ найдется корень с положительной вещественной частью. Для случая, когда

$$(2m-1)\pi < T < 2m\pi, \qquad (1.6)$$

аналогичные условиям (1.5) неравенства имеют вид

$$\max(a_{2m-1}, a_{2m}) < a < 0 \quad (a_{2m-1}, \quad a_{2m} < 0). \tag{1.7}$$

Рассмотрим затем уравнение (1.4). Пусть, как и выше, $\lambda_\pm(a)$ — такой его (гладкий по a) корень, что $\lambda_\pm(0) = \pm i$. Тогда

$$\frac{d \operatorname{Re} \lambda_\pm(a)}{da}\bigg|_{a=0} = \frac{1}{2}\cos T. \tag{1.8}$$

Для значений σ_k ($\lambda_k = i\sigma_k$) и a_k получаем равенства

$$\sigma_k = \pi T^{-1}(k + \tfrac{1}{2}), \quad (-1)^k a_k = (1 - \sigma_k^2)\sigma_k^{-1} \quad (k = 0, 1, \dots). \tag{1.9}$$

Осталось отметить, что

$$\frac{d}{da}\operatorname{Re} \lambda_k(a)\bigg|_{a=a_k} = \sigma_k^2(1-\sigma_k^2)T[a(\sigma_k^2 T^2(1-\sigma_k^2)^2 + (1+\sigma_k^2)^2)]^{-1}. \tag{1.10}$$

Из формул (1.8)–(1.10) получаем следующий критерий устойчивости состояния равновесия $x_0 = 0$. Пусть

$$0 < T < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда при условии

$$a_0 < a < 0 \tag{1.11}$$

все корни квазиполинома (1.4) имеют отрицательные вещественные части, а при $a > 0$ или $a < a_0$ найдется корень с положительной вещественной частью. В случае, когда

$$\frac{(2m-1)\pi}{2} < T < \frac{(2m+1)\pi}{2}, \tag{1.12}$$

аналогичные (1.11) неравенства имеют вид

$$\begin{aligned} &\max(a_{m-1}, a_m) < a < 0 \ \text{ при } m \text{ четных;} \\ &0 < a < \min(a_{m-1}, a_m) \ \text{ при } m \text{ нечетных.} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Интересно отметить, что при соответствующих значениях a при увеличении времени запаздывания T может происходить чередование устойчивости и неустойчивости состояния равновесия x_0 в уравнениях (1.1) и (1.2). Однако для каждого значения параметра a найдутся такие $T = T_1(a)$ и $T_2(a)$, что при $T > T_1(a)$ ($T > T_2(a)$) состояние равновесия x_0 уравнения (1.1) ((1.2)) неустойчиво.

Заметим, наконец, что при "крайних" значениях параметра a в неравенствах (1.5), (1.7), (1.11) и (1.12) соответствующий характеристический квазиполином имеет одну или две пары чисто мнимых корней. Наличие двух пар обусловлено совпадением фигурирующих в указанных неравенствах чисел a_j, a_{j+1} (из которых берется минимум или максимум).

2. *Нелинейный анализ. Общие сведения.* Пусть при некоторых $a = a_0$ и $T = T_0$ реализуется критический случай в задаче об устойчивости состояния равновесия x_0, т. е. характеристический квазиполином имеет корни с нулевой вещественной частью и не имеет — с положительной. Положим

$$a = a_0 + \varepsilon a_1, \quad T = T_0 + \varepsilon T_1.$$

Известно (напр., [1], [7], [8]), что при указанных условиях в некоторой (не зависящей от ε) окрестности x_0 существует локальное инвариантное устойчивое интегральное многообразие V. К нему при $t \to \infty$ стремятся все решения, лежащие в этой окрестности. Таким образом, динамика решений из той же самой окрестности определяется лишь поведением решений, принадлежащих многообразию V. Размерность m многообразия V равна количеству корней характеристического квазиполинома (при $\varepsilon = 0$, $a = a_0$, $T = T_0$) с нулевой вещественной частью. Для обоих уравнений m может принимать значения 1, 2 и 4. На многообразии V рассматриваемое дифференциально-разностное уравнение можно записать в виде специальной системы m обыкновенных дифференциальных уравнений (см., напр., [9]). Приведем соответствующие уравнения, предполагая, что выполнены некоторые условия типа общности положения.

При $m = 1$ это уравнение имеет вид

$$\dot{\xi} = \varepsilon\alpha\xi + \beta\xi^2 + O(|\xi|^3 + \varepsilon\xi^2 + \varepsilon^2|\xi|), \tag{1.14}$$

а связь между решением $x(t)$ уравнения (1.1) и решением $\xi(t)$ уравнения (1.14) задается равенством

$$x(t) = x_0 + \xi(t) + O(\xi^2(t)). \tag{1.15}$$

При $m = 2$ имеем уравнение относительно комплексной переменной ξ

$$\dot{\xi} = \varepsilon\alpha\xi + \beta\xi|\xi|^2 + O(\varepsilon^2|\xi| + \varepsilon|\xi|^2 + |\xi|^5), \tag{1.16}$$

причем

$$x(t) = x_0 + \xi(t)\exp(i\sigma t) + \overline{\xi}\exp(-i\sigma t) + O(\varepsilon + |\xi|^2). \tag{1.17}$$

При $m = 4$ имеются две пары корней $\pm i\sigma_1$ и $\pm i\sigma_2$ характеристического квазиполинома (при $\varepsilon = 0$). Вид соответствующей 4-мерной системы уравнений существенно зависит от наличия "главных" резонансов, когда выполнено одно из равенств $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1;\ 1/2;\ 1/3;\ 2;\ 3$. Предположим сначала, что ни одно из этих равенств места не имеет. Тогда нужная нам 4-мерная система записывается в виде двух (комплексных) уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varepsilon\alpha_1\xi + \xi[\beta_1|\xi|^2 + \gamma_1|\eta|^2] + \cdots, \\ \dot{\eta} &= \varepsilon\alpha_2\eta + \eta[\gamma_2|\xi|^2 + \beta_2|\eta|^2] + \cdots, \end{aligned} \tag{1.18}$$

где многоточие означает слагаемые более высокого порядка малости по сравнению с приведенными.

Для уравнения (1.1) и для уравнения (1.2) может реализоваться лишь резонанс 1:2 ($\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{1}{2}$). В этом случае вместо (1.16) имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varepsilon\alpha_1\xi + \sigma_1\overline{\xi}\eta + \xi[\beta_1|\xi|^2 + \gamma_1|\eta|^2] + \cdots, \\ \dot{\eta} &= \varepsilon\alpha_2\eta + \sigma_2\xi^2 + \eta[\gamma_2|\xi|^2 + \beta_2|\eta|^2] + \cdots \end{aligned} \tag{1.19}$$

Функция $x(t)$ связана с $\xi(t)$ и $\eta(t)$ равенством

$$x = x_0 + \xi\exp(i\sigma_1 t) + \overline{\xi}\exp(-i\sigma_1 t) + \eta\exp(i\sigma_2 t) + \overline{\eta}\exp(-i\sigma_2 t) + \cdots \tag{1.20}$$

Таким образом, задача изучения локальной динамики исходного уравнения свелась к задаче вычисления коэффициентов уравнений (1.14), (1.16), (1.18) или (1.19) и применению известных результатов о динамике полученных уравнений.

3. *Формулы для коэффициентов.* Нелинейную функцию $F(x)$ в окрестности x_0 удобно представить в виде $F(x_0 + y) = ay + by^2 + cy^3 + O(y^4)$.

В случае $m = 1$ формулы для коэффициентов α и β особенно простые: $\alpha = a_1T_0^{-1}$, $\beta = bT_0^{-1}$. При условии $\alpha\beta \neq 0$ решения (1.14) (а значит, и (1.1)) стремятся при $t \to \infty$ к устойчивому состоянию равновесия ξ_0 $(x_0 + \varepsilon\xi_0 + O(\varepsilon^2))$:

$$\xi_0 = \begin{cases} -\varepsilon\beta^{-1}\alpha + O(\varepsilon^2) & \text{при } \alpha > 0, \\ 0 & \text{при } \alpha < 0. \end{cases}$$

Пусть $m = 2$. Подставим в соответствующее уравнение вместо $x(t)$ выражение (1.17), где вместо $O(\varepsilon + |\xi|^2)$ следует брать ряды по степеням ε и ξ. Учитывая (1.16) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε и ξ, находим формулы для коэффициентов α и β. Для уравнения (1.1) эти формулы имеют вид

$$\begin{aligned}
&\alpha = \alpha(\sigma) = \frac{(a_1 - a_0 i\sigma T_1)\exp(-i\sigma T_0) - i\sigma}{2i\sigma + a_0 T_0 \exp(-i\sigma T_0)},\\
&\beta = \beta(\sigma) = \exp(-i\sigma T_0)[2i\sigma + a_0 T_0 \exp(-i\sigma T_0)]^{-1} \times\\
&\qquad \times [3c + 4b^2(1-a_0)^{-1} + 2b^2(1 - 4\sigma^2 - (1-\sigma^2)^2 a_0^{-1})^{-1}\exp(-2i\sigma T_0)].
\end{aligned}$$

Для уравнения (1.2) соответствующие формулы таковы:

$$\alpha = \alpha(\sigma) = \frac{(a_1 i - a_0\sigma T_1)\sigma\exp(-i\sigma T_0) - i\sigma}{2i\sigma + a_0\exp(-i\sigma T_0)(i\sigma T_0 - 1)}, \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned}
&\beta = \beta(\sigma) = [2i\sigma + a_0\exp(-i\sigma T_0)(i\sigma T_0 - 1)]^{-1} i\sigma\exp(-i\sigma T_0) \times\\
&\qquad \times [3c + 4b^2 i\sigma(1 - 4\sigma^2 - 2i\sigma a_0\exp(-2i\sigma T_0))^{-1}\exp(-2i\sigma T_0)].
\end{aligned} \tag{1.22}$$

При условии $(\operatorname{Re}\alpha(\sigma))(\operatorname{Re}\beta(\sigma)) \neq 0$ динамика (1.16) в главном определяется уравнением

$$\frac{dz}{d\tau} = \alpha z + \beta z|z|^2 \quad (\tau = \varepsilon t, \quad z = \sqrt{\varepsilon}\xi).$$

Например, при условии

$$\operatorname{Re}\alpha > 0, \quad \operatorname{Re}\beta < 0 \tag{1.23}$$

решению $z_0(\tau) = (-\operatorname{Re}\alpha(\operatorname{Re}\beta)^{-1})^{1/2}\exp(i[\operatorname{Im}(\alpha - \beta\operatorname{Re}\alpha(\operatorname{Re}\beta)^{-1})]\tau)$ этого уравнения отвечает устойчивый цикл $x_0(t,\varepsilon)$ исходного уравнения, причем

$$x_0(t,\varepsilon) = x_0 + \sqrt{\varepsilon}(z_0(\tau)\exp(i\sigma t) + \overline{z}_0(\tau)\exp(-i\sigma t)) + O(\varepsilon).$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда $a = 0$. Тогда $\sigma = 1$. Для уравнения (1.1) получаем формулы $\alpha = -(1 + a_1 i\exp(-iT_0))/2$, $\beta = (2i)^{-1}[3c - 2b^2]\exp(-iT_0)$. Условия (1.23) имеют вид $a_1\sin T_0 < -1$ и $[6b^2\cos^2 T_0 - 3c + 2b^2(2 - 3\cos 2T_0)]\sin T_0 < 0$.

Для уравнения (1.2) соответствующие формулы при $a = 0$ имеют вид $\alpha = -(1 - a_1\exp(-iT_0))/2$, $\beta = \exp(-iT_0)[9c - 4ib^2\exp(-2iT_0)]/6$.

Пусть далее $m = 4$ и $\sigma_1\sigma_2^{-1} \neq 1/2$. При рассмотрении уравнения (1.1) для коэффициентов уравнения (1.18) получаем формулы

$$\begin{gathered}
\alpha_j = \alpha(\sigma_j), \quad \beta_j = \beta(\sigma_j),\\
\gamma_j = (1 - \sigma_j^2)[a_0(2i\sigma_j + T_0(1 - \sigma_j^2))]^{-1}[3c + \rho((-1)^j(\sigma_2 - \sigma_1)) + \rho(\sigma_1 + \sigma_2) + 4b(1 - a_0)^{-1}],
\end{gathered}$$

где $j = 1, 2$; $\rho(s) = 4b^2[1 - s^2 - a_0\exp(-iT_0 s)]^{-1}\exp(-iT_0 s)$. Динамика системы уравнений (1.18) хорошо изучена (напр., [10]). Применительно к исходной задаче это означает, что в рассматриваемом уравнении кроме устойчивых циклов может быть устойчивый тор, главную часть которого описывают формулы (1.20).

Наконец, для $m = 4$ и $\sigma_1\sigma_2^{-1} = 1/2$ в системе (1.19) коэффициенты α_j, β_j и γ_j ($j = 1, 2$) определяются так же просто, как и в (1.18). Поскольку они более громоздкие, здесь их приводить не будем. Важно отметить, что динамика (1.19), а значит, и исходных уравнений существенно более сложна (напр., [11]) по сравнению с ситуацией, когда резонанс отсутствует. Для уравнения (1.2) аналогичные формулы имеют вид (1.22), где $\alpha(\sigma_j)$ и $\beta(\sigma_j)$ определяются равенствами (1.21) и (1.22), и

$$\gamma_j = (p'(\sigma_j))^{-1} 2i\sigma_j\left[3ic - 2b^2\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{p(\sigma_1 + \sigma_2)} + (-1)^j\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{p((-1)^j(\sigma_2 - \sigma_1))}\right)\right],$$

в которых $p(\sigma) = [1 - \sigma^2 - ia_0\sigma\exp(-i\sigma T_0)]\exp(-iT_0\sigma)$.

Сравнивая локальные динамические свойства решений уравнений (1.1) и (1.2), на основании полученных формул сформулируем следующие выводы. Во-первых, набор качественно различных динамических объектов, которые могут реализоваться в окрестности состояния равновесия обоих уравнений, один и тот же. Во-вторых, при одних и тех же значениях параметров локальная динамика уравнений (1.1) и (1.2) различна.

2. Нелокальные периодические решения

В этом параграфе будут изучены вопросы существования таких периодических решений уравнений (1.1) и (1.2), амплитуды которых неограниченно растут при $\varepsilon \to +0$. В основе исследований лежит специальный метод большого параметра, разработанный в [12], [13]. Суть его состоит в следующем. В фазовом пространстве рассматриваемых уравнений фиксируется, исходя из специфики задачи, некоторое множество $S(\rho)$, зависящее от числового параметра ρ. Затем последовательно при $t \in [0, T]$, $t \in [T, 2T]$, $\ldots$ анализируется асимптотика при $\varepsilon \to 0$ всех решений с начальными условиями из $S(\rho)$. После этого удается определить оператор Π (типа оператора последования Пуанкаре) так, что каждое решение из $S(\rho)$ в некоторый момент времени попадает в $S(\widetilde{\rho})$. Значение $\widetilde{\rho}$ аналитически выражается через $\rho : \widetilde{\rho} = \Phi(\rho, \varepsilon)$. После этого задача о динамике рассматриваемых решений сводится к динамике одномерного отображения $\widetilde{\rho} = \Phi(\rho, \varepsilon)$. Отметим, что периодическим траекториям этого отображения отвечают периодические решения исходных уравнений той же устойчивости.

2.1 *Медленно осциллирующие решения уравнения* (1.1). Сначала введем в рассмотрение множество $S(\rho)$. Как уже говорилось выше, значение $\rho \gg 1$ (неограниченно растет при $\varepsilon \to +0$). Отсюда следует, что в "основное" время (т. е. за исключением асимптотически малых при $\varepsilon \to 0$ промежутков времени) решения (1.1) являются решениями более простого уравнения

$$\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} + x = f, \tag{2.1}$$

в котором $f = f_1$ или $f = f_2$. Тем самым на некоторых отрезках времени решения (2.1) имеют вид $x = f + g\sin(\omega(\varepsilon)(t+\psi))\exp(-\varepsilon t/2)$, где $\omega(\varepsilon) = \sqrt{1-\varepsilon^2/4}$. В этом пункте рассмотрим медленно осциллирующие решения (1.1), т. е. такие, у которых расстояние между нулями больше времени запаздывания T, поэтому необходимо предположить

$$T < \pi. \tag{2.2}$$

Обозначим через $S(\rho)$ множество всех таких функций $\varphi(s, \rho)$, которые определены при $s \in [-T, 0]$ и при всех $\rho > 0$, при $t \in [-\alpha, 0]$, где $0 < \alpha < \min(T/2, (\pi - T)/2)$ произвольно фиксировано, являются решениями уравнения (2.1) при $f = f_1$ с начальными при $s = 0$ условиями $\varphi(0, \rho) = 0$; $\dot{\varphi}(0, \rho) = \rho\omega(\varepsilon)$, а при $s \in [-T, -\alpha]$ выполнено неравенство $\varphi(s, \rho) < -p$. Таким образом, при $s \in [-\alpha, 0]$ имеем

$$\varphi(s, \rho) = \rho \sin\omega(\varepsilon)(s+\delta)\exp(-\varepsilon s/2) + f_1,$$

где $\delta = \delta(\rho, \varepsilon)$ и

$$\delta(\rho, \varepsilon) = -f_1\rho^{-1}(1 + O(\varepsilon^2)).$$

Пусть $x(t, \varphi)$ — решение уравнения (1.1) при $t \geq 0$ с начальным условием $x(s, \varphi) = \varphi(s, \rho)$ при $s \in [-T, 0]$ и $\dot{x}(0, \varphi) = \dot{\varphi}(0, \rho)$. Изучим асимптотику при $\varepsilon \to 0$, $\rho \to \infty$ функций $x(t, \varphi)$ для значений $t \in [0, 2\pi]$.

Пусть сначала $t \in [0, T]$. Обозначим через $\Delta_1 < 0$ корень уравнения $\varphi(s, \rho) = -p$. Для Δ_1 имеет место формула $\Delta_1 = -p\rho^{-1}(1 + O(\varepsilon^2))$. При условии $t \in [0, T + \Delta_1]$ выполнено неравенство $x(t - T, \varphi) < -p$, поэтому $F(x(t - T, \varphi)) = 0$ и для $x(t, \varphi)$ верно равенство

$$x(t, \varphi) = \rho\sin\omega(\varepsilon)(t+\delta)\exp(-\varepsilon t/2) + f_1. \tag{2.3}$$

Через Δ_2 обозначим корень (при $t \in [0, T + \Delta_1]$) уравнения

$$x(t, \varphi) = p. \tag{2.4}$$

Из (2.3) получим $\Delta_2 = p\rho^{-1}(1+O(\varepsilon^2))$. Для $x(t,\varphi)$ имеют место формулы

$$x(t,\varphi) = \rho\sin\omega(\varepsilon)(t+\delta)\exp(-\varepsilon t/2) + f_1 + \int_{T+\Delta_1}^{t} K(t-s)F(x(s-T,\varphi))ds, \tag{2.5}$$

$$\dot{x}(t,\varphi) = \rho\exp(-\varepsilon t/2)[\omega(\varepsilon)\cos(\omega(\varepsilon)(t+\delta) - (\varepsilon/2)\sin\omega(\varepsilon)(t+\delta)] + \\ + \int_{T+\Delta_1}^{t} \dot{K}(t-s)F(x(s-T,\varphi))ds. \tag{2.6}$$

Здесь

$$K(t) = (\omega(\varepsilon))^{-1}\sin\omega(\varepsilon)t\exp(-\varepsilon t/2). \tag{2.7}$$

Пусть $t\in[T+\Delta_1, T+\Delta_2]$. Из формул для Δ_j $(j=1,2)$ и из (2.3), (2.5)–(2.7) получим, что $x(t,\varphi) = x(T+\Delta_1,\varphi)+o(1)$ и

$$x(T+\Delta_2,\varphi) = \rho\sin\omega(\varepsilon)(T+\delta+\Delta_2)\exp(-(T+\Delta_2)\varepsilon/2) + f_1 + O(\rho^{-2}), \tag{2.8}$$

$$\dot{x}(T+\Delta_2,\varphi) = \rho\exp(-(\varepsilon/2)(T+\Delta_2))[\omega(\varepsilon)\cos\omega(\varepsilon)(T+\delta+\Delta_2) - \\ - (\varepsilon/2)\sin\omega(\varepsilon)(T+\delta+\Delta_2)] + \rho^{-1}\int_{-p}^{p} f(s)ds + O(\rho^{-3}). \tag{2.9}$$

Обозначим через $t_1(\varphi)$ первый при $t>0$ корень уравнения

$$x(t,\varphi)=0. \tag{2.10}$$

Из равенств (2.8) и (2.9) вытекает, что $t_1(\varphi) = \pi + o(1)$ $(\varepsilon\to 0,\ \rho\to\infty)$, для $t\in[T+\Delta_2, t_1(\varphi)]$ $x(t,\varphi)$ является решением уравнения (2.1) при $f=f_2$ и имеют место формулы

$$x(t,\varphi) = \widetilde{\rho}\sin\omega(\varepsilon)(T+\widetilde{\delta})\exp(-\varepsilon t/2) + f_2, \tag{2.11}$$

где $\widetilde{\delta} = O(\rho^{-1}+\varepsilon)$ и

$$\widetilde{\rho} = \rho[1 + ((f_1-f_2)\sin T + A\cos T)\rho^{-1} + O(\rho^{-2}+\varepsilon\rho^{-1}+\varepsilon^2)]. \tag{2.12}$$

Тогда на отрезке $t\in[t_1(\varphi)-T,\ t_1(\varphi)]$ выражение (2.11) можно переписать в виде

$$x(t,\varphi) = \rho_1\sin\omega(\varepsilon)(t - t_1(\varphi)+\delta_1)\exp(-(\varepsilon/2)(t-t_1(\varphi))) + f_2, \tag{2.13}$$

в котором $\delta_1 = O(\rho^{-1}+\varepsilon)$ и

$$\rho_1 = -\widetilde{\rho}\exp(-(\varepsilon/2)\pi + O(\rho^{-1}+\varepsilon)). \tag{2.14}$$

Обозначим через $t_2(\varphi)$ первый при $t>t_1(\varphi)$ корень уравнения (2.10). На отрезке $[t_1(\varphi), t_2(\varphi)]$ аналогичным образом (с заменой ρ на ρ_1 и f_1 на f_2) получаем асимптотические формулы для $x(t,\varphi)$, из которых и из (2.12) и (2.14) находим, что при $t\in[t_2(\varphi)-T,\ t_2(\varphi)]$ имеет место равенство

$$x(t,\varphi) = \overline{\rho}\sin\omega(\varepsilon)(t-t_2(\varphi)+\delta(\overline{\rho},\varepsilon))\exp(-(\varepsilon/2)(t-t_2(\varphi))) + f_1, \tag{2.15}$$

а для $t_2(\varphi)$ и $\overline{\rho}$ верны соотношения

$$\begin{aligned} t_2(\varphi) =& 2\pi + O(\rho^{-1}+\varepsilon), \\ \overline{\rho} = \rho[1 + 2&(f_1-f_2)\rho^{-1}\sin T - \varepsilon\pi + O(\rho^{-2}+\varepsilon^2+\varepsilon\rho^{-1})]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Введем в рассмотрение оператор $\Pi : \Pi(\varphi(s,\rho)) = x(s+t_2(\varphi),\varphi)$. Из (2.15) и (2.16) вытекает, что $\Pi(\varphi(s,\rho))\in S(\overline{\rho})$. Поведение функций $x(t,\varphi)$ при $t\to\infty$ описывается итерациями оператора Π, а значит, траекториями одномерного отображения (2.16). При условии $f_1>f_2$, достаточно малых ε и достаточно больших ρ это отображение имеет единственную неподвижную устойчивую точку $\rho_0 = 2(f_1-f_2)(\varepsilon\pi)^{-1}\sin T[1+O(\varepsilon)]$. Тем самым получаем, что при достаточно малых ε все решения с начальными условиями из $S(\rho)$ с достаточно большими значениями параметра ρ стремятся при $t\to\infty$ к устойчивому циклу $x_0(t+\mathrm{const})$, для которого $x_0(s)\in S(\rho_0)$ $(s\in[-T,0])$.

Период этого цикла асимптотически близок к 2π. Отметим, что поведение функции $F(x)$ при $|x| < p$ существенной роли не играет.

Таким образом, при $f_1 > f_2$ уравнение (1.1) имеет устойчивый цикл, близкий к гармоническому с амплитудой порядка ε^{-1}. При $f_1 < f_2$ похожего цикла не существует (оператор Π не имеет неподвижной точки при $\rho \gg 1$).

2.2. *Периодические решения уравнения* (1.1) *при* $f_1 = f_2$. Рассмотрим здесь важный для приложений [3] случай наличия симметрии $f_1 = f_2$ (особенно важен случай $f_1 = f_2 = 0$). Повторим изложенную выше схему, повысив при этом асимптотическую точность вычислений. Так, при учете слагаемых порядка $O(\rho^{-2})$ в формулах (2.8) и (2.9) последняя из них не меняется, а в (2.8) слагаемые $O(\rho^{-2})$ следует заменить на $(\rho A - B)\rho^{-2} + O(\rho^{-3})$, где $B = \int\limits_{-p}^{p} xf(x)dx$. Итоговое отображение, аналогичное (2.16), в рассматриваемом случае принимает вид

$$\overline{\rho} = \rho[1 - B(\sin T)\rho^{-3} - \varepsilon\pi + O(\rho^{-3} + \varepsilon\rho^{-1} + \varepsilon^2)]. \tag{2.17}$$

Отсюда заключаем, что при условиях (0.3) $f_1 = f_2$, и при $B < 0$ уравнение (1.1) имеет устойчивый цикл $x_0(t + \mathrm{const})$ (близкий к гармоническому), для которого $x_0(s) \in S(\rho_0)$, причем

$$\rho_0 = [B(\varepsilon\pi)^{-1} \sin T]^{1/3}[1 + O(\varepsilon^{1/3})].$$

Отметим, что наличие вырождения ($f_1 = f_2$) на порядок понижает амплитуду колебаний.

2.3. *Медленно осциллирующий цикл уравнения* (1.2). В случае уравнения (1.2) первые слагаемые в правых частях уравнений (2.8) и (2.9) остаются неизменными, а следующие слагаемые в (2.8) имеют вид $O(\rho^{-1})$, а в (2.9) следует записать выражение $f_2 - f_1 + O(\rho^{-1})$. Одномерное отображение, аналогичное (2.16), (2.17), имеет вид

$$\overline{\rho} = \rho[1 + 2\rho^{-1}(f_2 - f_1)\cos T - \varepsilon\pi + O(\rho^{-3} + \varepsilon\rho^{-1} + \varepsilon^2)].$$

Тем самым, при условии $(f_2 - f_1)\cos T > 0$ (и при малых ε) существует устойчивый цикл $x_0(t)$ ($x_0(s) \in S(\rho_0)$) уравнения (1.2) с амплитудой $\rho_0 = 2(f_2 - f_1)(\varepsilon\pi)^{-1}\cos T[1 + O(\varepsilon)]$.

Интересно сравнить условия существования циклов в уравнениях (1.1) и (1.2). Если для (1.1) это условие имеет вид $f_1 > f_2$, то для (1.2) само условие (даже в случае (2.2)) зависит от значения T: $(f_2 - f_1)\cos T > 0$. При этом порядок амплитуд при $\varepsilon \to 0$ для обоих уравнений совпадает и равен ε^{-1}.

Кроме этого можно отметить, что нелинейность $\frac{d}{dt}F(x(t))$ в уравнении (1.2) финитна, т.е. $\frac{d}{dt}F(x) \equiv 0$ при $|x| > p$. Условие финитности нелинейности $F(x)$ для уравнения (1.1) состоит в требовании $f_1 = f_2 = 0$. Тем самым из результатов пп. 2.2 и 2.3 следует, что амплитуды циклов (как и условия их существования) рассматриваемых уравнений существенно отличаются: в случае уравнения (1.1) порядок амплитуды равен $\varepsilon^{-1/3}$, а в случае уравнения (1.2) — равен ε^{-1}.

2.4. *Быстро осциллирующие решения уравнения* (1.1). При условии $T > \pi$ расстояние между нулями решений уравнения (2.1) меньше, чем T (при достаточно больших ρ). Поэтому множество $S(\rho)$ начальных функций определяется более сложно по сравнению с тем случаем, когда имеет место неравенство (2.2).

Рассмотрим отдельно ситуации для $T < 2\pi$ и $T > 2\pi$. Пусть сначала

$$\pi < T < 2\pi. \tag{2.18}$$

Через $S(\rho, \tau)$ обозначим множество функций $\varphi(s) \in C^1_{[-T,0]}$, удовлетворяющих следующим условиям. Фиксируем произвольно значения ρ_1, ρ_2, τ и α так, чтобы $\rho_1 < 0$, $\rho_2 > 0$, $|\tau| \leq |\rho_1|^{-1/2}$ и $0 < \alpha < \min(T - \pi, 2\pi - T)/2$. Считаем, что $\varphi(s) \in S(\rho, \tau) \subset C_{[-T,0]}$, если:

1) $\varphi(s) = \rho_1 \sin\omega(\varepsilon)(s - (\pi+\tau) + \delta_1 \exp((-\varepsilon/2)(s - (\pi+\tau))) + f_1$ при $s \in [-(\pi+\tau) - \alpha,\ -(\pi+\tau) + \alpha]$; $\varphi(-(\pi + \tau)) = 0$;

2) $\varphi(s) = \rho_2 \sin\omega(\varepsilon)(s+\delta_2)\exp(-\varepsilon s/2) + f_2$ при $s \in [-\alpha, 0]$, $\varphi(0) = 0$;

3) $\varphi(s) > p$ при $s \in [0, -(\pi+\tau+\alpha)]$ и $\varphi(s) < -p$ при $s \in (-(\pi+\tau-\alpha), -\alpha)$.

На отрезке $[0,T]$ построим асимптотику при условиях $|\rho_j| \to \infty$ $(j=1,2)$, $\varepsilon \to 0$ решения $x(t,\varphi)$ уравнения (1.1) с начальными условиями $x(s,\varphi) = \varphi(s)$ $(s \in [-T,0])$, $\dot{x}(0,\varphi) = \dot{\varphi}(0)$. Отметим сразу, что $\delta_j = -f_j\rho_j^{-1}[1 + O(|\rho_j|^{-1} + \varepsilon)]$ $(j=1,2)$.

Соответствующие формулы для $x(t,\varphi)$ аналогичны (2.5), (2.6), (2.8), (2.9), поэтому ограничимся тем, что сформулируем итоговые выводы.

Пусть $t_1(\varphi)$ — первый при $t > 0$ корень уравнения (2.10). Имеет место асимптотическое равенство

$$t_1(\varphi) = \pi + \tau_1, \quad \text{причем} \quad |\tau_1| < \rho_2^{-1/2}$$

(более точно — найдется такое универсальное значение $c > 0$, что $|\tau_1| \le c\rho_2^{-1}$). На отрезке $t \in [\pi + \overline{\tau} - \alpha, \pi + \overline{\tau} + \alpha]$ справедлива формула

$$x(t,\varphi) = \overline{\rho}_1 \sin\omega(\varepsilon)(t - t_1(\varphi))\exp(-\varepsilon(t - t_1(\varphi))/2) + f_1, \tag{2.19}$$

где

$$\overline{\rho}_1 = -\rho_2[1 + (f_2 - f_1)\rho_2^{-1}\sin(T-\pi) - \frac{\varepsilon}{2}\pi + o(\rho_2^{-1} + \varepsilon)]. \tag{2.20}$$

После этого изучим функцию $x(t,\varphi)$ при $t \in [\pi, 2\pi]$. Пусть $t_2(\varphi)$ — первый при $t > t_1(\varphi)$ корень уравнения (2.10). Тогда $t_2(\varphi) = \pi + \overline{\tau}$, причем $|\overline{\tau}| < |\rho_2|^{-1/2}$ и при $t \in [t_2(\varphi) - \alpha, t_2(\varphi)]$ верно равенство (2.19) с заменой в нем индекса 1 на 2. Для $\overline{\rho}_2$ соответствующая формула имеет вид

$$\overline{\rho}_2 = -\overline{\rho}_1[1 + (f_2 - f_1)\overline{\rho}_1^{-1}\sin(T-\pi) - \frac{\varepsilon}{2}\pi + o(|\rho_1|^{-1} + \varepsilon)]. \tag{2.21}$$

Как и в 2.1, введем $\Pi(\varphi(s)) = x(s + t_2(\varphi), \varphi)$. Тогда $\Pi(\varphi(s)) \in S(\overline{\rho}, \tau)$, где $\overline{\rho} = (\overline{\rho}_1, \overline{\rho}_2)$, и итоговое представление $\overline{\rho}_1$ и $\overline{\rho}_2$ через ρ_1 и ρ_2 имеет вид (2.20), (2.21) и

$$\overline{\rho}_2 = \rho_2\Big[1 + 2(f_2 - f_1)\rho_2^{-1}\sin(T-\pi) - \frac{\varepsilon}{2}\pi + o(\rho_2^{-1} + \varepsilon)\Big].$$

Пусть $f_2 > f_1$. Тогда при итерациях оператора Π имеем $\rho_{1n} \to \rho_{10}$, $\rho_{2n} \to \rho_{20}$, где $\rho_{j0} = 2(-1)^j(f_2 - f_1)\sin(T-\pi)(\varepsilon\pi)^{-1}[1 + O(\varepsilon)]$ $(j=1,2)$. Можно показать, что $\tau_n \to \tau_0 = O(\varepsilon)$. Тем самым, оператор Π имеет устойчивую неподвижную точку, а уравнение (1.1) — устойчивое периодическое решение.

Напомним, что условие существования аналогичного цикла при условии (2.2) состояло в выполнении неравенства $f_1 > f_2$.

Приведенная здесь схема легко обобщается на случай, когда вместо неравенств (2.18) выполнены неравенства

$$\pi k < T < \pi(k+1) \quad (k = 2, 3, \dots).$$

При четном k условие существования устойчивого цикла (1.1) с амплитудой $O(\varepsilon^{-1})$ имеет вид $f_1 > f_2$, а при нечетном k — вид $f_2 > f_1$. Аналогичные приведенным выше утверждения можно получить и для уравнения (1.2) и для обоих уравнений (1.1) и (1.2) в случае наличия симметрий. Подробнее на этом не останавливаемся.

2.5. *О динамике уравнений* (1.1) *и* (1.2) *в случае финитной нелинейности и малого значения параметра* p. Нелинейная функция $F(x)$ в случае уравнения (1.2) финитна (т. е. $\frac{d}{dt}F(x) \equiv 0$ при $|x| > p$), а условие ее финитности для уравнения (1.1) состоит в выполнении неравенства

$$f_1 = f_2 = 0.$$

Будем полагать, что параметр p является достаточно малым. Тогда в случае уравнения (1.1) наиболее естественный вид функции $F(x)$ кусочно-постоянный ($f_0(x) \equiv f_0$).

Положим $x = py$. В результате получим уравнение

$$\ddot{y} + \varepsilon y + y = \lambda \Phi(y(t-T)), \tag{2.22}$$

где $\lambda = \varepsilon^{-1} \gg 1$,

$$\Phi(y) = \begin{cases} 0, & |y| > 1, \\ f_0, & |y| \le 1, \end{cases}$$

для уравнения (1.1) и $\Phi(y) = \frac{d}{dt}F(py)$ для уравнения (1.2). Задача о динамике решений уравнения (2.22) при больших λ изучалась в [14]. Приведем простейшие результаты из [14]. Показано, например, что при условии (2.2) и при некоторых условиях типа невырожденности динамика решений с начальными условиями из $S(\rho)$ описывается одномерным отображением

$$\overline{r} = P(r), \tag{2.23}$$

где

$$p_{\pm}(r) = r^2 + r^{-2} \mp 2\cos T.$$

В случае уравнения (1.1) функции $p_{\pm}(r)$ определяются формулами

$$p_{\pm}(r) = r^2 + r^{-2} \mp 2\cos T,$$

где $\rho = \lambda^{1/2} r$, а в случае уравнения (1.2) — формулами

$$p_{\pm}(r) = r^2 + 1 \mp 2r\cos T,$$

где $\rho = \lambda^{1/3} r$. Заметим, что в отличие от рассмотренных выше случаев динамика отображения (2.23) может быть достаточно сложной [15].

В заключение отметим, что изложенная выше методика может быть обобщена на существенно более широкие классы уравнений. В первую очередь здесь следует отметить уравнения, в которых $F(x) \not\equiv \text{const}$ при $|x| > p$, но $F(x) \to \text{const}$ при $x \to \pm\infty$ и в которых функция F зависит не от x, а от $\dot{x}$.

Литература

1. Хэйл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1984. – 478 с.
2. Ланда П.С. *Автоколебания в распределенных системах.* – М.: Наука, 1983. – 267 с.
3. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. *Стохастические колебания в радиофизике и электронике.* – М.: Наука, 1989. – 230 с.
4. Кузнецов С.П. *Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью* (*обзор*) // Изв. вузов. Радиофизика. – 1982. – Т. 25. – № 12. – С. 1410–1428.
5. Рождественский В.В., Стручков И.Н. *Переходный хаос в автогенераторах стохастических колебаний с жестким возбуждением и четной нелинейностью* // Журн. техн. физ. – 1992. – Т. 62. – № 10. – С. 751–767.
6. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. *Нестационарные структуры и диффузионный хаос.* – М.: Наука, 1992. – 544 с.
7. Марсден Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения.* – М.: Мир, 1980. – 368 с.
8. Куликов А.Н. *Инерциальные многообразия нелинейных автономных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве* // Препринт. Ин-т прикладной матем. им. М.В. Келдыша. – 1991. – № 85. – 22 с.
9. Брюно А.Д. *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1979. – 255 с.
10. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.* – М.: Наука, 1976. – 496 с.
11. Guckenheimer J., Holmes P. *Nonlinear oscillation, dynamical systems, and bifurcation of vector fields.* – Berlin–N-Y: Springer, 1983. – 453 c.

12. Кащенко С.А. *Исследование методами большого параметра системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений, моделирующих задачу хищник-жертва* // ДАН СССР. – 1982. – Т. 266. – № 4. – С. 1–4.
13. Кащенко С.А. *Пространственно-неоднородные структуры в простейших моделях с запаздыванием и диффузией* // Матем. моделирование. – 1990. – Т. 2. – № 9. – С. 29–49.
14. Дмитриев А.С., Кащенко С.А. *Асимптотика нерегулярных колебаний в модели автогенератора с запаздывающей обратной связью* // Докл. РАН. – 1993. – Т. 328. – № 2. – С. 134–177.
15. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. *Разностные уравнения и их приложения.* – Киев: Наукова думка, 1981. – 280 с.

Ярославский государственный университет

Поступила 10.06.1996