ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 11 (474)

УДК 517.983.54

Р.А. ШАФИЕВ, И.Ю. ЯСТРЕБОВА

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ В МЕТОДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ L-ПСЕВДООБРАЩЕНИЯ

В работе [1] предложен двупараметрический метод регуляризации задачи L-псевдообращения, область применения которого шире, чем у однопараметрического метода регуляризации, полно исследованного в [2]. В [1] установлена сходимость и устойчивость предложенного метода, в [3] обоснованы некоторые критерии выбора одного из параметров регуляризации. В данной работе предлагаются и обосновываются критерии последовательного выбора обоих параметров регуляризации.

1. Введение

Пусть заданы замкнутые линейные операторы $A : X \to Y$, $B : X \to Z$, где X, Y, Z — гильбертовы пространства, с областями определения $D(A)$ и $D(B)$ соответственно. Предположим, что их общая область определения $D = D(A) \cap D(B)$ всюду плотна в X. Пусть, далее, заданы два элемента $y \in Y$, $z \in Z$.

Определим множества

$$X_1 = \{x \in D \mid \|Bx - z\| = \inf_{u \in D} \|Bu - z\| = \mu_B\},$$
$$X_2 = \{x \in X_1 \mid \|Ax - y\| = \inf_{u \in X_1} \|Au - y\| = \mu_A\}$$

и поставим задачу: найти элемент минимальной нормы x^* множества X_2. В математической литературе эта задача получила название задачи L-псевдообращения. Для краткости назовем ее здесь основной задачей и будем предполагать, что операторы A и B удовлетворяют обобщенному условию дополнительности

$$\exists\, \gamma > 0 : \|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 \geq \gamma^2 \|x\|^2 \quad \forall\, x \in D^\perp, \tag{1}$$

где $D^\perp = D \cap (N(A) \cap N(B))^\perp$, а $N(A)$ и $N(B)$ — ядра операторов A и B соответственно.

В [2] и [4] предполагалось, что для основной задачи условие (1) выполняется для всех $x \in D$. Отсюда, в частности, вытекает соотношение $N(A) \cap N(B) = \{0\}$, а значит, множество X_2 не более чем одноэлементно. Нетрудно видеть (напр., [5]), что разрешимость основной задачи равносильна непустоте множества X_1, т.к. оно замкнуто и выпукло, а последнее равносильно условию $z \in D(B^+) = R(B) \oplus R(B)^\perp$. Известно также, что решение основной задачи $x^* \in D^\perp$.

В [3], [5] аппроксимация основной задачи базируется на регуляризирующем функционале

$$\Phi_{r\alpha}[x] = r\|Bx - z\|^2 + \|Ax - y\|^2 + \alpha\|x\|^2, \tag{2}$$

зависящем от двух параметров $r, \alpha > 0$. В данной работе для решения проблемы выбора параметров указанный регуляризирующий алгоритм представляется в виде двух процессов.

Первый регуляризирующий алгоритм — $\{x_r\}$ строится по функционалу

$$F_r[x] = r\|Bx - z\|^2 + \|Ax - y\|^2 \tag{3}$$

как решение вариационной задачи

$$F_r[x_r] = \inf_{x \in D^{\perp}} F_r[x], \tag{4}$$

и параметр r_Δ выбирается по критерию невязки как в случае точных, так и в случае возмущенных данных.

Второй регуляризирующий алгоритм — $\{x_{r_\Delta \alpha}\}$ строится по функционалу (2) как решение вариационной задачи

$$\Phi_{r_\Delta \alpha}[x_{r\Delta\alpha}] = \inf_{x \in D} \Phi_{r_\Delta \alpha}[x], \tag{5}$$

и параметр α_σ выбирается по критерию стабилизирующего функционала.

2. Первый регуляризирующий алгоритм

1. Введем декартово произведение $G = Z \times Y$ пространств Z и Y, а также оператор и вектор

$$\Gamma_r = \begin{bmatrix} r^{1/2} B \\ A \end{bmatrix} : D \to G, \quad g_r = \begin{bmatrix} r^{1/2} z \\ y \end{bmatrix} \in G. \tag{6}$$

Условимся обозначать Γ_1 и g_1 просто Γ и g. Функционал (3) примет вид

$$F_r[x] = \|\Gamma_r x - g_r\|^2. \tag{7}$$

Так как в силу условия (1) оператор Γ, а значит, и Γ_r нормально разрешимы, то Γ_r имеет ограниченный псевдообратный Γ_r^+, определенный всюду на G. Из (4) и (7) тогда следует, что $x_r = \Gamma_r^+ g_r$, а равенство Эйлера

$$(\Gamma_r x_r - g_r, \Gamma_r v) = 0 \ \ \forall v \in D \tag{8}$$

эквивалентно задаче (4) [5].

Введем норму графика оператора Γ

$$|x| = (\|\Gamma x\|^2 + \|x\|^2)^{1/2}. \tag{9}$$

Теорема 1. *При* $r \to \infty$ $\ |x_r - x^*| \to 0$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы из [2], если учесть, что слабые пределы последовательностей из семейства $\{x_r\}$ остаются в множестве $D^{\perp}$.

2. Пусть вместо точных данных основной задачи известны их приближения z_δ, y_τ, B_h, A_t, для которых выполнены следующие условия аппроксимации:

$$\begin{gathered} \|z - z_\delta\| \le \delta, \quad \|y - y_\tau\| \le \tau, \\ \|Bx - B_h x\| \le h|x|, \quad \|Ax - A_t x\| \le t|x| \ \ \forall x \in D, \end{gathered} \tag{10}$$

и существует $\widetilde{\gamma} > 0$ такое, что

$$\|A_t x\|^2 + \|B_h x\|^2 \ge \widetilde{\gamma}^2 \|x\|^2 \ \ \forall x \in D \cap (N(A_t) \cap N(B_h))^{\perp}. \tag{11}$$

Как известно [6], при выполнении условий (10) аппроксимирующий оператор $\widetilde{\Gamma}$, аналогичный (6) с компонентами B_h, A_t, является замкнутым и $D(\widetilde{\Gamma}) = D(\Gamma) = D$. Условия аппроксимации (10) не обеспечивают устойчивость свойства нормальной разрешимости оператора Γ, т. е. выполнение соотношения (11). Требуется дополнительно [5], [7], чтобы подпространства $R(\Gamma)$, $R(\widetilde{\Gamma})$ образов операторов Γ, $\widetilde{\Gamma}$, а также подпространства $R(\Gamma^*)$, $R(\widetilde{\Gamma}^*)$ образов их сопряженных Γ^*, $\widetilde{\Gamma}^*$ имели острые растворы, т. е. требуется выполнение условий

$$\|P_{R(\Gamma)} - P_{R(\widetilde{\Gamma})}\| < 1, \quad \|P_{R(\Gamma^*)} - P_{R(\widetilde{\Gamma}^*)}\| < 1,$$

где P_M — ортопроектор на подпространство, указанное в индексе. В конечномерном случае это означает, что подпространства $R(\Gamma)$ и $R(\widetilde{\Gamma})$ должны иметь одинаковую размерность. Очевидно, что свойства операторов $\widetilde{\Gamma}_r$ такие же, как и $\widetilde{\Gamma}$.

Обозначим через $\widetilde{x}_r$ решение возмущенной задачи (4). Тогда в силу условия (11)

$$\widetilde{x}_r = \widetilde{\Gamma}_r^+ \widetilde{g}_r \in \widetilde{D}^\perp = D \cap N(\widetilde{\Gamma})^\perp,$$

и выполняется равенство Эйлера

$$(\widetilde{\Gamma}_r \widetilde{x}_r - \widetilde{g}_r, \widetilde{\Gamma}_r v) = 0 \ \ \forall v \in D.$$

Теорема 2. *Если $r \to \infty$, $\delta, \tau, h, t \to 0$ и выполняются условия согласования $rh + \sqrt{r}\delta \to 0$, то $|\widetilde{x}_r - x^*| \to 0$.*

Для доказательства обозначим через $\overline{x}_r$ решение задачи (4) при возмущенных лишь правых частях. Очевидно, достаточно оценить $|\widetilde{x}_r - \overline{x}_r|$ и $|\overline{x}_r - x_r|$. Оценку $|\overline{x}_r - x_r| \le O(\sqrt{r}\delta + \tau)$ легко получить аналогично [2]. Однако вывод оценки $|\widetilde{x}_r - \overline{x}_r| \le O(rh + t)$, как в [2], непосредственно не проходит. Для этого понадобятся следующие предложения.

1) Для $x \in D$ справедлива оценка

$$|x| \le (1 + \varepsilon)|x|_{h,t}, \quad \varepsilon \ge 0, \tag{12}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(h, t) \to 0$ при $h, t \to 0$, а $|x|_{h,t}$ — норма (9) графика $\widetilde{\Gamma}$.

2) Для $x \in D$ справедлива оценка

$$|x|^2_{h,t} \le \left(1 + \frac{1}{\widetilde{\gamma}}\right)\|\widetilde{\Gamma}x\|^2 + \|\widetilde{Q}x\|^2,$$

где $\widetilde{Q}$ — ортопроектор на $N(\widetilde{\Gamma})$.

3) Для $x \in D^\perp$ справедлива оценка

$$\|\widetilde{Q}x\| \le \frac{1+\varepsilon}{\gamma}(t + h)\|x\|. \tag{13}$$

Предложения 1) и 2) следуют соответственно из условий аппроксимации (10) и (11). Остановимся на доказательстве предложения 3). В силу свойств псевдообратного оператора, неравенств (10) и предложения 1) имеем

$$\|\widetilde{Q}x\| = \|\widetilde{Q}Q^\perp x\| = \|\Gamma^+(\Gamma - \widetilde{\Gamma})\widetilde{Q}x\| \le (1 + \varepsilon)(t + h)\|\Gamma^+\| \, |\widetilde{Q}x|_{h,t}.$$

Остается заметить, что $|\widetilde{Q}x|_{h,t} = \|\widetilde{Q}x\| \le \|x\|$, $\|\Gamma^+\| \le \gamma^{-1}$. $\square$

3. Исследуем поведение семейств $\{x_r\}$ и $\{\widetilde{x}_r\}$ при $r \to 0$. С этой целью рассмотрим задачу, двойственную к основной: найти элемент минимальной нормы x_* множества

$$X_2' = \{x \in X_1' \mid \|Bx - z\| = \inf_{u \in X_1'} \|Bu - z\| = \nu_B\},$$

где $X_1' = \{x \in D \mid \|Ax - y\| = \inf_{u \in D} \|Au - y\| = \nu_A\}$.

Как уже отмечено, разрешимость двойственной задачи равносильна непустоте X_1', т. е. условию $y \in D(A^+)$. Оказывается, имеют место аналогичные теоремам 1 и 2

Теорема 1$'$. *При $r \to 0$ $|x_r - x_*| \to 0$.*

Теорема 2$'$. *Если $r, \delta, \tau, h, t \to 0$ и выполняются условия согласования $r^{-1}h + r^{-1/2}\delta \to 0$, то $|\widetilde{x}_r - x_*| \to 0$.*

3. Вспомогательные функции

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{\rho}(r) = \|B_h\widetilde{x}_r - z_\delta\|, \tag{14}$$

а также основную и двойственную задачи с возмущенными данными. При этом будем использовать те же обозначения, что и для невозмущенного случая, снабжая их тильдой.

Пусть $\widetilde{x}^*$ и $\widetilde{x}_*$ — решения соответственно основной и двойственной задач с возмущенными данными. Известно [5], [8], что существование этих решений есть следствие сходимости регуляризирующего алгоритма $\widetilde{x}_r$.

Функция (14) обладает свойствами:

1) $\lim\limits_{r\to\infty}\widetilde{\rho}(r) = \widetilde{\mu}_B$, $\lim\limits_{r\to 0}\widetilde{\rho}(r) = \widetilde{\nu}_B$;

2) непрерывна;

3) при $\widetilde{\mu}_B < \widetilde{\nu}_B$ строго монотонна.

Чтобы не осложнять обозначений, доказательство обоснования этих свойств проведем для невозмущенного случая. Свойство 1) для этого случая вытекает из теорем 1 и $1'$. Отсюда, в частности, следует ограниченность функции $\rho(r)$. Пусть $r, s > 0$, а x_r и x_s — соответствующие регуляризованные решения. Из равенства Эйлера (8) получаем

$$(\Gamma_r(x_r - x_s), \Gamma_r v) = (s - r)(Bx_s - z,\, Bv). \tag{15}$$

Полагая $v = x_r - x_s$, находим $\|\Gamma_r(x_r - x_s)\|^2 = (s - r)(Bx_s - z,\, B(x_r - x_s))$, откуда имеем $|\rho(r) - \rho(s)| \le \|B(x_r - x_s)\| \le |s - r|\rho(s)/r$. Так как функция $\rho(s)$ ограниченная, то отсюда получаем непрерывность $\rho(r)\ \forall\, r > 0$. Далее, используя экстремальное свойство x_r, имеем $F_r[x_r] - F_s[x_s] \le F_r[x_s] - F_s[x_s] = (r - s)\|Bx_s - z\|^2 = (r - s)\rho^2(s)$. Как будет доказано ниже, $\rho(s) > 0\ \forall\, s > 0$; поэтому $F_r[x_r] < F_s[x_s]$ при $s > r$, следовательно,

$$\rho^2(s) < \frac{F_s[x_s] - F_r[x_r]}{s - r} \le \frac{F_s[x_r] - F_r[x_r]}{s - r} = \rho^2(r),$$

и строгая монотонность доказана.

Покажем, что $\rho(s) \ne 0\ \forall\, s > 0$ при $\mu_B < \nu_B$. Допустим, что $\rho(s) = 0$ при некотором s. Тогда из (15) имеем $\Gamma_r(x_r - x_s) = 0$ при любом $r > 0$. Но это однородное уравнение на $D^\perp$ имеет единственное нулевое решение. Следовательно, $x_r = x_s$ для любого r, а в силу теорем 1 и $1'$ $x_r = x^* = x_*$. Значит, $\mu_B = \nu_B$, что противоречит условию $\mu_B < \nu_B$.

Заметим, что при $\mu_B = \nu_B$ имеем $x_r = x^* = x_*$ при любом r. Действительно, запишем цепочку неравенств

$$F_r[x_r] \le F_r[x_*] = r\nu_B^2 + \|Ax_* - y\|^2 \le r\mu_B^2 + \|Ax_r - y\|^2 \le r\|Bx_r - z\|^2 + \|Ax_r - y\|^2 = F_r[x_r].$$

Следовательно, в силу единственности на $D^\perp$ минимума функционала (3) получаем $x_r = x_*$, а согласно теореме 1 $x_r = x_* = x^*$ при любом r.

Второй регуляризирующий алгоритм — $\{\widetilde{x}_{\overline{r}\alpha}\}$ строится как решение задачи (5) с возмущенными данными при фиксированном $r = \overline{r}$. Очевидно, это известный метод регуляризации Тихонова [9]. При наших предположениях на оператор $\widetilde{\Gamma}_r$ $\widetilde{x}_{\overline{r}\alpha}$ существует при любой правой части $\widetilde{g}_{\overline{r}} \in G$ и $|\widetilde{x}_{\overline{r}\alpha} - \widetilde{x}_{\overline{r}}| \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\alpha) = \|\widetilde{\Gamma}_{\overline{r}}\widetilde{x}_{\overline{r}\alpha} - \widetilde{g}_{\overline{r}}\|^2 + \alpha\|\widetilde{x}_{\overline{r}\alpha}\|^2 \tag{16}$$

и обозначим $\widetilde{\mu}_{\overline{r}} = \|\widetilde{\Gamma}_{\overline{r}}\widetilde{x}_{\overline{r}} - \widetilde{g}_{\overline{r}}\|$. Известно (напр., [10]), что уравнение

$$\varphi(\alpha) = \sigma^2 \tag{17}$$

имеет единственный корень для любого σ, удовлетворяющего условию

$$\widetilde{\mu}_{\overline{r}} < \sigma < \|\widetilde{g}_{\overline{r}}\|. \tag{18}$$

4. Критерий выбора параметров регуляризации

В графике оператора Γ рассмотрим шар $S_C : |x| < C$ и предположим, что $x^* \in S_C$. Покажем, что $\widetilde{\mu}_B \to \mu_B$, $\widetilde{\nu}_B \to \nu_B$ при $h, \delta \to 0$.

Действительно, используя экстремальные свойства x^* и $\widetilde{x}^*$, имеем

$$\widetilde{\mu}_B \le \|B_h x^* - z_\delta\| \le \|Bx^* - z\| + \|(B_h - B)x^*\| + \|z - z_\delta\| < \mu_B + hC + \delta \tag{19}$$

и аналогично $\mu_B < \widetilde{\mu}_B + h|x^*| + \delta$. Отсюда ввиду соотношения $|x^* - \widetilde{x}^*| \to 0$ при $h, \delta \to 0$, вытекающего из теорем 1 и 2, получим $|\widetilde{\mu}_B - \mu_B| < hC + \delta$. Аналогично устанавливается оценка $|\widetilde{\nu}_B - \nu_B| < hC + \delta$. Следовательно, если $\mu_B < \nu_B$, то при достаточно малых h и δ

$$\widetilde{\mu}_B < \Delta = \mu_B + hC + \delta < \widetilde{\nu}_B. \tag{20}$$

Следующий выбор параметров будем называть критерием $(\widetilde{\rho}, \varphi)$: r_Δ — корень уравнения

$$\widetilde{\rho}(r) = \Delta, \tag{21}$$

где $\widetilde{\rho}(r)$ определено в (14), а Δ — в (20); в (16)–(18) примем $\overline{r} = r_\Delta$ и пусть α_σ — корень уравнения (17).

В силу свойств функций $\widetilde{\rho}(r)$ и $\varphi(\alpha)$ по критерию $(\widetilde{\rho}, \varphi)$ возможен однозначный выбор параметров.

Теорема 3. *Пусть выполнено* (20) *и параметры* r_Δ *и* α_σ *выбраны по критерию* $(\widetilde{\rho}, \varphi)$*. Тогда*

$$|\widetilde{x}_{\Delta\sigma} - x^*| \to 0 \quad \textit{при} \quad \Delta \to \mu_B, \ \ \sigma \to \widetilde{\mu}_\Delta,$$

где $\widetilde{x}_{r_\Delta \alpha_\sigma} = \widetilde{x}_{\Delta\sigma}$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{x}_\Delta$ — точка минимума функционала (3) при $r = r_\Delta$ и возмущенных данных. Тогда получим

$$r_\Delta \|B_h \widetilde{x}_\Delta - z_\delta\|^2 + \|A_t \widetilde{x}_\Delta - y_\tau\|^2 \le r_\Delta \|B_h x^* - z_\delta\|^2 + \|A_t x^* - y_\tau\|^2.$$

Используя (21), (19) и аналогичное неравенство $\|A_t x^* - y_\tau\| < \mu_A + tC + \tau$, находим $r_\Delta \Delta^2 + \|A_t \widetilde{x}_\Delta - y_\tau\|^2 \le r_\Delta \Delta^2 + \|A_t x^* - y_\tau\|^2$. Следовательно,

$$\|B_h \widetilde{x}_\Delta - z_\delta\| = \Delta, \quad \|A_t \widetilde{x}_\Delta - y_\tau\| < \mu_A + tC + \tau. \tag{22}$$

Имеем далее

$$\mu_B \le \|B\widetilde{x}_\Delta - z\| \le \|B_h \widetilde{x}_\Delta - z_\delta\| + \|(B_h - B)\widetilde{x}_\Delta\| + \|z_\delta - z\| \le \Delta + h|\widetilde{x}_\Delta| + \delta;$$
$$\|A\widetilde{x}_\Delta - y\| \le \mu_A + tC + \tau + t|\widetilde{x}_\Delta| + \tau.$$

Из (12) следует $|\widetilde{x}_\Delta| \le (1+\varepsilon)|\widetilde{x}_\Delta|_{h,t}$, а ограниченность $|\widetilde{x}_\Delta|_{h,t}$ вытекает из (22) и условия аппроксимации (11).

Таким образом, семейства $\{B\widetilde{x}_\Delta\}$, $\{A\widetilde{x}_\Delta\}$, $\{\widetilde{x}_\Delta\}$ ограничены, а значит, слабо компактны. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 1 и не осложняя обозначений, имеем $\widetilde{x}_\Delta \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$, $B\widetilde{x}_\Delta \xrightarrow{\text{сл.}} Bx_0$, $A\widetilde{x}_\Delta \xrightarrow{\text{сл.}} Ax_0$ при $h, t, \delta, \tau \to 0$, т. е. при $\Delta \to \mu_B$. Тот факт, что $x_0 \in D^\perp$, а значит, $x_0 = x^*$, вытекает из того, что аналогично (13) $\lim\limits_{\Delta \to \mu_B} (\widetilde{x}_\Delta - Q^\perp \widetilde{x}_\Delta) = \lim\limits_{\Delta \to \mu_B} Q\widetilde{x}_\Delta = 0$. В результате $|\widetilde{x}_\Delta - x^*| \to 0$ при $\Delta \to \mu_B$.

Зададим число $\varepsilon > 0$ и предположим, что

$$|\widetilde{x}_\Delta - x^*| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}} \ \text{ при } \ \Delta - \mu_B < \omega_1.$$

Зафиксируем Δ. В силу экстремальных свойств элементов $\widetilde{x}_{\Delta\sigma}$ и $\widetilde{x}_\Delta$

$$\sigma^2 = \|\widetilde{\Gamma}_\Delta \widetilde{x}_{\Delta\sigma} - \widetilde{g}_\Delta\|^2 + \alpha_\sigma \|\widetilde{x}_{\Delta\sigma}\|^2 \le \|\widetilde{\Gamma}_\Delta \widetilde{x}_\Delta - \widetilde{g}_\Delta\|^2 + \alpha_\sigma \|\widetilde{x}_\Delta\|^2 \le \|\widetilde{\Gamma}_\Delta \widetilde{x}_{\Delta\sigma} - \widetilde{g}_\Delta\|^2 + \alpha_\sigma \|\widetilde{x}_\Delta\|^2.$$

Отсюда $\|\widetilde{\Gamma}_\Delta \widetilde{x}_{\Delta\sigma} - \widetilde{g}_\Delta\| \leq \sigma$, $\|\widetilde{x}_{\Delta\sigma}\| \leq \|\widetilde{x}_\Delta\|$, что позволяет утверждать $|\widetilde{x}_{\Delta\sigma} - \widetilde{x}_\Delta| \to 0$ при $\sigma \to \widetilde{\mu}_\Delta$. Следовательно, существует $\omega_2 > 0$ такое, что

$$|\widetilde{x}_{\Delta\sigma} - \widetilde{x}_\Delta| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}} \text{ при } \sigma - \widetilde{\mu}_\Delta < \omega_2.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$ такие, что при $\Delta - \mu_B < \omega_1$, $\sigma - \widetilde{\mu}_\Delta < \omega_2$ выполняется неравенство

$$|\widetilde{x}_{\Delta\sigma} - x^*| \leq \sqrt{2}(|\widetilde{x}_{\Delta\sigma} - \widetilde{x}_\Delta| + |\widetilde{x}_\Delta - x^*|) < \varepsilon. \quad \square$$

Литература

1. Шафиев Р.А. *К теории методов регуляризации Тихонова–Лаврентьева* // ДАН СССР. – 1985. – Т. 282. – № 4. – С. 804–808.
2. Морозов В.А. *Регулярные методы решения некорректно поставленных задач.* – М.: Наука, 1987. – 240 с.
3. Шафиев Р.А., Кугель М.Я. *О двупараметрическом методе регуляризации L-псевдообращения и принципе выбора параметров регуляризации* // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук. – 1984. – Т. 5. – № 6. – С. 24–29.
4. Groetsch C.W. *Regularization with linear equality constraints* // Lect. Notes Math. – 1986. – № 1225. – P. 168–181.
5. Шафиев Р.А. *Псевдообращение операторов и некоторые приложения.* – Баку: Элм, 1989. – 152 с.
6. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* – М.: Мир, 1972. – 740 с.
7. Мелешко В.И. *Возмущения неограниченных замкнутых псевдообратных операторов* // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15. – № 4. – С. 681–694.
8. Маслов В.П. *Существование решения некорректной задачи эквивалентно сходимости регуляризованного процесса* // УМН. – 1968. – Т. 23. – Вып. 3. – С. 183–184.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1986. – 288 с.
10. Лисковец О.А. *Вариационные методы решения неустойчивых задач.* – Минск: Наука и техника, 1981. – 343 с.

Нижегородский государственный педагогический университет

Поступила 29.06.1999