ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 11 (474)

УДК 514.76

*И.Г. ШАНДРА*

# О ВПОЛНЕ ИДЕМПОТЕНТНЫХ ПСЕВДОСВЯЗНОСТЯХ НА ПОЛУРИМАНОВЫХ И ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И КОНЦИРКУЛЯРНЫХ ПОЛЯХ

## Введение

Данная работа представляет собой продолжение серии работ автора, посвященных теории псевдосвязностей [1]–[3]. Первый параграф носит вводный характер, здесь приводятся некоторые факты из теории вполне идемпотентных псевдосвязностей. Аппарат этой теории применяется во втором параграфе для построения канонической связности псевдориманова пространства почти произведения и изложения в терминах этой связности классификации Навьеры [4], а также в третьем и четвертом параграфах для изучения специальных классов конциркулярных полей на полуримановом пространстве (многообразии с вырожденной метрикой). Исследования ведутся локально, в классе достаточно гладких функций.

## 1. Идемпотентные псевдосвязности и полуримановы пространства почти произведения

1. Пусть $M$ — гладкое $n$-мерное многообразие, $\mathcal{F}(M)$ — кольцо гладких функций на $M$, $\mathfrak{X}(M)$ — алгебра Ли гладких векторных полей на $M$, а $X$, $Y$, $Z$, $W$ — произвольные гладкие векторные поля на M.

**Определение 1** ([5]). Пара операторов $(h;\nabla)$, где $\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ и $h$ — тензорное поле типа $(1;1)$ на $M$, удовлетворяющих условиям

$$\nabla_X(fY+Z) = f\nabla_X Y + X(f)hY + \nabla_X Z,$$
$$\nabla_{fX+Y}Z = f\nabla_X Z + \nabla_Y Z \quad \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M),\ \ f\in\mathcal{F}(M),$$

называется *линейной псевдосвязностью* на $M$.

**Определение 2.** Пара операторов $(h;Q)$, где $Q : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ и $h$ — тензорное поле типа $(1;1)$ на $M$, удовлетворяющих условиям

$$Q_X(fY+Z) = fQ_X Y + hX(f)Y + Q_X Z,$$
$$Q_{fX+Y}Z = fQ_X Z + Q_Y Z \quad \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M),\ \ f\in\mathcal{F}(M),$$

называется *линейной квазисвязностью* на $M$.

В случае $h = \mathrm{id}$ линейная псевдосвязность (квазисвязность) является линейной связностью на $M$.

**Определение 3** ([5]). Тензоры

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - h[X,Y], \tag{1}$$
$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X X - \nabla_{[X,Y]}Z, \tag{2}$$
$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}\, R(X,Y)$$

называются соответственно *тензором кручения*, *тензором кривизны* и *тензором Риччи* псевдосвязности $(h;\nabla)$.

**Определение 4** ([1], [2]). Линейную псевдосвязность $(h;\nabla)$ будем называть *почти идемпотентной*, если $h^2 = h$. В этом случае $h$ будем называть *горизонтальным проектором*, а $v = \mathrm{id} - h$ — *вертикальным*. Почти идемпотентная псевдосвязность называется *вполне идемпотентной* или *полусвязностью*, если

$$\nabla_X Y = h\nabla_X(hY). \tag{3}$$

Если на $M$ существует вполне идемпотентная псевдосвязность, то на нем существует также и квазисвязность $\overset{o}{Q}$, определяемая соотношениями [1]

$$\overset{o}{Q}_X Y = \nabla_{hX} Y + v[hX, vY].$$

Из (1), (2) на основании (3) вытекает, что тензоры кручения и кривизны вполне идемпотентной псевдосвязности удовлетворяют условиям

$$\text{a) } vS(X,Y) = 0; \quad \text{b) } S(vX, vY) = -h[vX, vY], \tag{4}$$

$$vR(X,Y)Z = R(X,Y)vZ = 0. \tag{5}$$

Пусть $\omega^i_j$ — компоненты 1-формы вполне идемпотентной псевдосвязности $(h;\nabla)$ в репере $\{e_i\}$ на $M$. Тогда соотношения (1), (2), (4), (5) могут быть представлены в виде следующих уравнений (называемых *структурными уравнениями вполне идемпотентной псевдосвязности*):

$$h^i_t d\omega^t = \omega^t \wedge \omega^i_t + \Omega^i, \tag{6}$$

$$h^i_t d\omega^t_j = \omega^t_j \wedge \omega^i_t + \Omega^i_j, \tag{7}$$

$$h^i_t dh^t_j = \omega^i_j - h^i_t \omega^t_k h^k_j + \Omega^i_j, \tag{8}$$

$$h^i_t \Omega^t = \Omega^i, \quad h^i_t \Omega^t_j = \Omega^i_t h^t_j = \Omega^i_j,$$

где $\{\omega^i\}$ — двойственный базис к $\{e_i\}$, $\Omega^i = \frac{1}{2} S^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k$ — 2-форма кручения, $\Omega^i_j = \frac{1}{2} R^i_{jkl} \omega^k \wedge \omega^l$ — 2-форма кривизны, индексы $i, j, k, \ldots$ здесь и ниже, если это не оговорено особо, принимают значения от 1 до $n$.

Внешнее дифференцирование уравнений (6), (7) с учетом (8) приводит к соотношениям

$$h^i_t d\Omega^t + \omega^i_t \wedge \Omega^t = \Omega^i_t \wedge \omega^t, \quad h^i_s h^t_j d\Omega^s_t + \omega^i_s \wedge \Omega^s_j - \omega^s_j \wedge \Omega^i_s = 0, \tag{9}$$

называемым *первым и вторым тождествами Бианки* для вполне идемпотентной псевдосвязности $(h;\nabla)$.

2. **Определение 5.** Пусть $g$ и $h$ — тензорные поля на $M$ типа $(0;2)$ и $(1;1)$ соответственно. Пару $(g,h)$ будем называть *$HR$-структурой* ранга $r$ на $M$, если выполняются условия [1], [2]

$$\text{a) } h^2 = h; \quad \text{b) } g(hX, Y) = g(X,Y) = g(Y,X); \quad \text{c) } \operatorname{rk} h = \operatorname{rk} g = r\ (\leq n). \tag{10}$$

Многообразия, на которых задана $HR$-структура ранга $r$, будем называть *полуримановыми пространствами почти произведения* и обозначать через $V^r_n$.

Для всякой $HR$-структуры $(g;h)$ на $M$ существует единственная вполне идемпотентная псевдосвязность $(h;\nabla)$, удовлетворяющая условиям [1]

$$\text{a) } \nabla_X g = 0; \quad \text{b) } g(S(X,hY),Z) = g(S(X,hZ),Y). \tag{11}$$

Эта псевдосвязность названа автором *псевдосвязностью Леви-Чивита* [1], поскольку в регулярном случае ($r = n$) в силу (10), (11) она совпадает со связностью Леви-Чивита. Данная псевдосвязность задается соотношениями [1]

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y,Z) + (hY)g(X,Z) - (hZ)g(X,Y) + \\ + g([hY,X],Z) + g([hZ,X],Y) - g(X,[hZ,hY]). \quad (12)$$

Для тензоров кручения и кривизны псевдосвязности Леви-Чивита наряду с условиями (4), (5) выполняются также условия [1]

$$\text{a) } R(Z,W,X,Y) = -R(W,Z,X,Y); \quad \text{b) } S(hX,hY) = 0, \quad (13)$$

$$2S(Z,hX,vY) = -(vY)g(X,Z) + g([vY,hX],Z) + g(X,[vY,hZ]), \quad (14)$$

где $R(Z,W,X,Y) = g(R(X,Y)W,Z)$, $S(Z,X,Y) = g(S(X,Y),Z)$.

## 2. Каноническая связность псевдориманова пространства почти произведения

1. Пусть на псевдоримановом пространстве $(M, G = \langle\ ,\ \rangle)$ задано поле линейного оператора $F$ такого, что

$$\text{a) } F^2 = \mathrm{id}; \quad \text{b) } \langle FX, FY\rangle = \langle X, Y\rangle. \quad (15)$$

В этом случае говорят, что на $M$ задана *псевдориманова структура почти произведения* $(F, G)$. Пусть

$$h = \frac{1}{2}(\mathrm{id} + F), \quad v = \frac{1}{2}(\mathrm{id} - F) \quad (16)$$

— соответствующие $F$ горизонтальный и вертикальный проекторы. Обозначим через $\overset{o}{\nabla}$ риманову свяность, соответствующую $G$, и через $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{V}$ — соответственно горизонтальное и вертикальное распределения ($\mathfrak{H} = \mathrm{Im}\ h$, $\mathfrak{V} = \mathrm{Im}\, v$).

Классификация А. Навьеры римановых пространств почти произведения, изложенная в редакции Гил-Медрано [6], строится путем наложения некоторых условий на распределения $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{V}$. Для определенности сформулируем их в терминах горизонтального распределения:

1) $\mathbf{\Delta}$: нет условий,
2) $\mathbf{F}$ (слоение): $(\overset{o}{\nabla}_{hX} F)hY = (\overset{o}{\nabla}_{hY} F)hX$,
3) $\mathbf{D}_1$ (минимальное распределение): $\beta^H(X) = 0$,
4) $\mathbf{D}_2$ (омбилическое распределение): $rB^H(X,Y,Z) = 2\beta^H(Z)\langle X, Y\rangle$,
5) $\mathbf{AF}$ (антислоение): $(\overset{o}{\nabla}_{hX} F)hY = -(\overset{o}{\nabla}_{hY} F)hX$,
6) $\mathbf{F}_1$ (минимальное слоение): $\mathbf{F} \cap \mathbf{D}_1$,
7) $\mathbf{F}_2$ (омбилическое слоение): $\mathbf{F} \cap \mathbf{D}_2$,
8) $\mathbf{TGF}$ (вполне геодезическое слоение): $(\overset{o}{\nabla}_{hX} F)Y = 0$,

где $r = \dim \mathfrak{H}$, $B^H(X,Y,Z) = \langle b^H(X,Y), Z\rangle$, $\beta^H(Z)$ — результат свертывания $B^H(X,Y,Z)$ по аргументам $X$ и $Y$ с контравариантным метрическим тензором.

**Замечание 1.** Таким образом, вся информация о типе пространства заключена в тензоре $C^H(X,Y) = (\overset{o}{\nabla}_{hX} F)hY$, который может быть разложен на три неприводимые компоненты. Так тип $\mathbf{F}$ характеризуется обращением в нуль кососимметрической составляющей тензора $C^H$, тип $\mathbf{D}_1$ — обращением в нуль следа симметрической составляющей тензора $C^H$, тип $\mathbf{D}_2$ — обращением в нуль бесследовой части симметрической составляющей тензора $C^H$. Последующие типы 5)–8) суть пересечение вышеназванных ($\mathbf{AF} = \mathbf{D}_1 \cap \mathbf{D}_2$, $\mathbf{TGF} = \mathbf{AF} \cap \mathbf{F}$).

Классы Навьеры определяются парами условий $(\mathbf{D}^H, \mathbf{D}^V)$, где $\mathbf{D}^H$ и $\mathbf{D}^V$ – условия вышеуказанных типов для распределений $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{V}$ соответственно.

2. Пусть на $M$ задана псевдориманова структура почти произведения $(F, G = \langle\ ,\ \rangle)$. Задание такой структуры порождает на $M$ две $HR$-структуры $(h, G^H)$ и $(v, G^V)$, где $G^H(X,Y) = G(hX, hY)$, $G^H(X,Y) = G(vX, vY)$. Условие (15 b) равносильно тому, что $G(hX, vY) = 0$, т. е. $G = G^H + G^V$.

**Теорема 1.** *Пусть $(F,G)$ — псевдориманова структура почти произведения на $M$, тогда на $M$ существует единственная связность $\widehat{\nabla}$, удовлетворяющая условиям*

$$\text{a) } \widehat{\nabla} F = 0; \quad \text{b) } \widehat{\nabla} G = 0, \tag{17}$$

$$\langle \widehat{S}(X,Y), Z\rangle + \langle \widehat{S}(X,FY), FZ\rangle = \langle \widehat{S}(X,Z), Y\rangle + \langle \widehat{S}(X,FZ), FY\rangle, \tag{18}$$

*где $\widehat{S}(X,Y)$ — тензор кручения связности $\widehat{\nabla}$.*

**Доказательство.** Условия (17) равносильны соотношениям

$$\langle \widehat{S}(X,hY), hZ\rangle = \langle \widehat{S}(X,hZ), hY\rangle,$$
$$\langle \widehat{S}(X,vY), vZ\rangle = \langle \widehat{S}(X,vZ), vY\rangle.$$

Принимая это во внимание, нетрудно убедиться, что искомая связность задается соотношениями

$$\widehat{\nabla} = \widehat{\nabla}^H + \widehat{\nabla}^V, \tag{19}$$

где $(h, \widehat{\nabla}^H)$ и $(v, \widehat{\nabla}^V)$ – псевдосвязности Леви-Чивита, соответствующие $HR$-структурам $(h, G^H)$ и $(v, G^V)$. $\square$

**Следствие 1.** Пусть $(J,G)$ — почти антиэрмитова структура на $M$, тогда на $M$ существует единственная связность $\widehat{\nabla}$, удовлетворяющая условиям

$$\text{a) } \widehat{\nabla} J = 0; \quad \text{b) } \widehat{\nabla} G = 0, \tag{20}$$

$$\langle \widehat{S}(X,Y), Z\rangle + \langle \widehat{S}(X,JY), JZ\rangle = \langle \widehat{S}(X,Z), Y\rangle + \langle \widehat{S}(X,JZ), JY\rangle. \tag{21}$$

**Доказательство.** Почти антиэрмитова структура $(J,G)$ на $M$ задается соотношениями

$$\text{a) } J^2 = -\operatorname{id}; \quad \text{b) } \langle JX, JY\rangle = -\langle X, Y\rangle.$$

Линейный оператор

$$F = i \cdot J, \tag{22}$$

определенный на комплексификации $X(M)\otimes\mathbb{C}$, удовлетворяет условиям (15). Поэтому из теоремы 1 вытекает существование связности $\widehat{\nabla}$, для которой выполнены соотношения (17), (18), равносильные на основании (22) соотношениям (20), (21). Учитывая, что горизонтальный и вертикальный проекторы в силу (15), (22) представляют собой пару комплексно-сопряженных операторов, нетрудно проверить, что оба слагаемых в правой части уравнения (19) также комплексно-сопряженны. Поэтому полученная связность будет вещественной как сумма двух комплексно-сопряженных псевдосвязностей. $\square$

**Определение 6.** Линейную связность $\widehat{\nabla}$ на $M$, удовлетворяющую условиям (18), (19), будем называть *канонической связностью* псевдориманова пространства почти произведения.

3. Пусть $\widehat{\nabla}$ и $\overset{o}{\nabla}$ — соответственно каноническая и риманова связности на псевдоримановом пространстве почти произведения $(M,G,F)$ и $T=\widehat{\nabla}-\overset{o}{\nabla}$ — тензор деформации. Так как обе связности являются метрическими, то тензор $T$ задается соотношениями

$$2\langle T(X,Y),Z\rangle=\langle\widehat{S}(X,Y),Z\rangle-\langle\widehat{S}(Y,Z),X\rangle-\langle\widehat{S}(X,Z),Y\rangle.$$

Отсюда на основании (18) легко может быть получено

**Утверждение.** *Тензор кручения канонической связности удовлетворяет следующим условиям*:

$$2\langle hZ,(\overset{o}{\nabla}_{vX}F)vY\rangle=\langle\widehat{S}(vX,vY),hZ\rangle-2\langle\widehat{S}(vY,hZ),vX\rangle, \tag{23}$$

$$2\langle vZ,(\overset{o}{\nabla}_{hX}F)hY\rangle=\langle\widehat{S}(hX,hY),vZ\rangle-2\langle\widehat{S}(hY,vZ),hX\rangle. \tag{24}$$

Тензоры $C^H(X,Y)=(\overset{o}{\nabla}_{vX}F)vY$ и $C^V(X,Y)=(\overset{o}{\nabla}_{hX}F)hY$, как отмечалось в замечании 1, несут всю информацию о геометрии горизонтального и вертикального распределений. Поэтому на основании (23), (24) классификация Навьеры может быть легко переписана в терминах тензора кручения канонической связности. Покажем, как это делается для некоторых классов Навьеры:

1) $(\mathbf{TGF},\mathbf{TGF})\Longleftrightarrow\widehat{S}(X,Y)=0$;
2) $(\mathbf{AF},\mathbf{TGF})\Longleftrightarrow\widehat{S}(hX,Y)=0$;
3) $(\mathbf{AF},\mathbf{F})\Longleftrightarrow h\widehat{S}(X,Y)=0$;
4) $(\mathbf{AF},\mathbf{AF})\Longleftrightarrow\widehat{S}(hX,vY)=0$;
5) $(\mathbf{F_2},\mathbf{F_2})\Longleftrightarrow\widehat{S}(X,Y)=\tau(X)Y-\tau(Y)X$;
6) $(\mathbf{TGF},\mathbf{F_2})\Longleftrightarrow\widehat{S}(X,Y)=\tau(X)vY-\tau(Y)vX$,

где $\tau(X)$ — некоторое ковекторное поле на $M$.

## 3. Концикулярные поля на многообразиях с вполне идемпотентной псевдосвязностью

Концикулярные поля играют важную роль в различных разделах теорий геодезических отображений, проективных и конформных преобразований и в этой связи изучались многими математиками [7]–[11].

1. **Определение 7.** Векторное поле $\Phi$ на пространстве $V_n^r$ будем называть *концикулярным*, если оно удовлетворяет условиям

$$\text{a) } v\Phi=0;\quad \text{b) } \nabla_X\Phi=\rho\cdot hX \tag{25}$$

при некотором скалярном поле $\rho$. Будем говорить, что концикулярное поле относится к *основному типу*, если $\rho\neq0$, и — к *исключительному типу* в противном случае.

Из определения следует $\nabla_{vX}\Phi=0$, т. е. концикулярное поле параллельно вдоль вертикальных кривых. Очевидно также, что в случае $h=\mathrm{id}$ приходим к классическому определению концикулярного векторного поля на псевдоримановом пространстве.

Условия интегрируемости уравнений (25 b), записанные в форме тожества Риччи, в силу (2) имеют вид

$$R(X,Y)\Phi=X(\rho)\cdot hY-Y(\rho)\cdot hX+\rho\cdot S(X,Y). \tag{26}$$

Отсюда следует

$$\mathrm{Ric}(\Phi,X)=r\cdot X(\rho)-hX(\rho)+\rho\cdot s(X), \tag{27}$$

где $s(Y) = \mathrm{tr}(X \to S(X,Y))$. Полагая в этих соотношениях $X := hX$, получаем

$$\mathrm{Ric}(\Phi, X) = (r-1)hX(\rho) - \rho \cdot s(hX). \tag{28}$$

Таким образом, из (27), (28) вытекает, что

$$X(\rho) = \frac{1}{(r-1)}(\mathrm{Ric}(\Phi, hX) + \rho \cdot s(hX)) - \frac{1}{r}(\mathrm{Ric}(\Phi, vX) + \rho \cdot s(vX)). \tag{29}$$

Совокупность уравнений (25), (29) носит замкнутый характер и, рассмотренная в локальных координатах, представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений в форме Коши относительно неизвестных функций $\Phi^i$ и $\rho$. Условия интегрируемости этих уравнений и их дифференциальные продолжения являются линейными однородными алгебраическими уравнениями. Линейное пространство решений уравнений (25), (29) будем обозначать через $\mathrm{Con}(V_n^r)$. Из сказанного выше следует, что $\dim \mathrm{Con}(V_n^r) \leq r+1$. Анализ условий интегрируемости уравнений (25), (29) подобно тому, как это делалось в ([8], с. 137), приводит к следующим утверждениям.

**Теорема 2.** *Пространства $V_n^r$, удовлетворяющие условиям*

$$\Pi(X,Y) = M(Z,X,Y) = 0, \tag{30}$$

*и только они имеют размерность пространства концициркулярных векторных полей основного типа, равную $r+1$, где*

$$\Pi(X,Y) = S(X,Y) - \frac{1}{r}(s(vY)hX - s(vX)hY),$$
$$M(Z,X,Y) = R(X,Y)Z + \frac{1}{r}(\mathrm{Ric}(hZ, vX)hY - \mathrm{Ric}(hZ, vY)hX).$$

**Теорема 3.** *Число линейно независимых концициркулярных полей основного типа на полуримановых пространствах, отличных от пространств, удовлетворяющих условиям* (30)*, не превышает $r-1$.*

Ниже будет показано, что оценка, указанная в теореме 3, является точной.

2. Пусть $\Phi$ — концициркулярное векторное поле на полуримановом пространстве $V_n^r$, $\phi(X)$ — сопряженное ему относительно $g$ ковекторное поле ($\phi(X) = g(X,\Phi)$), $\nabla$ — псевдосвязность Леви-Чивита, соответствующая $HR$-структуре $(g;h)$.

**Замечание 2.** Концициркулярное векторное поле основного типа $\Phi$ на полуримановом пространстве неизотропно. Действительно, пусть $l = g(\Phi,\Phi)$, тогда из соотношений (25) вытекает

$$X(l) = \rho\phi(X). \tag{31}$$

Следовательно, если $l = \mathrm{const}$, то $\rho = 0$. А это противоречит тому, что $\Phi$ — концициркулярное векторное поле основного типа. Однако $vX(l) = 0$, т. е. вдоль вертикальных кривых длина вектора $\Phi$ постоянна, значит, $l$ является интегралом вертикального распределения.

Соотношения (26) на $V_n^r$ могут быть переписаны в эквивалентной форме

$$R(Z,\Phi,X,Y) = g(Y,Z)X(\rho) - g(X,Z)Y(\rho) + \rho S(Z,X,Y). \tag{32}$$

Полагая в (32) $Z = \Phi$ и учитывая (13 а), находим

$$g(Y,\Phi)X(\rho) - g(X,\Phi)Y(\rho) + \rho S(\Phi,X,Y) = 0.$$

Эти уравнения, как легко видеть, в силу (10 b), (13 b) для конциркулярного поля основного типа равносильны следующим трем соотношениям:

$$hX(\rho)\cdot\phi(Y) - hY(\rho)\cdot\phi(X) = 0, \tag{33a}$$

$$\rho S(\Phi, hX, vY) = vY(\rho)\cdot\phi(X), \tag{33b}$$

$$S(\Phi, vX, vY) = 0. \tag{33c}$$

Из (33 a) вытекает

$$hX(\rho) = K\phi(X), \tag{34}$$

где $K$ — некоторая скалярная функция.

2. **Определение 8.** Векторное поле $B$ на $M$ называется *инфинитезимальной симметрией* распределения $\mathfrak{D}$, если $[B, X] \in \mathfrak{D}$ для любого $X \in \mathfrak{D}$. Совокупность $S(\mathfrak{D})$ всех инфинитезимальных симметрий распределения $\mathfrak{D}$ является $\mathbb{R}$-алгеброй Ли относительно операции коммутирования [12]. Если $B \in \mathfrak{D} \cap S(\mathfrak{D})$, то $B$ называется *характеристической* или *тривиальной инфинитезимальной* симметрией распределения $\mathfrak{D}$. Совокупность $\mathrm{Char}(\mathfrak{D})$ всех характеристических инфинитезимальных симметрий распределения $\mathfrak{D}$ образует идеал алгебры Ли $S(\mathfrak{D})$ [12].

**Замечание 3.** Векторное поле $B$ на $V_n^r$ является симметрией горизонтального распределения $\mathfrak{H}$, т. е. удовлетворяет условию

$$v[B, hY] = 0, \tag{35}$$

тогда и только тогда, когда $v\mathfrak{L}_B h = 0$, где $\mathfrak{L}_B$ — производная Ли в направлении векторного поля $B$. Действительно, в справедливости этого утверждения легко убедиться, рассмотрев выражение для производной Ли проектора $h$

$$(\mathfrak{L}_B h)(Y) = v[B, hY] - h[B, vY]. \tag{36}$$

Аналогично, для вертикального распределения $\mathfrak{V}$ из (36) следует, что $B \in S(\mathfrak{V})$, т. е. выполняется условие $h[B, vY] = 0$, тогда и только тогда, когда $h\mathfrak{L}_B h = 0$.

**Определение 9.** Будем говорить, что векторное поле $B$ задает *инфинитезимальное конформное преобразование* на пространстве $V_n^r$, если $\mathfrak{L}_B g = \mu \cdot g$. При этом случай $\mu \neq 0$ соответствует *нетривиальному* инфинитезимальному конформному преобразованию, а случай $\mu = 0$ — *тривиальному* инфинитезимальному конформному преобразованию (*инфинитезимальной изометрии*).

Инфинитезимальное конформное преобразование $B$ будем называть
*инфинитезимальным конформным движением* пространства $V_n^r$, если $\mathfrak{L}_B h = 0$,
*инфинитезимальным конформным $SH$-движением* пространства $V_n^r$, если $v\mathfrak{L}_B h = 0$,
*инфинитезимальным конформным $SV$-движением* пространства $V_n^r$, если $h\mathfrak{L}_B h = 0$.

**Определение 10.** Конциркулярное векторное поле $\Phi$ на пространстве $V_n^r$ будем называть *специальным*, если

$$\text{a) } hX(\rho) = Kf(X); \quad \text{b) } hX(K) = 0, \tag{37}$$

*горизонтально сходящимся*, если

$$hX(\rho) = 0, \tag{38}$$

*сходящимся*, если

$$X(\rho) = 0, \tag{39}$$

*$L$-концциркулярным*, если

$$vXhY(\ln|\rho|) = v[vX, hY](\ln|\rho|), \tag{40}$$

*$SV$-концциркулярным*, если $h\mathfrak{L}_\Phi h = 0$,
*$SH$-концциркулярным*, если $v\mathfrak{L}_\Phi h = 0$,
*$S$-концциркулярным*, если $\mathfrak{L}_\Phi h = 0$,
*$P$-концциркулярным*, если

$$(\nabla\rho)(v[hX, \Phi]) = 0. \tag{41}$$

**Замечание 4.** Сходящиеся и специальные концциркулярные поля обобщают одноименные типы полей, изучавшиеся на псевдоримановых пространствах соответственно в [7] и [10]. Остальные типы концциркулярных полей не имеют аналогов в регулярном случае.

**Замечание 5.** Соотношения (36) с учетом (1) и (3) могут быть преобразованы к виду

$$(\mathfrak{L}_{hX}h)(Y) = v[hX, hY] + \nabla_{vY}hX + S(hX, vY). \tag{42}$$

Из условий (42) следует, что концциркулярное векторное поле $\Phi$ является $SV$-концциркулярным тогда и только тогда, когда

$$S(\Phi, vY) = 0. \tag{43}$$

Для $SV$-концциркулярного поля $\Phi$ основного типа эти условия в силу (33 b) эквивалентны тому, что

$$vX(\rho) = 0. \tag{44}$$

**Замечание 6.** Производная Ли метрики $g$ в силу (1) и (3) задается выражением

$$(\mathfrak{L}_{hX}g)(Y, Z) = g(\nabla_{hX}Y, Z) + g(\nabla_{hX}Z, Y) + S(Z, hX, Y) + S(Y, hX, Z).$$

Отсюда на основании (25 a), (43) заключаем, что для $VS$-концциркулярного поля $\Phi$ справедливы соотношения

$$(\mathfrak{L}_{hX}g)(Y, Z) = 2\rho \cdot g(Y, Z),$$

откуда следует, что $SV$-концциркулярные поля основного типа определяют на $V_n^r$ не тривиальные конформные $SV$-движения, а исключительного типа — изометрические $SV$-движения. Нетрудно убедиться в справедливости обратного утверждения: если концциркулярное поле определяет конформное преобразование на $V_n^r$, то оно является $SV$-концциркулярным.

**Замечание 7.** Соотношения (35), (44), в частности, показывают, что $SH$-концциркулярное и $SV$-концциркулярное поля являются $P$-концциркулярными. Из (38) на основании (34) получаем $(\nabla\rho)(v[hX, hY]) = 0$. Это говорит о том, что сходящееся поле также является $P$-концциркулярным.

3. Известно [10], что наличие двух и более линейно независимых концциркулярных полей на псевдоримановом пространстве приводит к тому, что любое концциркулярное поле на нем является специальным. Покажем, что подобный факт имеет место и в сингулярном случае при некоторых дополнительных ограничениях. Для этого докажем несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 1.** *Концциркулярное векторное поле $\Phi$ основного типа, отличное от горизонтально сходящегося, является $L$-концциркулярным тогда и только тогда, когда*

$$\rho^2 = Kf, \tag{45}$$

*где*

$$vX(f) = 0, \tag{46}$$

*а $K$ — скалярная функция, участвующая в уравнениях* (34).

**Доказательство.** Действительно, дифференцируя (34) в направлении $vY$ и учитывая (40), имеем $vY(\ln|K/\rho^2|)\cdot\phi(X)=0$. Следовательно, $vX(\ln|K/\rho^2|)=0$. А это в свою очередь приводит к (45), (46). Обратно, прологарифмировав (45), а затем продифференцировав полученное сначала в направлении $vY$, а потом в направлении $hX$, на основании (34) и (46) получим $hXvY(\ln|\rho|)=h[hX,vY](\ln|\rho|)$, что, как легко видеть, равносильно (40). □

**Лемма 2.** *Пусть $\Phi$ и $\overline{\Phi}$ – два линейно независимых конциркулярных поля основного типа на $V_n^r$, тогда*

$$\text{a) } K=\overline{K};\quad \text{b) } vX(\ln|\rho|)=vX(\ln|\overline{\rho}|). \tag{47}$$

**Доказательство.** Полагая в соотношениях (33 a), (33 b) $X=\overline{\Phi}$ и учитывая (34), получаем

$$\text{a) } (K-\overline{K})(\phi(X)\overline{\phi}(Y)-\phi(Y)\overline{\phi}(X));\quad \text{b) } (vX(\ln|\rho|)-vX(\ln|\overline{\rho}|))g(\Phi,\overline{\Phi})=0. \tag{48}$$

Из (48 a) в силу линейной независимости $\Phi$ и $\overline{\Phi}$ следует (47 a). А из (48 b) вытекает, что либо имеет место (47 b), либо $g(\Phi,\overline{\Phi})=0$. Но последнее невозможно, т. к. в противном случае, продифференцировав эти соотношения, на основании (25) получили бы $\rho\overline{\phi}(X)+\overline{\rho}\phi(X)=0$, а это противоречит линейной независимости $\Phi$ и $\overline{\Phi}$. □

Непосредственно из (47 a) и (47 b) вытекает

**Следствие 2.** Если полуриманово пространство $V_n^r$ допускает специальное конциркулярное (соответственно $SV$-конциркулярное, $L$-конциркулярное, горизонтально сходящееся, сходящееся) векторное поле, то любое конциркулярное векторное поле на $V_n^r$ является специальным (соответственно $SV$-конциркулярным, $L$-конциркулярным, горизонтально сходящимся, сходящимся).

**Теорема 4.** *Если $V_n^r$ допускает два линейно независимых конциркулярных поля $\Phi$ и $\overline{\Phi}$ основного типа, то они оба являются $L$-конциркулярными.*

**Доказательство.** Действительно, дифференцируя (47 b) в направлении $hY$ и учитывая (34), получим $vX(\ln|K/\rho^2|)\cdot\phi(Y)=vX(\ln|\overline{K}/\overline{\rho}^2|)\cdot\overline{\phi}(Y)$. Отсюда в силу линейной независимости $\Phi$ и $\overline{\Phi}$ имеем

$$\text{a) } vX(\ln|K/\rho^2|)=0;\quad \text{b) } vX(\ln|\overline{K}/\overline{\rho}^2|=0.$$

Следовательно, на основании леммы 1 поля $\Phi$ и $\overline{\Phi}$ являются L-конциркулярными. □

**Теорема 5.** *Если $V_n^r$ допускает два линейно независимых $P$-конциркулярных поля $\Phi$ и $\overline{\Phi}$ основного типа, то они оба являются специальными.*

**Доказательство.** Из условий интегрируемости уравнений (33) следует

$$(\nabla\rho)(v[hX,hY])=hX(K)\cdot\phi(Y)-hY(K)\cdot\phi(X).$$

Полагая в этих соотношениях $Y=\Phi$, на основании (41) имеем

$$g(\Phi,\Phi)\cdot hX(K)-\Phi(K)\cdot\phi(X)=0. \tag{49}$$

Так как $\Phi$ неизотропно, то из (49) следует

$$hX(K)=\sigma\phi(X), \tag{50}$$

где $\sigma=\frac{\Phi(K)}{g(\Phi,\Phi)}$. Аналогичным образом получаем

$$hX(K)=\overline{\sigma}\overline{\phi}(X). \tag{51}$$

В силу линейной независимости $\Phi$ и $\overline{\Phi}$ условия (50), (51) дают $\sigma=\overline{\sigma}=0$. Следовательно, $hX(K)=0$. А это говорит о том, что $\Phi$ и $\overline{\Phi}$ — специальные конциркулярные поля. □

**Теорема 6.** *Пусть $V_n^r$ допускает $m$ $(> 1)$ линейно независимых $P$-конциркулярных полей основного типа $\overset{1}{\Phi},\dots,\overset{m}{\Phi}$, тогда*

$$1)\ hX(\overset{\alpha}{\rho}\cdot\overset{\beta}{\rho}-Kg(\overset{\alpha}{\Phi},\overset{\beta}{\Phi}))=0\quad\forall\alpha,\beta=1,\dots,m; \tag{52}$$

$$2)\ X(\mathrm{sign}(K)\sqrt{\overset{\alpha}{f}\cdot\overset{\beta}{f}}-g(\overset{\alpha}{\Phi},\overset{\beta}{\Phi}))=0\quad\forall\alpha,\beta=1,\dots,m; \tag{53}$$

3) *$V_n^r$ допускает группу изометрических преобразований, порядок которой не ниже, чем $\frac{m(m-1)}{2}$, и группу конформных преобразований, порядок которой не ниже, чем $\frac{m(m+1)}{2}$.*

**Доказательство.** Пусть выполнены условия утверждения, тогда на основании теорем 4 и 5 поля $\overset{1}{\Phi},\dots,\overset{m}{\Phi}$ являются специальными и $L$-конциркулярными. Следовательно,

$$\text{a)}\ hX(K)=0;\quad \text{b)}\ hX(\overset{\alpha}{\rho})=\sqrt{K\overset{\alpha}{f}}\quad\forall\alpha.$$

1) В справедливости (52) легко убедиться путем прямых вычислений с учетом (25), (37).

2) Подставляя в (52) выражения для $\overset{\alpha}{\rho}$ и $\overset{\beta}{\rho}$ и учитывая, что функции $\mathrm{sign}(K)\sqrt{\overset{\alpha}{f}\cdot\overset{\beta}{f}}-g(\overset{\alpha}{\Phi},\overset{\beta}{\Phi})$ в силу (25 b), (46) являются интегралами вертикального распределения, приходим к (53).

3) Рассмотрим два возможных случая.

1°. Все конциркулярные векторные поля на $V_n^r$ являются горизонтально сходящимися. Следовательно, $hX(\overset{\alpha}{\rho})=0\ \forall\alpha$. Принимая это во внимание, из (47 b) получаем $\overset{\alpha}{\rho}=\overset{\alpha}{C}\nu$, где $\overset{\alpha}{C}=\mathrm{const}$, $vX(\nu)=0$. На основании этих соотношений легко убедиться в том, что вектор $\overset{\alpha}{C}\overset{\beta}{\Phi}-\overset{\beta}{C}\overset{\alpha}{\Phi}$ является ковариантно постоянным. Поэтому базис пространства $\mathrm{Con}(V_n^r)$ может быть выбран таким образом, что $\overset{1}{\Phi}$ будет горизонтально сходящимся, а $\overset{2}{\Phi},\dots,\overset{m}{\Phi}$ — ковариантно постоянными. Тогда каждый из векторов

$$\overset{\alpha\beta}{X}=(\overset{1}{\rho})^{-1}(g(\overset{1}{\Phi},\overset{\alpha}{\Phi})\cdot\overset{\beta}{\Phi}-g(\overset{1}{\Phi},\overset{\beta}{\Phi})\cdot\overset{\alpha}{\Phi}),\quad\alpha,\beta=1,\dots,m;\ \alpha\neq\beta,$$

определяет инфинитезимальное изометрическое преобразование $V_n^r$, а каждый из векторов

$$\overset{\alpha}{X}=(\overset{1}{\rho})^{-1}\overset{\alpha}{\Phi},\quad\alpha=1,\dots,m,$$

определяет инфинитезимальное конформное преобразование $V_n^r$.

2°. Все конциркулярные векторные поля на $V_n^r$ не являются горизонтально сходящимися. Из (37), (45) вытекает, что

$$X(\sqrt{|\overset{\alpha}{f}|})=\sqrt{|K|}\cdot g(\overset{\alpha}{\Phi},X)=0.$$

Принимая это во внимание, нетрудно установить, что каждый из векторов

$$\overset{\alpha\beta}{X}=\sqrt{|\overset{\alpha}{f}|}\cdot\overset{\beta}{\Phi}-\sqrt{|\overset{\beta}{f}|}\cdot\overset{\alpha}{\Phi}\quad\forall\alpha,\beta=1,\dots,m;\ \alpha\neq\beta,$$

определяет инфинитезимальное изометрическое преобразование $V_n^r$, а каждый из векторов

$$\overset{\alpha}{X}=\frac{1}{\sqrt{|K|}}\overset{\alpha}{\Phi},\quad\alpha=1,\dots,m,$$

определяет инфинитезимальное конформное преобразование $V_n^r$. □

## 4. Каноническая форма метрики и горизонтального проектора полуримановых пространств, допускающих $SH$-концциркулярные векторные поля

1. Пусть $\Phi^i$ и $\Phi_i$ — соответственно контровариантные и ковариантные компоненты $SH$-концциркулярного поля основного типа в некоторой системе координат $(x^i)$ на $V^r_n$. Предположим, что система координат выбрана таким образом, что

$$\text{a) } x^1 = g(\Phi,\Phi); \quad \text{b) } x^1 = u^2, \dots, x^n = u^n,$$

где $u^2; \dots ; u^n$ являются функционально независимыми решениями уравнения $\Phi^i \partial_i u = 0$. Тогда вследствие (10), (31) в этой системе координат компоненты $SH$-концциркулярного поля, метрического тензора и горизонтального проектора имеют вид

$$\text{a) } \Phi_i = \frac{\delta^1_i}{2\rho}; \quad \text{b) } \Phi^i = 2\rho \cdot \delta^i_1,$$
$$\text{a) } g_{ij} = \begin{pmatrix} (4x^1 \cdot \rho^2)^{-1} & 0 \\ 0 & g_{\alpha\beta} \end{pmatrix}; \quad \text{b) } h^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^\beta_\alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta = 2, \dots, n$. В локальной системе координат уравнения (25 b) принимают следующий вид:

$$\partial_i \Phi_j - \Gamma^t_{ij} \Phi_t = \rho \cdot g_{ij}, \tag{54}$$

где, как это следует из (12),

$$2\Gamma^k_{ij} = g^{kt} \left( \partial_i g_{jt} + h^l_j \partial_l g_{it} - h^l_t \partial_l g_{ij} + g_{tl} \partial_i h^l_j - g_{tj} \partial_i h^l_t + g_{li} (\partial_k h^l_t - \partial_j h^k_t) \right). \tag{55}$$

Интегрируя уравнения (54), с учетом (55) подобно тому, как это делалось в ([8], с.94), приходим к следующим утверждениям.

**Теорема 7.** *Полуриманово пространство $V^r_n$ допускает $S$-концциркулярное поле основного типа тогда и только тогда, когда на нем может быть выбрана система координат, в которой компоненты метрического тензора $g_{ij}$ и горизонтального проектора $h^i_j$ приводятся к виду*

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \sigma(x^1)\widetilde{g}_{\alpha\beta}(x^\gamma) \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 2, \dots n, \tag{56}$$
$$h^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^\beta_\alpha(x^\gamma) \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta = 2, \dots, n,$$

*где $(h^\alpha_\beta(x^\gamma), g_{\alpha\beta}(x^\gamma))$ — компоненты некоторой $HR$-структуры полуриманова пространства $V^{r-1}_{n-1}$, $a = \pm 1$.*

**Теорема 8.** *Полуриманово пространство $V^r_n$ допускает $SH$-концциркулярное поле основного типа, не являющееся $S$-концциркулярным, тогда и только тогда, когда на нем может быть выбрана система координат, в которой компоненты метрического тензора $g_{ij}$ и горизонтального проектора $h^i_j$ приводятся к виду*

$$h^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h^I_J & h^I_\mu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} (4x^1 \cdot \rho^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & x^1 \widetilde{g}_{IJ} & x^1 \widetilde{g}_{IA} h^A_\mu \\ 0 & x^1 \widetilde{g}_{AJ} h^A_\nu & x^1 \widetilde{g}_{AB} h^B_\nu h^A_\mu \end{pmatrix},$$

*где индексы $I$, $J$, $A$, $B$ изменяются от 2 до $n-k$; $\mu$, $\nu$ — от $n-k+1$ до $n$; а $\rho(\neq 0)$ — произвольная функция от $x^1, x^{n-k+1} \dots, x^n$; $\tilde{g}_{IJ}$, $h^I_\nu$, $h^I_J$ — произвольные функции от $x^2, \dots, x^n$ такие, что*

$$\operatorname{rk}\|g_{IJ}\| = \operatorname{rk}\|h^I_J\| = r-1,$$
$$g_{IJ} = g_{JI} = g_{IA}h^A_J,$$
$$\text{a) } h^A_J h^I_A = h^I_J, \quad \text{b) } h^J_A h^A_\mu = h^J_\mu.$$

**Замечание 8.** Отметим, что к виду (56) приводится метрика любого псевдориманова пространства, допускающего конциркулярное поле основного типа ([8], с. 95).

**Пример** полуриманова пространства $V^r_n$, допускающего ровно $k$ линейно независимых конциркулярных полей. Пусть основная метрическая форма и горизонтальный проектор этого пространства в некоторой системе координат имеют соответственно вид

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2((dx^2)^2 + \dots + (dx^k)^2 + \\ + \exp(2x^{r+1})((dx^{k+1})^2 + \dots + (dx^r)^2)), \quad 2 \le k \le r-1, \tag{57}$$

$$h^i_j = \begin{pmatrix} \delta^{\tilde{i}}_{\tilde{j}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{i}, \tilde{j} = 1, \dots, r. \tag{58}$$

Вычислив в этой системе координат по формуле (55) с учетом (57), (58) компоненты псевдосвязности Леви-Чивита, получаем, что ненулевыми будут лишь блоки

$$\Gamma^{\hat{i}}_{\hat{j}1} = \frac{\delta^{\hat{i}}_{\hat{j}}}{x^1}, \quad \Gamma^1_{\hat{i}\hat{j}} = -x^1 g_{\hat{i}\hat{j}}, \quad \Gamma^\alpha_{\beta r+1} = \delta^\alpha_\beta, \quad \hat{i}, \hat{j} = 2, \dots, r; \ \alpha, \beta = k+1, \dots, r. \tag{59}$$

Рассмотрим в данной системе координат ковекторы

$$\overset{1}{\Phi}_i = x^1\delta^1_i, \quad \overset{2}{\Phi}_i = x^1\delta^1_i + \delta^2_i, \dots, \overset{k}{\Phi}_i = x^1\delta^1_i + \delta^k_i.$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что эти ковекторы удовлетворяют соотношениям (39), следовательно, являются сходящимися конциркулярными полями основного типа. Очевидно, они линейно независимы. Покажем, что данное пространство не допускает других конциркулярных полей, линейно независимых с данными. Предположим противное. Пусть $\overset{k+1}{\Phi}_i$ — компоненты конциркулярного поля основного типа линейно независимого с $\overset{1}{\Phi}, \dots, \overset{k}{\Phi}$. Так как $\overset{1}{\Phi}, \dots, \overset{k}{\Phi}$ являются сходящимися, то $\overset{k+1}{\Phi}$ на основании следствия 2 также является сходящимся. Поэтому на основании (43) имеют место соотношения

$$S^t_{ij}\overset{k+1}{\Phi}_t = 0.$$

Отсюда в силу (59) вытекает, что

$$S^\alpha_{\beta r+1}\overset{k+1}{\Phi}_\alpha = \Gamma^\alpha_{\beta r+1}\overset{k+1}{\Phi}_\alpha = \overset{k+1}{\Phi}_\beta = 0, \quad \alpha, \beta = k+1, \dots, r.$$

Следовательно, $\overset{k+1}{\Phi}$ является линейной комбинацией $\overset{1}{\Phi}, \dots, \overset{k}{\Phi}$, что противоречит нашему предположению. Значит, данное пространство допускает ровно $k$ $(\le r-1)$ линейно независимых конциркулярных полей основного типа. Этот факт показывает, что оценка, полученная в теореме 3 для $\dim \operatorname{Con}(V^r_n)$, является точной. Данный пример особенно интересен тем, что доказывает существование полуримановых пространств, допускающих $r-1$ линейно независимых конциркулярных полей основного типа. В регулярном случае (т. е. для псевдоримановых многообразий) таких пространств не существует [9].

## Литература


1. Шандра И.Г. *Обобщенные связности на многообразиях с вырожденной метрикой* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 6. – С. 103–110.
2. Шандра И.Г. *О геометрии касательного расслоения над многообразием с псевдосвязностью и антикватернионных $f$-структурах* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 6. – С. 75–86.
3. Shandra I.G. *On an isotranslated $n\pi$-structure and connections preserving a non-holonomic $(n+1)$-coweb.* II // Webs and quasigroups. – Tver: TSU, 1998–1999. – P. 168–177.
4. Naveira A.M. *A classification of Riemannian almost-product manifolds* // Rend. Math. Appl. – 1983. – V. 3. – № 3. – P. 577–592.
5. Otsuki T. *On general connections* // Math. J. Okayama Univ. – 1960. – V. 9. – № 2. – P. 99–164.
6. Gil-Medrano O. *Geometric properties of some classes of Riemannian almost-product manifolds* // Rend. Circ. Math. Palermo. – 1983. – V. 32. – № 3. – P. 315–329.
7. Широков П.А. *О сходящихся направлениях в римановых пространствах* // Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те. – 1934–1935. – Т. 3. – № 7. – С. 77–88.
8. Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств.* – М.: Наука, 1979. – 256 с.
9. Микеш Й. *Геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств* // Итоги науки и техн. Современ. матем. и ее прилож. Тематические обзоры. Геометрия-2. – М.: ВИНИТИ. – 1994. – Т. 11.
10. Vries H.L. *Uber Riemannische Raume, die infinitesimal konforme Transformationen gestatten* // Math. Z. – 1954. – V. 60. – № 3. – P. 38–347.
11. Шандра И.Г. *Пространства $V(K)$ и йордановы алгебры* // Тр. геометрич. семин. “Памяти Лобачевского посвящается”. – Казань, 1992. – Вып. 1. – С. 99–104.
12. Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М. *Симметрии и законы сохранения математической физики.* – М.: Факториал, 1997. – 464 с.



*Финансовая Академия при*
*Правительстве Российской Федерации*



*Поступила*
23.05.2000