ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 10 (485)

УДК 517.548+517.988

С.К. ВОДОПЬЯНОВ, А.Д. УХЛОВ

ОПЕРАТОРЫ СУПЕРПОЗИЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Введение

Рассмотрение операторов суперпозиции в пространствах Соболева связано с обобщением задачи Ю.Г. Решетняка об описании всех изоморфизмов φ^* однородных пространств Соболева L^1_n, порожденных квазиконформными отображениями φ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, поставленной в 1968 г. на первом Донецком коллоквиуме по теории отображений. В [1] показано, что таковыми являются структурные изоморфизмы пространств L^1_n и только они. Предложенный в [1] подход к задаче Решетняка естественно рассматривать в контексте предшествующих этому результатов ([2], с. 419–420). В теоремах Банаха, Стоуна, Эйленберга, Аренса и Келли, Хьюита, Гельфанда и Колмогорова получены условия на различные структуры пространства непрерывных функций $C(S)$, изоморфизм которых определяет топологическое пространство S с точностью до гомеоморфизма. Отметим здесь результат Стоуна, согласно которому $C(S)$ как структурно упорядоченная группа определяет S. С другой стороны, М. Накаи [3] и Л. Льюис [4] установили, что изоморфность алгебр Ройдена равносильна квазиконформной эквивалентности областей определения. Выделяя теперь в однородном пространстве Соболева L^1_n две структуры: векторной решетки и полунормированного пространства — получим ситуацию, в алгебраическом смысле близкую к работе Стоуна, а в метрическом — к работе Накаи. Такой взгляд на задачу является наиболее естественным, т. к. все еще дает возможность восстановить отображение, несмотря на минимум "материала" для его нахождения, доказать его непрерывность и установить его метрические свойства.

В рамках найденного в [1] подхода к проблеме Решетняка возникает следующая задача: какие метрические и аналитические свойства имеет измеримое отображение φ, индуцирующее изоморфизм φ^* по правилу $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, $f \in L^1_n$? Варьируя функциональное пространство L^1_n, мы каждый раз приходим к новой задаче: пространства Соболева W^1_p, $p > n$, рассмотрены в [5], однородные пространства Бесова $b^l_p(\mathbb{R}^n)$, $n > 1$, $lp = n$, — в [6] при $p = n+1$ и в [7] при $p > n+1$, пространства Соболева W^1_p, $n-1 < p < n$, — в [8], пространства Соболева W^1_p, $1 \le p < n$ (и пространства потенциалов) — в [9], трехиндексные шкалы пространств Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля (и их анизотропные аналоги) — в [10]. В [11] к задаче замены переменной в пространствах Соболева применена теория мультипликаторов. Вывод из [5]–[10] состоит в том, что изоморфность оператора φ^* влечет (в зависимости от соотношения между показателями гладкости, суммируемости и размерностью) свойства отображения быть квазиконформным или квазиизометрическим в метрике области определения, адекватной геометрии функционального пространства.

Аналитические и метрические свойства гомеоморфизмов, индуцирующих *ограниченные операторы* пространств Соболева L^1_p, изучались в [12]–[18]. В [16]–[18] получено аналитическое описание таких гомеоморфизмов без каких-либо априорных предположений. *Гомеоморфизм* $\varphi : D \to D'$ *между областями* D *и* D' *в* $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, *индуцирует ограниченный оператор*

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Совета государственной поддержки ведущих научных школ и INTAS-10170.

$\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$, $p \in [1,\infty)$, *по правилу* $\varphi^*(f) = f\circ\varphi$ *тогда и только тогда, когда отображение* φ *принадлежит* $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ *и* $|D\varphi(x)|^p \le K_p|\det D\varphi(x)|$ *почти всюду в* D. Заметим, что при $p = n$ этот класс отображений совпадает с классом квазиконформных отображений, а при $p = 1$ такие отображения названы В.Г. Мазьей в [12] субареальными. Известно также, что квазиконформное отображение может быть определено через метрические термины как гомеоморфизм, обладающий ограниченным искажением (см. [19]–[21]). Аналог метрического определения при $p \ne n$ для гомеоморфизмов, индуцирующих ограниченный оператор $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ при $n-1 < p < \infty$ был получен в [22]. В [23] изучался класс гомеоморфизмов, индуцирующих ограниченный оператор $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D)$ при $1 \le q < p < \infty$. При $n-1 < q < p = n$ этот класс гомеоморфизмов совпадает с классом квазиконформных в среднем отображений, которые при некоторых аналитических ограничениях изучались рядом авторов (напр., [24]). Некоторые применения квазиконформных в среднем отображений к теории вложений функций классов Соболева имеются в [25].

В последнее время интенсивно развивается теория отображений с интегрируемым искажением, обобщающая теорию отображений с ограниченным искажением (см. [26], где приведена библиография по этому вопросу).

Основы теории (p,q)-квазиконформных гомеоморфизмов, являющихся естественным обобщением квазиконформных отображений, заложены в [27].

Результаты данной работы можно рассматривать как естественное развитие результатов работы [27]. Типичная задача § 1 состоит в том, чтобы найти аналитические условия на отображение φ, которое в отличие от [27] не предполагается гомеоморфным, такие, что φ индуцирует по правилу замены переменной ограниченный оператор φ^* пространств Соболева. Результаты первого параграфа развивают соответствующие результаты, полученные в [7], [18] для пространств Соболева с одинаковой степенью суммируемости. В § 2 установлены условия, при выполнении которых отображение, индуцирующее ограниченный оператор пространств Соболева, обладает $\mathcal{N}^{-1}$-свойством. В § 3 для гомеоморфных отображений, индуцирующих ограниченный оператор пространств Соболева, получены условия локализации нормы.

1. Аналитические характеристики классов отображений

Пусть D и D' — открытые множества в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$. Рассмотрим задачу о суперпозиции отображения $\varphi : D \to D'$ с функциями из пространств $L^1_p(D')$, $1 \le p \le \infty$.

Напомним, что пространство Соболева $W^1_q(D)$, $1 \le q \le \infty$, состоит из локально-суммируемых функций, имеющих первые обобщенные производные, и таких, что конечна величина

$$\|f \mid W^1_q(D)\| = \|f \mid L_q(D)\| + \|\nabla f \mid L_q(D)\|, \quad \text{где} \quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Пространство Соболева $L^1_q(D)$ рассматривается с полунормой $\|f \mid L^1_q(D)\| = \|\nabla f \mid L_q(D)\|$.

Функция $f : D \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывна на прямой* l, имеющей непустое пересечение с D, если она абсолютно непрерывна на любом отрезке этой прямой, заключенном в D. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $\mathrm{ACL}(D)$ (*абсолютно непрерывна на почти всех прямых*), если она абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси. Отметим, что f принадлежит пространству Соболева $L^1_1(D)$ тогда и только тогда, когда f локально-суммируема и ее можно изменить на множестве нулевой меры так, что измененная функция принадлежит $\mathrm{ACL}(D)$ и ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, \dots, n$, существующие почти всюду, суммируемы в D. Заметим, что первые обобщенные производные функции f совпадают почти всюду с обычными частными производными (напр., [12]).

Отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу $\mathrm{ACL}(D)$, если его координатные функции φ_j можно изменить на множестве нулевой меры так, чтобы они принадлежали $\mathrm{ACL}(D)$, $j = 1, \dots, n$. Отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу $W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$, если оно принадлежит классу

$\mathrm{ACL}(D)$ и его координатные функции φ_j принадлежат $W^1_q(V)$ для всякой компактной области $V \subset D$, $j = 1, \ldots, n$.

Если отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу $\mathrm{ACL}(D)$, то для почти всех точек открытого множества D определены формальная матрица Якоби $D\varphi(x) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\right)$, $i, j = 1, \ldots, n$, и ее якобиан $J(x, \varphi) = \det D\varphi(x)$. Норма $|D\varphi(x)|$ матрицы есть норма линейного оператора, определяемого этой матрицей, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Будем говорить, что отображение $\varphi : D \to D'$ *порождает ограниченный оператор вложения* $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D)$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$, по правилу суперпозиции $\varphi^* f = f \circ \varphi$, если существует постоянная $K < \infty$ такая, что

$$\|\varphi^* f \mid L^1_q(D)\| \leq K \|f \mid L^1_p(D')\| \quad \text{для любой функции } f \in L^1_p(D').$$

Аналогично определяется ограниченный оператор вложения в пространствах Лебега и пространствах Соболева с основной нормой.

При описании отображений, порождающих по правилу суперпозиции ограниченные операторы вложения пространств Соболева, важную роль играют функции, определенные на системе открытых подмножеств открытого множества D.

Напомним, что отображение Φ, определенное на открытых подмножествах из D и принимающее неотрицательные значения, называется *конечно ϑ-квазиаддитивной* функцией множества [28], если

1) для всякой точки $x \in D$ существует δ, $0 < \delta < \mathrm{dist}(x, \partial D)$, такое, что $0 \leq \Phi(B(x, \delta)) < \infty$ (здесь и далее $B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < \delta\}$);
2) для всякого конечного набора $U_i \subset U \subset D$, $i = 1, 2, \ldots, k$, попарно непересекающихся открытых множеств имеет место неравенство $\sum\limits_{i=1}^{k} \Phi(U_i) \leq \vartheta \Phi(U)$.

Очевидно, неравенство во втором условии этого определения можно распространить на счетную совокупность попарно непересекающихся открытых множеств из D, так что конечно ϑ-квазиаддитивная функция множества является также и *счетно ϑ-квазиаддитивной*.

Если вместо второго условия предположить, что для всякого конечного набора $U_i \subset D$, $i = 1, 2, \ldots, k$, попарно непересекающихся открытых множеств имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{k} \Phi(U_i) = \Phi\Big(\bigcup_{i=1}^{k} U_i\Big),$$

то такая функция множества называется *конечно-аддитивной*. Если равенство в этом условии можно распространить на счетную совокупность попарно непересекающихся открытых множеств из D, то такую функцию множества будем называть *счетно-аддитивной*.

Отображение Φ, определенное на открытых подмножествах из D и принимающее неотрицательные значения, называется *монотонной* функцией множества [28], если $\Phi(U_1) \leq \Phi(U_2)$ при условии, что $U_1 \subset U_2 \subset D$ — открытые множества.

Верхняя и *нижняя* производные каждой из выше определенных (квази)аддитивных функций множества, заданных на открытых множествах из D, определяются следующим образом:

$$\overline{\Phi}'(x) = \lim_{h \to 0} \sup_{\delta < h} \frac{\Phi(B_\delta)}{|B_\delta|} \quad \text{и} \quad \underline{\Phi}'(x) = \lim_{h \to 0} \inf_{\delta < h} \frac{\Phi(B_\delta)}{|B_\delta|},$$

где точная верхняя и нижняя грани берутся по всем шарам $B_\delta = B(y, \delta) \ni x$, $B_\delta \subset D$, радиус δ которых меньше h. Заметим, что верхняя производная $\overline{\Phi}'(x)$ и нижняя производная $\underline{\Phi}'(x)$ являются борелевскими функциями [28].

Сформулируем в нужной нам форме результат из [28].

Предложение 1 ([28]). *Пусть конечно ϑ-квазиаддитивная функция множества Φ определена на открытых подмножествах открытого множества $D \subset \mathbb{R}^n$. Тогда* а) *для любого открытого множества $U \subset D$ справедливо неравенство*

$$\int_U \overline{\Phi}'(x)\,dx \le \vartheta \Phi(U);$$

б) *для почти всех точек $x \in D$ верхняя производная конечна и*

$$\overline{\Phi}'(x) \le \vartheta \underline{\Phi}'(x).$$

Если $\vartheta = 1$, то для почти всех точек $x \in D$ существует конечная производная

$$\lim_{\delta\to 0,\, B_\delta \ni x} \frac{\Phi(B_\delta)}{|B_\delta|} = \Phi'(x).$$

Неотрицательная функция Φ, определенная на некоторой совокупности измеримых множеств из открытого множества D и принимающая конечные значения, называется *абсолютно непрерывной*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что $\Phi(A) < \varepsilon$ для всякого измеримого множества $A \subset D$ из области определения, удовлетворяющего условию $|A| < \delta$.

Напомним, что гомеоморфизм φ открытых множеств D и D' называется (p,q)-квазиконформным [27], если выполнено одно из следующих эквивалентных утверждений:

1) отображение φ индуцирует ограниченный оператор вложения

$$\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D), \quad 1 \le q \le p < \infty,$$

по правилу $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$;

2) отображение φ принадлежит $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ и конечна величина

$$K_{p,q}(D) = \|K_p(\cdot) \mid L_\varkappa(D)\|,$$

где $K_p(x) = \inf\{k : |D\varphi|(x) \le k|J(x,\varphi)|^{1/p},\ x \in D\}$, а число $\varkappa$ определяется из соотношения $1/\varkappa = 1/q - 1/p$ при $q < p$ и $\varkappa = \infty$ при $q = p$, причем норма оператора $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D)$ эквивалентна $K_{p,q}(D)$.

При $p \in (1,\infty)$ утверждения 1, 2 эквивалентны утверждению

3) для любого конденсатора $(F_0, F_1) \subset D'$ справедливы неравенства

$$\operatorname{cap}_p(\varphi^{-1}(F_0), \varphi^{-1}(F_1); D) \le K^p \operatorname{cap}_p(F_0, F_1; D') \qquad \text{при} \quad 1 < q = p < \infty$$

и

$$\operatorname{cap}_q^{1/q}(\varphi^{-1}(F_0), \varphi^{-1}(F_1); D) \le \Phi(D' \setminus (F_0 \cup F_1))^{\frac{1}{\varkappa}} \operatorname{cap}_p^{1/p}(F_0, F_1; D') \quad \text{при} \quad 1 < q < p < \infty,$$

где Φ — ограниченная монотонная счетно-аддитивная функция, определенная на открытых подмножествах открытого множества D'.

При $p \in (n-1,\infty)$ утверждения 1, 2, 3 эквивалентны утверждению

4) существуют постоянная $K < \infty$ и при $q < p$ ограниченная монотонная абсолютно непрерывная счетно-аддитивная функция Ψ, определенная на открытых подмножествах открытого множества D, такие, что

$$\overline{\lim_{r\to 0}} \frac{L^p_\varphi(x,r) r^{n-p}}{|\varphi(B(x,\lambda r))|} \Big/ \left(\frac{\Psi(B(x,\lambda r))}{|B(x,r)|}\right)^{\frac{p-q}{q}} \le K$$

для всех точек $x \in D$ (при $p = q$ знаменатель этого выражения, стоящий под косой линией, равен 1). Здесь $L_\varphi(x,r) = \max\limits_{|x-y|=r} |\varphi(x) - \varphi(y)|$ при условии, что $r < \operatorname{dist}(x, \partial D)$, $\lambda > 1$ — фиксированное число.

Понятие (p,q)-квазиконформного отображения естественным образом обобщает понятие квазиконформного отображения (при $p = q = n \ge 2$ данное определение совпадает с определением квазиконформного отображения), и (p,q)-квазиконформные отображения представляют пример топологических отображений с интегрируемым искажением [26].

Рассмотрим теперь суперпозицию функций, принадлежащих пространству Соболева $L^1_p(D')$, с отображением $\varphi : D \to D'$, D и D' — открытые множества в $\mathbb{R}^n$.

Предложение 2. *Пусть отображение $\varphi : D \to D'$ обладает свойством, что для всякой функции $f \in L^1_p(D')$, $1 \le p \le \infty$, суперпозиция $\varphi^* f = f \circ \varphi \in \mathrm{ACL}(D)$. Тогда отображение φ принадлежит $\mathrm{ACL}(D)$.*

Доказательство. Рассмотрим финитные функции $\xi_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $N \in \mathbb{N}$, равные единице на компактном множестве $\overline{B(0,N)}$. Для любой координатной функции $y_j : D' \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, произведение $\xi_N(y) \cdot y_j \in L^1_p(D')$. Тогда функции $\varphi^*(\xi_N y_j)(x) = \xi_N(\varphi(x))\varphi_j(x)$ принадлежат классу $L^1_q(D) \subset \mathrm{ACL}(D)$.

Фиксируем произвольно координатную ось и рассмотрим семейство L_N, состоящее из всех прямых l, параллельных выбранной координатной оси и таких, что на каждой прямой $l \in L_N$ функция $\varphi^*(\xi_N y_j)$, $N \in \mathbb{N}$, абсолютно непрерывна. Так как множество $\{\varphi^*(\xi_N y_j)\}_{N \in \mathbb{N}}$ счетное, то проекция вдоль выбранной оси множества $L = \bigcap\limits_{N=1}^{\infty} L_N$ на подпространство $\mathbb{R}^{n-1}$ имеет полную $(n-1)$-мерную меру Лебега.

Теперь покажем, что отображение φ абсолютно непрерывно на любой прямой $l \in L$. Прежде всего заметим, что т. к. $\xi_N(y) \cdot y_j = y_j$ для $y \in \overline{B(0,N)}$ и функции $\varphi^*(\xi_N y_j)(x)$ непрерывны на прямой l, то множество $\varphi^{-1}(B(0,N)) \cap l$ открыто на прямой l. На прямой l выберем любые точки $x_1, x_2 \subset D$ так, чтобы отрезок $[x_1, x_2] \subset D$. Так как множество $\varphi^{-1}(B(0,N)) \cap l$ открыто на прямой l, и $[x_1, x_2] \subset \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \varphi^{-1}(B(0,N))$, то найдется номер N_1 такой, что $[x_1, x_2] \subset \varphi^{-1}(B(0,N_1))$. Следовательно, φ абсолютно непрерывно на $[x_1, x_2]$, т. к.

$$\varphi|_{[x_1,x_2]} = (\varphi^*(\xi_{N_1} y_1)|_{[x_1,x_2]}, \dots, \varphi^*(\xi_{N_1} y_n)|_{[x_1,x_2]}),$$

а функции $\varphi^*(\xi_{N_1} y_j) \in \mathrm{ACL}([x_1, x_2])$, $j = 1, \dots, n$. $\square$

В следующем утверждении описывается свойство аддитивности нормы оператора суперпозиции, суженного на финитные функции.

Лемма 1. *Пусть отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор вложения*

$$\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D), \quad 1 \le q < p \le \infty.$$

Тогда

$$\Phi(A') = \sup_{f \in \overset{\circ}{L}{}^1_p(A')} \left(\frac{\|\varphi^* f \mid L^1_q(D)\|}{\|f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_p(A')\|} \right)^{\sigma}, \quad \textit{где} \quad \sigma = \begin{cases} \frac{pq}{p-q} & \textit{при } p < \infty; \\ q & \textit{при } p = \infty, \end{cases}$$

является ограниченной монотонной счетно-аддитивной функцией, определенной на открытых ограниченных множествах $A' \subset D'$.

Доказательство. Очевидно, $\Phi(A'_1) \le \Phi(A'_2)$, если $A'_1 \subset A'_2$.

Пусть A'_i, $i \in \mathbb{N}$, — открытые попарно непересекающиеся множества в D', $A'_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A'_i$. Рассмотрим такую функцию $f_i \in \overset{\circ}{L}{}^1_p(A'_i)$, чтобы одновременно выполнялись условия $\|\varphi^* f_i \mid L^1_q(D)\| \ge (\Phi(A'_i)(1 - \frac{\varepsilon}{2^i}))^{\frac{1}{\sigma}} \|f_i \mid \overset{\circ}{L}{}^1_p(A'_i)\|$ и $\|f_i \mid \overset{\circ}{L}{}^1_p(A'_i)\|^p = \Phi(A'_i)(1 - \frac{\varepsilon}{2^i})$ при $p < \infty$ ($\|f_i \mid \overset{\circ}{L}{}^1_p(A'_i)\| = 1$ при $p = \infty$), $\varepsilon \in (0,1)$. Полагая $f_N = \sum\limits_{i=1}^{N} f_i$ и применяя неравенство Гёльдера при $1 \le q < p \le \infty$

(случай равенства), получим

$$\|\varphi^* f_N \mid L^1_q(D)\| \geq \Bigg(\sum_{i=1}^N \bigg(\Phi(A_i')\Big(1-\frac{\varepsilon}{2^i}\Big)\bigg)^{\frac{q}{\sigma}} \|f_i \mid \overset{\circ}{L}{}^1_p(A_i')\|^q\Bigg)^{1/q} =$$

$$= \bigg(\sum_{i=1}^N \Phi(A_i')\Big(1-\frac{\varepsilon}{2^i}\Big)\bigg)^{\frac{1}{\sigma}} \Big\|f_N \Bigm| \overset{\circ}{L}{}^1_p\Big(\bigcup_{i=1}^N A_i'\Big)\Big\| \geq \bigg(\sum_{i=1}^N \Phi(A_i') - \varepsilon\Phi(A_0')\bigg)^{\frac{1}{\sigma}} \Big\|f_N \Bigm| \overset{\circ}{L}{}^1_p\Big(\bigcup_{i=1}^N A_i'\Big)\Big\|,$$

т. к. множества, на которых функции $\nabla\varphi^* f_i$ отличны от нуля, не пересекаются. Отсюда следует

$$\Phi(A_0')^{\frac{1}{\sigma}} \geq \sup \frac{\|\varphi^* f_N \mid L^1_q(D)\|}{\Big\|f_N \Bigm| \overset{\circ}{L}{}^1_p\Big(\bigcup\limits_{i=1}^N A_i'\Big)\Big\|} \geq \bigg(\sum_{i=1}^N \Phi(A_i') - \varepsilon\Phi(A_0')\bigg)^{\frac{1}{\sigma}},$$

где точная верхняя грань берется по всем функциям $f_N \in \overset{\circ}{L}{}^1_p\Big(\bigcup\limits_{i=1}^N A_i'\Big)$ указанного выше вида. Так как N и ε произвольны, то

$$\sum_{i=1}^\infty \Phi(A_i') \leq \Phi\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i'\Big).$$

Справедливость обратного неравенства проверяется непосредственно. $\square$

Отображение $\varphi : D \to D'$ *обладает $\mathcal{N}$-свойством* Лузина, если образ всякого множества нулевой меры есть множество меры нуль.

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится

Предложение 3 ([29], следствие 5.1). *Предположим, что отображение $\varphi : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, имеет аппроксимативные частные производные на множестве A. Тогда существует множество $\Sigma_\varphi \subset A$ нулевой меры такое, что для любой неотрицательной измеримой функции $u : A \to \mathbb{R}$ справедлива следующая формула замены переменной в интеграле Лебега*:

$$\int_A u(x)|J(x,\varphi)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\cap(A\setminus\Sigma_\varphi)} u(x)\bigg)\,dy. \tag{1}$$

Если φ обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина, то $\Sigma_\varphi = \emptyset$.

Заметим, что всякое отображение $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$ обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина при $q > n$ (напр., [29]).

Отображение $\varphi : D \to D'$ класса $\mathrm{ACL}(D)$ имеет *конечное искажение*, если $D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве $Z = \{x \in D : J(x,\varphi) = 0\}$.

Для отображения $\varphi : D \to D'$ класса $\mathrm{ACL}(D)$ определим функцию

$$D' \ni y \mapsto H_q(y) = \begin{cases} \bigg(\sum\limits_{\substack{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi,\\ J(x,\varphi)\neq 0}} \frac{|D\varphi|^q(x)}{|J(x,\varphi)|}\bigg)^{\frac{1}{q}}, \\ 0, \qquad\qquad \text{если } \{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi : J(x,\varphi) \neq 0\} = \emptyset. \end{cases} \tag{2}$$

(Здесь и далее $\Sigma_\varphi \subset D$ — множество из предложения 3.)

Две функции $f : D' \to \mathbb{R}$ и $g : D' \to \mathbb{R}$ называются эквивалентными ($f \sim g$), если $\alpha f(x) \leq g(x) \leq \beta f(x)$ для всех $x \in D'$, $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ — постоянные числа.

Следующее утверждение сформулировано в [30] для ограниченной области D' (при $p = q$ в эквивалентной форме оно установлено в [7], [18]). Для гомеоморфного отображения φ оно доказано в [16]–[18] при $p = q$ и в [23] при $q < p$.

Теорема 1. *Отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор вложения*

$$\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D), \quad 1 \leq q \leq p < \infty,$$

тогда и только тогда, когда φ принадлежит $\mathrm{ACL}(D)$, имеет конечное искажение, и

$$H_q(\cdot) \in L_\varkappa(D'), \quad \text{где} \quad \varkappa = \begin{cases} \frac{pq}{p-q} & \text{при } q < p < \infty; \\ \infty & \text{при } q = p < \infty. \end{cases}$$

Норма оператора $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D)$ эквивалентна $H_{p,q}(D') = \|H_q(\cdot) \mid L_\varkappa(D')\|$:

$$\alpha_{p,q} H_{p,q}(D') \leq \|\varphi^*\| \leq H_{p,q}(D'),$$

где $\alpha_{p,q}$ — положительная постоянная.

Кроме того, если $V \subset D$ — открытое множество и $\varphi(V)$ содержится в открытом множестве W, то оператор

$$\varphi^*_V : L^1_p(W) \to L^1_q(V), \quad \varphi^*_V(f) = f \circ \varphi|_V, \quad 1 \leq q \leq p < \infty,$$

также ограничен, и $\|\varphi^*_V\| \leq \|H_q(\cdot) \mid L_\varkappa(W)\|$.

Для доказательства теоремы при $q < p$ понадобится представляющая независимый интерес

Теорема 2. *Отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D)$, $1 \leq q < p < \infty$, тогда и только тогда, когда φ принадлежит $\mathrm{ACL}(D)$, имеет конечное искажение и существует ограниченная монотонная счетно-аддитивная функция Φ, определенная на открытых ограниченных подмножествах из D', такая, что выполняются соотношения*

$$\alpha^\varkappa_{p,q} H^\varkappa_q(y) \leq \Phi'(y) \leq H^\varkappa_q(y)$$

для почти всех $y \in D'$, $1/\varkappa = 1/q - 1/p$, где $\alpha_{p,q}$ — постоянная из теоремы 1.

Для доказательства этих теорем потребуется оценка значений монотонной счетно-аддитивной функции через кратность покрытия.

С помощью теоремы Безиковича [31] доказывается

Лемма 2. *Для всякого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$, $U \neq \mathbb{R}^n$, существует счетное семейство шаров $\mathcal{B} = \{B_j\}$ такое, что*

1) $\bigcup\limits_j B_j = U$;
2) *если $B_j = B_j(x_j, r_j) \in \mathcal{B}$, то $\mathrm{dist}(x_j, \partial U) = 12 r_j$;*
3) *семейства $\mathcal{B} = \{B_j\}$ и $2\mathcal{B} = \{2B_j\}$, где символ $2B$ обозначает шар удвоенного радиуса с центром в той же точке, образуют конечнократное покрытие множества U;*
4) *если $2B_j = B_j(x_j, 2r_j)$, $j = 1, 2,$ — пересекающиеся шары, то $\frac{5}{7} r_1 \leq r_2 \leq \frac{7}{5} r_1$;*
5) *семейство $\{2B_j\}$ можно разбить на конечное число, зависящее только от размерности n, наборов так, что внутри каждого набора шары не пересекаются.*

Лемма 3. *Пусть монотонная счетно-аддитивная функция Φ определена на открытых подмножествах открытого множества $D \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для всякого открытого множества $U \subset D$, $U \neq \mathbb{R}^n$, существует последовательность шаров $\{B_j\}$ такая, что*

1) *семейства $\{B_j\}$ и $\{2B_j\}$ образуют конечнократное покрытие множества U;*
2) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \Phi(2B_j) \leq \zeta_n \Phi(U)$, *где постоянная ζ_n зависит только от размерности n.*

Доказательство. В соответствии с леммой 2 построим последовательности шаров $\{B_j\}$, $\{2B_j\}$ и разобьем последовательность $\{2B_j\}$ на ζ_n подсемейств $\{2B_{1j}\}_{j=1}^{\infty}, \dots, \{2B_{\zeta_n j}\}_{j=1}^{\infty}$ таким образом, что внутри каждого набора шары не пересекаются, $2B_{ki} \cap 2B_{kj} = \emptyset$, если $i \neq j$, $k = 1, \dots, \zeta_n$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Phi(2B_j) = \sum_{k=1}^{\zeta_n} \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(2B_{kj}) \leq \sum_{k=1}^{\zeta_n} \Phi(U) = \zeta_n \Phi(U). \quad \square$$

Доказательство теорем 1 и 2. Необходимость. 1. Принадлежность отображения φ классу $\mathrm{ACL}(D)$ следует из предложения 2. Докажем, что отображение φ имеет конечное искажение. По лемме 1 для любой функции $f \in \overset{\circ}{L}{}^1_p(A')$ при $q \leq p$ выполняется неравенство $\|\varphi^* f \mid L^1_q(D)\| \leq \Phi(A')^{1/\sigma} \|f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_p(A')\|$, где $A' \subset D'$ — открытое ограниченное подмножество (при $q = p$ полагаем $\Phi(A)^{\frac{1}{\sigma}} = \|\varphi^*\|$). Фиксируем срезку $\eta \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, равную единице на $B(0,1)$ и нулю вне шара $B(0,2)$. Подставляя в это неравенство функции $h_j(z) = (z-y)_j \eta(\frac{z-y}{r})$, $j = 1, \dots, n$, где $(z-y)_j$ обозначает j-ю координату вектора $z - y$, $B(y, 2r) \subset D'$, приходим к неравенству

$$\left(\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y,r))} |D\varphi|^q(x)\, dx \right)^{1/q} \leq C \Phi(B(y,2r))^{1/\sigma} |B(y,2r)|^{1/p}, \tag{3}$$

где C — некоторая постоянная, зависящая только от размерности n и показателя p.

Пусть $Z = \{x \in D \mid J(x,\varphi) = 0\}$. Покажем, что

$$\int_Z |D\varphi|^q(x)\, dx = 0. \tag{4}$$

По формуле (1) $|\varphi(Z \setminus \Sigma_\varphi)| = 0$. Фиксируем число $\varepsilon > 0$ и открытое множество U такие, что $U \supset \varphi(Z \setminus \Sigma_\varphi)$ и $|U| < \varepsilon$. Выберем согласно лемме 2 конечнократное покрытие $\{B(y_i, r_i)\}$ открытого множества U шарами такое, что шары $B(y_i, 2r_i) \subset U$, $i \in \mathbb{N}$, также образуют конечнократное покрытие множества U, кратность M покрытия $\{B(y_i, 2r_i)\}$ не зависит от множества U и $\sum\limits_i |B(y_i, 2r_i)| < M\varepsilon$. Тогда, применяя неравенство (3) и лемму 3, выводим

$$\int\limits_Z |D\varphi|^q(x)\, dx = \int\limits_{Z \setminus \Sigma_\varphi} |D\varphi|^q(x)\, dx \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))} |D\varphi|^q(x)\, dx \leq$$
$$\leq \begin{cases} C^p \|\varphi^*\|^p \sum\limits_{i=1}^{\infty} |B(y_i, 2r_i)| \leq C_1^p \|\varphi^*\|^p |U| & \text{при } q = p; \\ C^q \sum\limits_{i=1}^{\infty} \Phi(B(y_i, 2r_i))^{\frac{q}{\sigma}} \big(|B(y_i, 2r_i)|\big)^{\frac{q}{p}} \leq C_2^q \Phi(U)^{\frac{p-q}{p}} |U|^{\frac{q}{p}} & \text{при } q < p. \end{cases}$$

Так как $\Phi(U) \leq \|\varphi^*\|^\sigma < \infty$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то (4) доказано, и, следовательно, $|D\varphi| = 0$ почти всюду на множестве Z.

2. Перейдем к оценке нормы. Подставляя в неравенство $\|\varphi^* f \mid L^1_q(D)\| \leq \Phi(A')^{1/\sigma} \|f \mid \overset{\circ}{L}{}^1_p(A')\|$ функции $h_j(z) = (z-y)_j \eta(\frac{z-y}{r})$, $j = 1, \dots, n$, $B(y, 2r) \subset D'$, приходим к неравенству

$$\left(\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y,r))} |D\varphi|^q\, dx \right)^{1/q} \leq \begin{cases} C \Phi(B(y,2r))^{1/\sigma} |B(y,r)|^{1/p} & \text{при } q < p; \\ C \|\varphi^*\| \cdot |B(y,r)|^{1/p} & \text{при } q = p, \end{cases}$$

где C — некоторая постоянная.

При $q=p$ применим к левой части полученной оценки формулу (1). Тогда из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла вытекает, что

$$\Big(\sum_{\substack{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi,\\ J(x,\varphi)\neq 0}}\frac{|D\varphi|^p(x)}{|J(x,\varphi)|}\Big)^{\frac{1}{p}}\leq C\|\varphi^*\|$$

для почти всех $y\in D'$ таких, что $\varphi^{-1}(y)\setminus(\Sigma_\varphi\cup Z)\neq\emptyset$, и $J(x,\varphi)\neq 0$, если $x\in\varphi^{-1}(y)\setminus(\Sigma_\varphi\cup Z)$. Отсюда вытекает оценка

$$H_{p,p}(D')=\|H_p(\cdot)\mid L_\infty(D')\|\leq C\|\varphi^*\|.$$

В случае $q<p$ приведем полученное неравенство к виду

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y,r))}|D\varphi|^q(x)\,dx\leq\widetilde{C}^q\Big(\frac{\Phi(B(y,2r))}{|B(y,2r)|}\Big)^{\frac{q}{\sigma}}|B(y,r)|$$

и применим к левой части этого соотношения формулу (1) замены переменной

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y,r))}|D\varphi|^q(x)\,dx=\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y,r))\setminus Z}|D\varphi|^q(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{B(y,r)}\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus(\Sigma_\varphi\cup Z)}\frac{|D\varphi|^q(x)}{|J(x,\varphi)|}\,dy\leq\widetilde{C}^q\Big(\frac{\Phi(B(y,2r))}{|B(y,2r)|}\Big)^{\frac{q}{\sigma}}|B(y,r)|.$$

Из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла и свойств производной аддитивной функции множества (предложение 1) вытекает

$$H_q^\varkappa(y)=\Big(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus(\Sigma_\varphi\cup Z)}\frac{|D\varphi|^q(x)}{|J(x,\varphi)|}\Big)^{\frac{p}{p-q}}\leq\widetilde{C}^\varkappa\Phi'(y)$$

для почти всех $y\in D'$ таких, что $\varphi^{-1}(y)\setminus(\Sigma_\varphi\cup Z)\neq\emptyset$, где $H_q(\cdot)$ определена формулой (2).

Интегрируя последнее неравенство по ограниченному открытому множеству $V\subset D'$, получим

$$\|H_q(\cdot)\mid L_\varkappa(V)\|^\varkappa=\int_V\Big(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus(\Sigma_\varphi\cup Z)}\frac{|D\varphi|^q(x)}{|J(x,\varphi)|}\Big)^{\frac{p}{p-q}}dy\leq$$

$$\leq\widetilde{C}^\varkappa\int_V\Phi'(y)\,dy\leq\widetilde{C}^\varkappa\Phi(V)\leq\widetilde{C}^\varkappa\|\varphi^*\|^\varkappa.$$

Так как выбор $V\subset D'$ произволен, то $\|H_q(\cdot)\mid L_\varkappa(D')\|\leq\widetilde{C}\|\varphi^*\|$.

Достаточность. Покажем, что для любой функции $f\in L^1_p(D')\cap C^1(D')$ выполняется неравенство $\|\varphi^*f\mid L^1_q(D)\|\leq H_{p,q}(D')\|f\mid L^1_p(D')\|$, $q\leq p$. Так как $f\circ\varphi$ принадлежит классу $\mathrm{ACL}(D)$, то

$$\|\varphi^*f\mid L^1_q(D)\|\leq\Big(\int_{D\setminus Z}(|\nabla f|(\varphi(x))|D\varphi|(x))^q\,dx\Big)^{1/q}\leq$$

$$\leq\Big(\int_{D'}|\nabla f|^q(y)\Big(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y),\,x\notin\Sigma_\varphi\cup Z}\frac{|D\varphi|^q(x)}{|J(x,\varphi)|}\Big)\,dy\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Используя неравенство Гёльдера при $q<p$, выводим оценку

$$\|\varphi^*f\mid L^1_q(D)\|\leq\Big(\int_{D'}H_q^\varkappa(y)\,dy\Big)^{1/\varkappa}\Big(\int_{D'}|\nabla f|^p(y)\,dy\Big)^{1/p}\tag{5}$$

(при $q=p$ левый сомножитель равен $H_{p,p}(D')$). Отсюда вытекает оценка для нормы

$$\|\varphi^*\| \le H_{p,q}(D').$$

Чтобы получить поточечную оценку теоремы 2, заметим, что неравенство (5) справедливо для любого открытого ограниченного множества $A' \subset D'$ вместо D' и произвольной функции $f \in C_0^\infty(A')$. Поэтому

$$\Phi(A') \le \int_{A'} H_q^{\varkappa}(y)\, dy$$

для любого открытого множества $A' \subset D'$. Дифференцируя левую и правую части этого неравенства, выводим $\Phi'(y) \le H_q^{\varkappa}(y)$ для почти всех $y \in D'$.

Чтобы распространить (5) на все функции $f \in L_p^1(D')$, $1 < q \le p < \infty$, аппроксимируем f последовательностью гладких функций $f_n \in L_p^1(D')$ так, чтобы одновременно $\|f - f_n \mid L_p^1(D')\| \to 0$ и $(f - f_n) \to 0$ квазивсюду в D' при $n \to \infty$. Поскольку прообраз $\varphi^{-1}(S)$ множества $S \subset D'$ нулевой емкости имеет нулевую емкость, то $\varphi^*(f_n) \to \varphi^*(f)$ квазивсюду в D (определение и свойства емкости см., напр., в [12]). Из этого наблюдения вытекает следующий вывод: распространение по непрерывности оператора φ^* с подпространства $f \in L_p^1(D') \cap C^\infty(D')$ на $f \in L_p^1(D')$ совпадает с оператором подстановки φ^*, $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$.

Если $1 = q < p$, то прием, описанный в предыдущем случае, позволяет распространить этот оператор на все функции рассматриваемого класса Соболева, единственное отличие в рассуждениях состоит в том, что из последовательности $\varphi^*(f_n)$ при условии, что f_n сходится квазивсюду в $L_p^1(D')$, можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся почти всюду в D.

Если же $q = p = 1$, то вместо емкостной следует использовать более грубую характеристику сходимости; если последовательность $f_n \in L_1^1(D')$ сходится к $f \in L_1^1(D')$ в $L_1^1(D')$, то некоторая ее подпоследовательность сходится почти всюду. Чтобы закончить доказательство, достаточно воспользоваться следующим свойством: прообраз множества нулевой меры есть множество нулевой меры при отображении $\varphi : D \to D'$, индуцирующем ограниченный оператор $\varphi^* : L_1^1(D') \to L_1^1(D)$ (см. ниже теорему 3).

Доказательство последнего утверждения вытекает из $\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$ и оценки $\widetilde{H}_q(y) \le H_q(y)$ для $y \in W$, где

$$W \ni y \mapsto \widetilde{H}_q(y) = \begin{cases} \Bigg(\sum\limits_{\substack{x \in (\varphi^{-1}(y) \cap V) \setminus \Sigma_\varphi, \\ J(x,\varphi) \ne 0}} \frac{|D\varphi|^q(x)}{|J(x,\varphi)|} \Bigg)^{\frac{1}{q}}, & \\ 0, & \text{если } \{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi : J(x,\varphi) \ne 0\} = \emptyset. \end{cases}$$

Монотонную функцию множества Φ, определенную первоначально лишь на открытых подмножествах открытого множества D, распространим на измеримые множества $A \subset D$ по формуле

$$\widetilde{\Phi}(A) = \inf_{U \supset A} \Phi(U).$$

Очевидно, что условие монотонности обеспечивает равенство $\widetilde{\Phi}(U) = \Phi(U)$ для любого открытого множества $U \subset D$. $\square$

Следствие 1. Аддитивная функция множества из леммы 1 $U \mapsto \Phi(U)$, $U \subset D'$ — открытое множество, абсолютно непрерывна. Кроме того, ее распространение $\widetilde{\Phi}$ на измеримые множества также абсолютно непрерывно.

Доказательство. Очевидно, что оценка (5) справедлива не только для открытого множества D', но и для любого открытого ограниченного множества $U \subset D'$ и функции $f \in \overset{\circ}{L}{}_p^1(U)$. Следовательно,

$$\|\varphi^* f \mid L_q^1(D)\| \le \left(\int_U H_q^{\varkappa}(y)\, dx \right)^{1/\varkappa} \|f \mid \overset{\circ}{L}{}_p^1(U)\|.$$

Отсюда в силу неравенства $\Phi(U) \le \|H_q(\cdot) \mid L_\varkappa(U)\|^\varkappa$ получаем абсолютную непрерывность функции Φ и, следовательно, абсолютную непрерывность ее продолжения $\widetilde{\Phi}$. $\square$

Пусть отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D)$, $1 \le q < p < \infty$. Для любого открытого множества $W \subset D'$ и функции $f \in L^1_p(W) \cap C^1(W)$ суперпозиция $\varphi^*_W f = f \circ \varphi$ определена на множестве $\varphi^{-1}(W)$. Множество $\varphi^{-1}(W)$ может быть и не открытым, но оно обладает следующим свойством: для почти всех прямых l параллельных какой-нибудь координатной оси, например x_i, $i = 1, \dots, n$, пересечение $\varphi^{-1}(W) \cap l$ — открытое множество на прямой l, и суперпозиция $\varphi^* f$ абсолютно непрерывна на этом пересечении. Следовательно, определена производная $\frac{\partial \varphi^*_W f}{\partial x_i}(x)$ для почти всех $x \in \varphi^{-1}(W) \cap l$. Таким образом, для почти всех $x \in \varphi^{-1}(W)$ определен градиент $\nabla(\varphi^*_W f)(x)$, и полунорма

$$\|\varphi^*_W f \mid L^1_q(\varphi^{-1}(W))\| \stackrel{\text{def}}{=} \Bigg(\int\limits_{\varphi^{-1}(W)} |\nabla \varphi^*_W f|^q(x)\, dx \Bigg)^{\frac{1}{q}}.$$

Аналогично соотношению (5) получим оценку

$$\|\varphi^*_W f \mid L^1_q(\varphi^{-1}(W))\| \le \bigg(\int_W H^\varkappa_q(y)\, dy \bigg)^{1/\varkappa} \bigg(\int_W |\nabla f|^p(y)\, dy \bigg)^{1/p},$$

из которой вытекает ограниченность оператора $\varphi^*_W : L^1_p(W) \to L^1_q(\varphi^{-1}(W))$.

Определим функцию множества $W \mapsto [0, \infty)$ на открытых множествах $W \subset D'$ по следующей формуле:

$$\Xi(W) = \sup_{f \in L^1_p(W) \cap C^1(W)} \bigg(\frac{\|\varphi^*_W f \mid L^1_q(\varphi^{-1}(W))\|}{\|f \mid L^1_p(W)\|} \bigg)^\varkappa.$$

Из теорем 1 и 2, следствия 1 и предложения 1 получим

Следствие 2. Пусть D и D' — открытые множества в $\mathbb{R}^n$. Отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D)$, $1 \le q < p < \infty$, тогда и только тогда, когда φ принадлежит $\mathrm{ACL}(D)$, имеет конечное искажение и существует ограниченная абсолютно непрерывная счетно ϑ-квазиаддитивная функция Ξ, определенная на открытых множествах $W \subset D'$, такая, что ее верхняя производная $\overline{\Xi}'(x)$ эквивалентна $H^\varkappa_q(y)$:

$$\lambda_1 H^\varkappa_q(y) \le \overline{\Xi}'(y) \le H^\varkappa_q(y)$$

для почти всех $y \in D'$, где λ_1 — некоторая положительная постоянная.

Норма оператора φ^*_W эквивалентна $\Big(\int\limits_W \overline{\Xi}'(y)\, dy \Big)^{\frac{1}{\varkappa}}$ для любого открытого множества $W \subset D'$.

Доказательство. Необходимость. Если оператор вложения $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D)$ ограничен, то $\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$ и имеет конечное искажение. Так же, как и в лемме 1, доказывается, что функция Ξ, определенная перед следствием, является ограниченной счетно-аддитивной функцией, определенной на открытых множествах $W \subset D'$. Кроме того, в силу очевидной оценки $\Phi(W) \le \Xi(W)$ и поточечного неравенства $\alpha_{p,q} H^\varkappa_q(y) \le \Phi'(y)$, установленного в доказательстве теоремы 1, получим

$$\alpha_{p,q} H^\varkappa_{p,q}(W) \le \Phi(W) \le \Xi(W) \le H^\varkappa_{p,q}(W).$$

Отсюда вытекает абсолютная непрерывность функции Ξ и поточечная оценка

$$\alpha^\varkappa_{p,q} H^\varkappa_q(y) \le \overline{\Xi}'(y) \le H^\varkappa_q(y)$$

для почти всех $y \in D'$. Далее, для произвольной совокупности попарно непересекающихся открытых множеств $W_i \subset A \subset W \subset D'$ имеем

$$\sum_{i=1}^\infty \Xi(W_i) \le \sum_{i=1}^\infty \int_{W_i} H^\varkappa_q(y)\, dy \le \int_W H^\varkappa_q(y)\, dy \le \vartheta \Xi(W),$$

где $\vartheta \geq 1$ — некоторая постоянная. Следовательно, Ξ — абсолютно непрерывная счетно ϑ-квазиаддитивная функция множества.

Достаточность. Если дана функция множества, обладающая указанными в формулировке следствия 2 свойствами, то в силу предложения 1

$$\lambda_1 H^{\varkappa}_{p,q}(D') \leq \int_{D'} \overline{\Xi}'(y)\,dy \leq \Xi(D') < \infty.$$

Ограниченность оператора $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D)$ вытекает теперь из теоремы 1. Из приведенных выше оценок вытекает также эквивалентность нормы оператора $\varphi^*_W : L^1_p(W) \to L^1_q(\varphi^{-1}(W))$ выражению $\Big(\int\limits_W \overline{\Xi}'(y)\,dy\Big)^{\frac{1}{\varkappa}}$ для любого открытого множества $W \subset D'$. $\square$

Отображение $\varphi : D \to D'$ называется *измеримым*, если прообраз измеримого множества измерим.

Для измеримого отображения $\varphi : D \to D'$ определим *объемную производную* "обратного отображения"

$$J_{\varphi^{-1}}(y) = \lim_{r\to 0} \frac{|\varphi^{-1}(B(y,r))|}{|B(y,r)|}, \quad y \in D'.$$

Отображение $\varphi : D \to D'$ *обладает $\mathcal{N}^{-1}$-свойством*, если прообраз всякого множества нулевой меры есть множество меры нуль.

Из ([28], теорема 4) и предложения 1, используя метод доказательства теоремы 1, получаем

Предложение 4. *Отображение $\varphi : A \to A'$, определенное на измеримом множестве $A \subset \mathbb{R}^n$ и имеющее аппроксимативные частные производные на множестве A, порождает ограниченный оператор вложения*

$$\varphi^* : L_r(A') \to L_s(A), \quad 1 \leq s \leq r < \infty,$$

тогда и только тогда, когда φ обладает $\mathcal{N}^{-1}$-свойством, его якобиан $J(x,\varphi)$ почти всюду отличен от нуля и объемная производная

$$\big(J_{\varphi^{-1}}(y)\big)^{\frac{1}{s}} = \Big(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi} \frac{1}{|J(x,\varphi)|}\Big)^{\frac{1}{s}} \in L_\lambda(A'),$$

где $\lambda = \frac{rs}{r-s}$ при $s < r$ и $\lambda = \infty$ при $s = r$. Норма оператора φ^* равна $\|(J_{\varphi^{-1}})^{\frac{1}{s}} \mid L_\lambda(A')\|$.

Доказательство. Докажем только невырожденность якобиана. $\mathcal{N}^{-1}$-свойство отображения φ эквивалентно тому, что образ множества $B \subset A$, $B \cap \Sigma_\varphi = \emptyset$, положительной меры есть множество положительной меры. Пусть $Z = \{x \in A \setminus \Sigma_\varphi \mid J(x,\varphi) = 0\}$. Если $|Z| > 0$, то $|\varphi(Z \setminus \Sigma_\varphi)| > 0$. Однако по формуле (1) $|\varphi(Z \setminus \Sigma_\varphi)| = 0$. Полученное противоречие приводит к тому, что $|Z| = 0$. $\square$

Обозначим символом $W^1_{s,q}(D)$, $s \in [1,\infty]$, пространство функций из $L^1_q(D)$, имеющих конечную норму $\|f \mid W^1_{s,q}(D)\| = \|f \mid L_s(D)\| + \|\nabla f \mid L_q(D)\|$.

Из теоремы 1 и предложения 4 получается

Теорема 3. *Пусть непостоянное отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор вложения*

$$\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D), \quad 1 \leq q \leq p < n.$$

Тогда

1) *объемная производная $J_{\varphi^{-1}}$ "обратного отображения" принадлежит $L_t(D')$, где $t = \frac{p}{p-q}\frac{n-q}{n}$;*

2) *на всяком измеримом множестве $A' \subset D'$ отображение φ порождает по правилу суперпозиции $\varphi^* f = f \circ \varphi$ ограниченный оператор вложения*

$$\varphi^* : L_r(A') \to L_s(\varphi^{-1}(A')), \quad \textit{где} \quad \frac{p(n-q)}{q(n-p)} \leq r < \infty \quad \textit{и} \quad s = r\frac{q(n-p)}{p(n-q)};$$

3) *норма оператора φ^* удовлетворяет соотношению*

$$\|\varphi^* : L_r(A') \to L_s(\varphi^{-1}(A'))\| \leq \|H_q(\cdot) \mid L_\varkappa(A')\|^{\frac{pn}{r(n-p)}};$$

4) *отображение φ обладает $\mathcal{N}^{-1}$-свойством, и его якобиан $J(x,\varphi)$ почти всюду отличен от нуля;*
5) *отображение φ непостоянно на каждой компоненте связности открытого множества D;*
6) *если $r \geq \frac{p(n-q)}{q(n-p)}$, то отображение φ порождает ограниченный оператор вложения*

$$\varphi^* : W^1_{r,p}(D') \to W^1_{s,q}(D), \quad \textit{где} \quad s = r\frac{q(n-p)}{p(n-q)}.$$

В частности, если множество D ограничено при $q < p < n$, и оператор вложения $i : W^1_p(D') \to L_{p^*}(D')$ ограничен, $p^* = \frac{pn}{n-p}$, то отображение φ порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : W^1_p(D') \to W^1_q(D)$.

Доказательство. Согласно теореме 1 функция $H_q(y)$, определенная формулой (2), принадлежит пространству $L_\varkappa(D')$. Для почти всех $y \in A' \subset D'$ имеем

$$H_q(y) = \bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi} \frac{|D\varphi|^q(x)}{|J(x,\varphi)|}\bigg)^{\frac{1}{q}} = \bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi} \Big(\frac{|D\varphi|^n(x)}{J(x,\varphi)|}\Big)^{\frac{q}{n}} \frac{1}{|J(x,\varphi)|^{1-\frac{q}{n}}}\bigg)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq \bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi} \frac{1}{|J(x,\varphi)|^{1-\frac{q}{n}}}\bigg)^{\frac{1}{q}} \geq \bigg(\sum_{x\in(\varphi^{-1}(y)\cap A)\setminus\Sigma_\varphi} \frac{1}{|J(x,\varphi)|}\bigg)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{n}} = J_{\varphi^{-1}}(y)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{n}}$$

в силу поточечного соотношения $|J(x,\varphi)| \leq |D\varphi|^n(x)$ и неравенства Йенсена. Отсюда получим

$$\|J_{\varphi^{-1}}(\cdot) \mid L_t(A')\|^t \leq \|H_q(\cdot) \mid L_\varkappa(A')\|^\varkappa \quad \text{при} \quad q < p$$

и

$$\operatorname*{ess\,sup}_{y\in A'} J_{\varphi^{-1}}(y)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{n}} \leq \operatorname*{ess\,sup}_{y\in A'} H_q(y) \qquad \text{при} \quad q = p.$$

Из этих оценок объемной производной "обратного отображения" и предложения 4 получим, что отображение φ порождает ограниченный оператор вложения

$$\varphi^* : L_r(A') \to L_s(\varphi^{-1}(A')), \quad \text{где} \quad \frac{p(n-q)}{q(n-p)} \leq r < \infty, \quad \text{а} \quad s = r\frac{q(n-p)}{p(n-q)}.$$

Из предложения 4 получим $\mathcal{N}^{-1}$-свойство отображения φ и невырожденность якобиана почти всюду.

Далее из соотношений

$$\|(J_{\varphi^{-1}}(\cdot))^{\frac{1}{s}} \mid L_\lambda(A')\|^\lambda = \|J_{\varphi^{-1}}(\cdot) \mid L_t(A')\|^t \leq \|H_q(\cdot) \mid L_\varkappa(A')\|^\varkappa, \quad q < p,$$

получаем оценку для нормы оператора $\varphi^* : L_r(D') \to L_s(D)$,

$$\|\varphi^* : L_r(A') \to L_s(\varphi^{-1}(A'))\| \leq \|H_q(\cdot) \mid L_\varkappa(A')\|^{\frac{\varkappa}{\lambda}} = \|H_q(\cdot) \mid L_\varkappa(A')\|^{\frac{pn}{r(n-p)}},$$

справедливую и при $q = p$.

Учитывая вышесказанное, получим ограниченность оператора суперпозиции в пространствах Соболева с основной нормой. $\square$

Из теоремы 3 вытекает утверждение, обобщающее соответствующий результат из [18].

Следствие 3. Отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : W_p^1(D') \to W_p^1(D)$, $1 \leq p < n$, тогда и только тогда, когда оно порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : L_p^1(D') \to L_p^1(D)$.

Доказательство. Достаточность доказана в предыдущем утверждении. Чтобы установить необходимость, надо доказать, что выполняются условия теоремы 1, если оператор $\varphi^* : W_p^1(D') \to W_p^1(D)$ ограничен. Свойство ACL отображения φ доказано в предложении 2.

Фиксируем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равную единице на $B(0,1)$ и нулю вне шара $B(0,2)$. Подставим в неравенство $\|\nabla\varphi^*(f) \mid L_p(D)\| \leq \|\varphi^*\|\|f \mid W_p^1(D')\|$ вместо f функции $h_j(z) = (z-y)_j\eta(\frac{z-y}{r})$, $j = 1, \dots, n$, где $(z-y)_j$ обозначает j-ю координату вектора $z-y$, $B(y,2r) \subset D'$. Получим

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y,r))} |D\varphi|^p(x)\,dx \leq C\|\varphi^*\|^p|B(y,2r)|, \quad r \in (0,1),$$

поскольку $\|h_j \mid L_p(D')\|^p = o(|B(y,2r)|)$ равномерно по всем шарам $B(y,2r) \subset D'$ и $r \in (0,1)$ (здесь C — некоторая постоянная, зависящая только от размерности n и показателя p). Далее так же, как и в доказательстве теоремы 1, начиная с формулы (3), показывается, что отображение φ имеет конечное искажение, и справедлива оценка

$$\Bigg(\sum_{\substack{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi,\\ J(x,\varphi)\neq 0}} \frac{|D\varphi|^p(x)}{|J(x,\varphi)|}\Bigg)^{\frac{1}{p}} \leq C\|\varphi^*\|$$

для почти всех $y \in D'$ таких, что $\varphi^{-1}(y) \setminus (\Sigma_\varphi \cup Z) \neq \emptyset$, и $J(x,\varphi) \neq 0$, если $x \in \varphi^{-1}(y) \setminus (\Sigma_\varphi \cup Z)$. По теореме 1 оператор $\varphi^* : L_p^1(D') \to L_p^1(D)$ ограничен. $\square$

2. Оценки искажения меры

Рассмотрим более детально вопросы, связанные со свойствами искажения меры.

Теорема 4. *Если отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор вложения*

$$\varphi^* : L_p^1(D') \to L_q^1(D), \quad 1 \leq q \leq p \leq n,$$

то φ обладает $\mathcal{N}^{-1}$-свойством.

Доказательство. Утверждение теоремы при $p < n$ доказано в теореме 3. Здесь мы приведем другое доказательство, единое для всех показателей $p \leq n$.

По теореме 1 отображение $\varphi \in \mathrm{ACL}(D)$, и можно считать, что открытое множество D ограничено. Далее рассмотрим случай $q < n$; случай $q = n$ сводится к предыдущему, поскольку множество D ограниченное.

Фиксируем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равную единице на $B(0,1)$ и нулю вне шара $B(0,2)$. На основании леммы 1 имеем

$$\|\varphi^* f \mid L_q^1(D)\| \leq C_1\Phi(2B)^{\frac{1}{\sigma}}|B|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}},$$

где $B = B(y_0,r)$ — такой шар, что $\overline{B(y_0,2r)} \subset D'$, и $f(y) = \eta(\frac{y-y_0}{r})$. (В случае $p = q$ полагаем $\Phi(2B)^{\frac{1}{\sigma}} = \|\varphi^*\|$ для всех шаров B.) Возьмем в D' произвольное множество E нулевой меры. Без ограничения общности можно считать, что множество E ограничено. Так как отображение φ имеет конечное искажение, то $\varphi^{-1}(E) \neq D$ (в противном случае $J(x,\varphi) = 0$ и, следовательно, $D\varphi(x) = 0$, откуда получаем, что φ — постоянное отображение). Поэтому найдется куб $Q \subset D$ такой, что $2Q \subset D$ и $|Q \setminus \varphi^{-1}(E)| > 0$ (здесь $2Q$ — куб с тем же центром, что и Q, с ребрами, растянутыми в два раза сравнительно с Q). Поскольку компоненты данного отображения измеримы, то по теореме Лузина найдется компакт $T\subset Q\setminus\varphi^{-1}(E)$ положительной меры такой, что $\varphi: T\to D'$ непрерывно. Тогда образ $\varphi(T)\subset D'$ компактен и $\varphi(T)\cap E=\emptyset$. Рассмотрим произвольное открытое множество $U\supset E$, $\varphi(T)\cap U=\emptyset$, $U\subset D'$. Пусть $\{B(y_i,r_i)\}$ — набор шаров, выбранный согласно лемме 2; $\{B(y_i,r_i)\}$ и $\{B(y_i,2r_i)\}$ образуют покрытия множества U, и кратность покрытия $\{B(y_i,2r_i)\}$ конечна ($B(y_i,2r_i)\subset U$ для всех $i\in\mathbb{N}$). Тогда для функции f_i, ассоциированной с шаром $B(y_i,r_i)$, имеем $\varphi^*f_i=1$ на множестве $\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))$ и $\varphi^*f=0$ вне множества $\varphi^{-1}(B(y_i,2r_i))$, в частности, $\varphi^*f=0$ на множестве T. Кроме того, для нее справедлива оценка

$$\|\varphi^*f_i\mid L^1_q(2Q)\|\le\|\varphi^*f_i\mid L^1_q(D)\|\le C_1\Phi(B(y_i,2r_i))^{\frac{1}{\sigma}}|B(y_i,r_i)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}}$$

(при $q=p$ полагаем $\Phi(A)^{\frac{1}{\sigma}}=\|\varphi^*\|$). В силу одного из вариантов неравенства Пуанкаре (см., напр., [12]) справедливо неравенство

$$\left(\int\limits_Q|g|^{q^*}\,dx\right)^{\frac{1}{q^*}}\le C_2l(Q)^{n/q^*}\left(\int\limits_{2Q}|\nabla g|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

где $q^*=qn/(n-q)$ при $q<n$, $l(Q)$ — длина ребра куба Q, а $g\in W^1_{q,\mathrm{loc}}(Q)$ — произвольная функция, равная нулю на множестве T (здесь C_2 — постоянная, зависящая от “размера” множества T). Применяя неравенство Пуанкаре к функции φ^*f_i вместо g и учитывая две последние оценки, получим

$$|\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))\cap Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{n}}\le C_3\Phi(B(y_i,2r_i))^{\frac{1}{\sigma}}|B(y_i,r_i)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}}.$$

С помощью неравенства Гёльдера выводим соотношение

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))\cap Q|\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{n}}\le C_3\left(\sum_{i=1}^{\infty}\Phi(B(y_i,2r_i))\right)^{\frac{1}{r\sigma}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|B(y_i,r_i)|\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}}.$$

Применяя лемму 3 для оценки значений функции Φ через кратность покрытия, имеем

$$|\varphi^{-1}(E)\cap Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{n}}\le C_4\Phi(U)^{\frac{1}{\sigma}}|U|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}}.$$

Из этой оценки (используя следствие 1 при $p=n$) в силу произвола в выборе открытого множества U получим, что $|\varphi^{-1}(E)\cap Q|=0$. Так как выбор куба $Q\subset D$ произволен, то $|\varphi^{-1}(E)|=0$, и поэтому отображение φ обладает $\mathcal{N}^{-1}$-свойством. $\square$

Из теоремы 4 и формулы замены переменной получим

Следствие 4. Пусть отображение $\varphi: D\to D'$ порождает ограниченный оператор вложения

$$\varphi^*: L^1_p(D')\to L^1_q(D),\quad 1\le q\le p\le n.$$

Тогда его якобиан $J(x,\varphi)$ почти всюду отличен от нуля.

Доказательство. Согласно теореме 4 отображение φ обладает $\mathcal{N}^{-1}$-свойством. Это эквивалентно тому, что образ множества $A\subset D$, $A\cap\Sigma_\varphi\ne\emptyset$, положительной меры есть множество положительной меры. Пусть $Z=\{x\in D\setminus\Sigma_\varphi\mid J(x,\varphi)=0\}$. Если $|Z|>0$, то $|\varphi(Z\setminus\Sigma_\varphi)|>0$. Однако по формуле (1) $|\varphi(Z\setminus\Sigma_\varphi)|=0$. Полученное противоречие приводит к тому, что $|Z|=0$. $\square$

В следующем утверждении описывается достаточно широкий класс отображений, порождающих отображения классов Соболева. Напомним, что

$$K_p(x)=\inf\{k:|D\varphi|(x)\le k|J(x,\varphi)|^{1/p},\ x\in D\}.$$

Теорема 5. *Пусть непостоянное на каждой компоненте связности открытого множества отображение* $\varphi: D\to D'$, *где* D *и* D' *— открытые множества в* $\mathbb{R}^n$,

а) *принадлежит классу* $\mathrm{ACL}(D)$;

b) *имеет конечное искажение*;

c) *функция кратности* $M(y,\varphi,D)=\#\{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi\}\in L_\infty(D')$;

d) *величина* $K_{p,q}(D)=\|K_p(\cdot)\mid L_\varkappa(D)\|$ *конечна, где* $\varkappa^{-1}=1/q-1/p$ *при* $q<p$ *и* $\varkappa=\infty$ *при* $q=p$.

Тогда

1) *отображение* φ *порождает ограниченный оператор*
$$\varphi^*: L^1_p(D')\to L^1_q(D),\quad 1\le q\le p\le\infty,$$
причем его норма не превосходит величины
$$\|M(y,\varphi,D)\mid L_\infty(D')\|^{\frac{1}{p}}\|K_p(\cdot)\mid L_\varkappa(D)\|,\quad \varkappa\in[1,\infty];$$

2) *при* $1\le q\le p\le n$ *отображение* φ *обладает* $\mathcal{N}^{-1}$*-свойством Лузина и якобиан* $J(x,\varphi)$ *почти всюду отличен от нуля.*

При $q=p=n$ *справедливо обращение*: *если отображение* $\varphi: D\to D'$ *порождает ограниченный оператор* $\varphi^*: L^1_n(D')\to L^1_n(D)$, *то* φ *обладает свойствами* a)–c) *и величина* $K_{n,n}(D)=\|K_n(\cdot)\mid L_\infty(D)\|$ *конечна. Для нормы оператора* $\varphi^*: L^1_n(D')\to L^1_n(D)$ *справедлива оценка снизу*
$$\|\varphi^*\|\sim\|H_n(\cdot)\mid L_\infty(D)\|\ge\|M(y,\varphi,D)\mid L_\infty(D')\|^{\frac{1}{n}}.$$

Доказательство. Проверим, что выполнены условия теоремы 1. Для этого надо установить ограниченность величины
$$H_{p,q}(D')=\|H_q(\cdot)\mid L_\varkappa(D')\|,$$
где функция $y\mapsto H_q(y)$ определена формулой (2), а число $\varkappa$ определено в условии теоремы. Приводимые ниже оценки соответствуют случаю $q<p$. При $q=p$ они лишь упрощаются.

Применяя формулу (1), получим оценку
$$\|K_p(\cdot)\mid L_\varkappa(D)\|^\varkappa=\int_D\left(\frac{|D\varphi|^p(x)}{|J(x,\varphi)|}\right)^{\frac{q}{p-q}}dx=$$
$$=\int_{D\setminus Z}\left(\frac{|D\varphi|^q(x)}{|J(x,\varphi)|}\right)^{\frac{p}{p-q}}|J(x,\varphi)|\,dx=\int_{D'}\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi}\left(\frac{|D\varphi|^q(x)}{|J(x,\varphi)|}\right)^{\frac{p}{p-q}}dy,$$
где обозначения Σ_φ и Z имеют тот же смысл, что и ранее.

С другой стороны, очевидно, что для почти всех $y\in D'$ имеем
$$\left(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi}\frac{|D\varphi|^q(x)}{|J(x,\varphi)|}\right)^{\frac{p}{p-q}}\le M(y,\varphi,D)^{\frac{\varkappa}{p}}\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi}\left(\frac{|D\varphi|^q(x)}{|J(x,\varphi)|}\right)^{\frac{p}{p-q}}.$$
Из приведенных оценок непосредственно следует
$$\|H_q(\cdot)\mid L_\varkappa(D')\|\le\|M(\cdot,\varphi,D)\mid L_\infty(D')\|^{\frac{1}{p}}\|K_p(\cdot)\mid L_\varkappa(D)\|,\quad \varkappa\in[1,\infty].$$
Отсюда видно, что выполнены условия теоремы 1, а следовательно, и теоремы 4. Таким образом, из теоремы 1 получаем первое заключение теоремы 5, а из теоремы 4 и следствия 4 вытекают $\mathcal{N}^{-1}$-свойство и невырожденность якобиана почти всюду.

Если теперь $q=p=n$ и отображение $\varphi: D\to D'$ порождает ограниченный оператор $\varphi^*: L^1_n(D')\to L^1_n(D)$, то из теоремы 1 вытекают свойства a), b) и $H_{n,n}(D')=\|H_n(\cdot)\mid L_\infty(D')\|<\infty$. Отсюда получим $K_{n,n}(D)=\|K_n(\cdot)\mid L_\infty(D)\|<\infty$, т.к. $K_{n,n}(D)\le H_{n,n}(D')$ в силу поточечного неравенства $K_n(x)\le H_n(\varphi(x))$, справедливого для почти всех $x\in D\setminus\Sigma_\varphi$, поскольку по следствию 4 якобиан $J(x,\varphi)$ почти всюду отличен от нуля.

Чтобы доказать свойство c), заметим, что $|J(x,\varphi)|\le|D\varphi|^n(x)$ почти всюду, и поэтому
$$M(y,\varphi,D)^{\frac{1}{n}}\le H_n(y)\le\|H_n(\cdot)\mid L_\infty(D')\|$$

для почти всех $y \in D'$. $\square$

В том случае, когда отображение φ удовлетворяет дополнительным топологическим требованиям, можно получить точную оценку искажения меры.

Напомним, что отображение $\varphi : D \to D'$ называется *собственным*, если прообраз компактного множества из D' компактен в D.

Теорема 6. *Пусть отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор вложения*

$$\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D), \quad 1 \le q \le p \le n.$$

Тогда при $p < n$ для всякого измеримого множества $E \subset D'$ выполняется неравенство

$$|\varphi^{-1}(E)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{n}} \le \|H_q(\cdot) \mid L_\varkappa(E)\| |E|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}}.$$

Если отображение $\varphi : D \to D'$ собственное и порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : L^1_n(D') \to L^1_q(D)$, $q < n$, то

$$|\varphi^{-1}(E)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{n}} \le \|H_q(\cdot) \mid L_\varkappa(E)\|$$

для любого измеримого множества $E \subset D'$. Здесь $\varkappa = \frac{pq}{p-q}$, если $q < p$, и $\varkappa = \infty$, если $q = p$.

Доказательство. В случае $p < n$ воспользуемся п. 2 теоремы 3, полагая в ней $r = \frac{np}{n-p}$, а $A' = E$. Тогда $s = \frac{nq}{n-q}$ и для функции $f = \chi_E$ в силу ограниченности оператора $\varphi^* : L_r(E) \to L_s(\varphi^{-1}(E))$ имеем $|\varphi^{-1}(E)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{n}} \le \|H_q(\cdot) \mid L_\varkappa(E)\| \, |E|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}}$.

В случае $q < p = n$ приведем независимое доказательство. Фиксируем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равную единице на $B(0,1)$ и нулю вне шара $B(0,2)$. На основании леммы 1 имеем ($B = B(y_0, r)$, $\overline{B(y_0, 2r)} \subset D'$)

$$\|\varphi^* f \mid L^1_q(D)\| \le \Phi(2B)^{\frac{1}{\varkappa}},$$

где $f(y) = \eta\left(\frac{y-y_0}{r}\right)$. Так как отображение φ собственное, то $\varphi^* f \in \overset{\circ}{L}{}^1_q(D)$ и выполнено неравенство Соболева

$$\|\varphi^* f \mid L_{q^*}(D)\| \le C_1 \|\varphi^* f \mid L^1_q(D)\|, \quad \text{где} \quad \frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$$

(см., напр., [12]). Из условий $\varphi^* f = 1$ на множестве $\varphi^{-1}(B(y_0, r))$ и $\varphi^* f = 0$ вне множества $\varphi^{-1}(B(y_0, 2r))$ получим оценку

$$|\varphi^{-1}(B)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{n}} \le C_2 \Phi(2B)^{\frac{1}{\varkappa}} |B|.$$

Для измеримого множества $E \subset D'$ выберем число $\varepsilon > 0$ и открытое множество $U \supset E$ так, чтобы $|U| \le |E| + \varepsilon$. Рассмотрим набор шаров $\{B(y_i, r_i)\}$ такой, что $\{B(y_i, r_i)\}$ и $\{B(y_i, 2r_i)\}$ образуют покрытия множества U, кратность которых конечна и не зависит от выбора открытого множества U ($B(y_i, 2r_i) \subset U$ для всех $i \in \mathbb{N}$). С помощью неравенства Гёльдера выводим

$$\Big(\sum_{i=1}^\infty |\varphi^{-1}(B(y_i, r_i))| \Big)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{n}} \le C_2 \Big(\sum_{i=1}^\infty \int_{B(y_i, 2r_i)} H_q(y)^\varkappa \, dy \Big)^{\frac{1}{\varkappa}}.$$

Отсюда имеем $|\varphi^{-1}(E)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{n}} \le C \|H_q(\cdot) \mid L_\varkappa(U)\|$ в силу теоремы 1. Так как число $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, то, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$|\varphi^{-1}(E)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{n}} \le C \|H_q(\cdot) \mid L_\varkappa(E)\|. \quad \square$$

Замечание. Требование для отображения $\varphi : D \to D'$ быть собственным в теореме 6 при $p = n$ вызвано не только применением теоремы вложения, но и существом дела (см. [32]). Естественно, что оценка теоремы 6 без топологического условия на отображение справедлива также и в тех случаях, когда на множестве определения отображения справедливы такие же теоремы вложения, как и в пространстве $\mathbb{R}^n$.

3. Топологические отображения с интегрируемым искажением

В этом пункте покажем, что при гомеоморфных отображениях норма оператора вложения ассоциируется со счетно-квазиаддитивной функцией множества, определенной на открытом множестве D.

Для открытого множества $A \subset D \subset \mathbb{R}^n$ обозначим символом φ_A сужение гомеоморфизма $\varphi : D \to D'$ на множество A, и символом φ_A^* оператор суперпозиции $f \circ \varphi$, где $f \in L_p^1(\varphi(A))$.

Определим функцию $\Psi(A)$ открытого множества $A \subset D$ по правилу

$$\Psi(A) = \sup_{f \in L_p^1(\varphi(A))} \left(\frac{\|\varphi^* f \mid L_q^1(A)\|}{\|f \mid L_p^1(\varphi(A))\|} \right)^{\sigma}, \quad \text{где} \quad \sigma = \begin{cases} \frac{pq}{p-q} & \text{при } 1 \leq q < p < \infty; \\ q & \text{при } 1 \leq q < p = \infty; \\ 1 & \text{при } 1 \leq q = p < \infty. \end{cases}$$

Таким образом, по определению $\Psi(A)^{\frac{1}{\sigma}} = \|\varphi_A^*\|$. Корректность определения функции Ψ следует из работ [27] и [33], в которых доказана оценка

$$\Psi(A) \leq \begin{cases} \int\limits_A K_p^{\sigma}(x)\, dx & \text{при } 1 \leq q < p < \infty; \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in A} K_p(x) & \text{при } 1 \leq q = p < \infty; \\ \int\limits_A |D\varphi|^q(x)\, dx & \text{при } 1 \leq q < p = \infty, \end{cases}$$

где величина $K_p(x)$ определена перед теоремой 5. Из этих неравенств получаем, что из ограниченности оператора вложения

$$\varphi^* : L_p^1(D') \to L_q^1(D), \quad 1 \leq q \leq p \leq \infty,$$

вытекает ограниченность оператора вложения

$$\varphi_A^* : L_p^1(\varphi(A)) \to L_q^1(A), \quad 1 \leq q \leq p \leq \infty.$$

Следовательно, при $q < p$ функция множества Ψ является ограниченной абсолютно непрерывной функцией, определенной на открытых подмножествах из D.

Лемма 4. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : L_p^1(D') \to L_q^1(D)$, $1 \leq q < p \leq \infty$. Тогда функция Ψ является ограниченной абсолютно непрерывной счетно-аддитивной функцией, определенной на открытых множествах из D.*

Доказательство. Пусть A_i, $i \in \mathbb{N}$, — открытые попарно непересекающиеся множества в D, $A_i' = \varphi(A_i)$, $i = 0, 1, \ldots$, $A_0' = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i'$. Рассмотрим такую функцию $f_i \in L_p^1(A_i')$, чтобы одновременно выполнялись условия $\|\varphi^* f_i \mid L_q^1(A_i)\| \geq \big(\Psi(A_i')(1 - \frac{\varepsilon}{2^i})\big)^{\frac{1}{\sigma}} \|f_i \mid L_p^1(A_i')\|$ и $\|f_i \mid L_p^1(A_i')\|^p = \Psi(A_i')(1 - \frac{\varepsilon}{2^i})$ при $p < \infty$ ($\|f_i \mid L_p^1(A_i')\| = 1$ при $p = \infty$), $\varepsilon \in (0, 1)$. Пусть $f_N = \sum\limits_{i=1}^{N} f_i$. Повторяя далее рассуждения леммы 1, получим

$$\Psi(A_0')^{\frac{1}{\sigma}} \geq \sup \frac{\Big\|\varphi^* f_N \Big| L_q^1\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i\Big)\Big\|}{\Big\|f_N \Big| L_p^1\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i'\Big)\Big\|} \geq \Big(\sum_{i=1}^{N} \Psi(A_i') - \varepsilon \Psi(A_0') \Big)^{\frac{1}{\sigma}},$$

где точная верхняя грань берется по всем функциям $f_N \in L_p^1\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i'\Big)$ указанного выше вида. Так как N и ε произвольны, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Psi(A_i') \leq \Psi\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'\Big).$$

Справедливость обратного неравенства проверяется непосредственно. $\square$

Следующая теорема для любого открытого множества $A \subset D$ уточняет оценку нормы оператора вложения

$$\varphi_A^* : L_p^1(\varphi(A)) \to L_q^1(A), \quad 1 \le q \le p \le \infty,$$

полученную в [27]; *функция множества Ψ хоть и не является монотонной, тем не менее заключена между двумя монотонными счетно-аддитивными функциями множества.*

Определим функцию $\Lambda(A)$ открытого множества $A \subset D$ по правилу

$$\Lambda(A) = \sup_{f \in \overset{\circ}{L}{}_p^1(\varphi(A))} \left(\frac{\|\varphi^* f \mid L_q^1(A)\|}{\|f \mid \overset{\circ}{L}{}_p^1(\varphi(A))\|} \right)^{\sigma}, \quad \text{где } \sigma = \begin{cases} \frac{pq}{p-q} & \text{при } 1 \le q < p < \infty; \\ 1 & \text{при } 1 \le q = p < \infty. \end{cases}$$

Так же, как и в лемме 1, доказывается, что Λ является ограниченной монотонной счетно-аддитивной функцией, определенной на открытых ограниченных множествах $A \subset D$. Очевидно $\Lambda(A) \le \Psi(A)$ и $\Lambda(A) \le \Psi(B)$ для любого ограниченного открытого множества A и произвольного открытого множества B с условием $A \subset B \subset D$.

Теорема 7. *Пусть D и D' — открытые множества в $\mathbb{R}^n$. Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : L_p^1(D') \to L_q^1(D)$, $1 \le q \le p < \infty$, тогда и только тогда, когда отображение φ принадлежит $W_{q,\mathrm{loc}}^1(D)$, имеет конечное искажение и*

$$K_p(\cdot) \in L_\varkappa(D), \quad \text{где} \quad \varkappa = \begin{cases} \frac{qp}{p-q}, & \text{если } q < p; \\ \infty, & \text{если } q = p. \end{cases}$$

Оператор $\varphi_A^* : L_p^1(\varphi(A)) \to L_q^1(A)$, $A \subset D$ — открытое множество, ограничен и его норма удовлетворяет соотношению

$$\gamma_{p,q} K_{p,q}(A) \le \|\varphi_A^*\| \le K_{p,q}(A), \tag{6}$$

где $K_{p,q}(A) = \|K_p(\cdot) \mid L_\varkappa(D)\|$, а $0 < \gamma_{p,q}$ — постоянная.

Для доказательства теоремы 7 при $q < p$ понадобится представляющая самостоятельный интерес

Теорема 8. *Пусть D и D' — открытые множества в $\mathbb{R}^n$. Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : L_p^1(D') \to L_q^1(D)$, $1 \le q < p < \infty$, тогда и только тогда, когда отображение φ принадлежит $W_{q,\mathrm{loc}}^1(D)$, имеет конечное искажение и существует ограниченная монотонная счетно-аддитивная функция Λ, определенная на открытых ограниченных множествах $A \subset D$, такая, что справедлива эквивалентность*

$$\gamma_{p,q}^{\varkappa} K_p^{\varkappa}(x) \le \Lambda'(x) \le K_p^{\varkappa}(x),$$

где $\gamma_{p,q}$ — постоянная из теоремы 7.

Доказательство теорем 7 и 8. Необходимость. Принадлежность отображения φ классу $W_{q,\mathrm{loc}}^1(D)$ проверяется подстановкой тестовых функций, которые применялись при доказательстве предложения 2. Покажем, что отображение φ имеет конечное искажение. Заметим, что этот факт так же, как и оценка коэффициента квазиконформности отображения φ через производную функции множества, заданной на подмножествах открытого множества D', может быть получен как следствие теоремы 2, доказанной при более общих предположениях. Однако мы приведем здесь независимое рассуждение.

Так же, как и в доказательстве теоремы 1, для любой функции $f \in \overset{\circ}{L}{}_p^1(A')$ при $q \le p$ выполняется неравенство

$$\|\varphi^* f \mid L_q^1(D)\| \le \Lambda(\varphi^{-1}(A'))^{1/\sigma} \|f \mid \overset{\circ}{L}{}_p^1(A')\|,$$

где $A' \subset D'$ — открытое ограниченное подмножество. Далее полагаем $q < p$ (при $q = p$ выкладки лишь упрощаются). Фиксируем срезку $\eta \in C_0^\infty(R^n)$, равную единице на $B(0,1)$ и нулю вне шара $B(0,2)$. Подставляя в это неравенство функции $h_j(z) = (z-y)_j \eta(\frac{z-y}{r})$, $j = 1, \dots, n$, где $(z-y)_j$ обозначает j-ю координату вектора $z - y$, $B(y, 2r) \subset D'$, имеем

$$\Big(\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y,r))} |D\varphi|^q(x)\, dx \Big)^{1/q} \leq C_1 \Lambda(\varphi^{-1}(B(y,2r)))^{1/\varkappa} |B(y,r)|^{1/p},$$

где C_1 — некоторая постоянная. Пусть $B(x_0, r) \subset D$ и $U = \varphi(B(x_0, r))$. Рассмотрим набор шаров $\{B(y_i, r_i)\}$ такой, что $\{B(y_i, r_i)\}$ и $\{B(y_i, 2r_i)\}$ образуют покрытие множества U, кратность которых конечна и не зависит от выбора открытого множества U ($B(y_i, 2r_i) \subset U$ для всех $i \in \mathbb{N}$). Применяя предыдущее неравенство к каждому из шаров $\{B(y_i, 2r_i)\}$, с помощью неравенства Гёльдера выводим соотношение

$$\Big(\sum_{i=1}^\infty \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))} |D\varphi|^q(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{q}} \leq C_2 \Big(\sum_{i=1}^\infty \Lambda(\varphi^{-1}(B(y_i, 2r_i))) \Big)^{\frac{1}{\varkappa}} \Big(\sum_{i=1}^\infty |B(y_i, r_i)| \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Заметим, что функция множества $A' \mapsto \Lambda(\varphi^{-1}(A'))$, $A' \subset D'$ — открытое множество, является монотонной и счетно-аддитивной. Применяя к ней лемму 3, получим оценку для суммы значений $\Lambda(\varphi^{-1}(B(y_i, 2r_i)))$ через функцию кратности

$$\sum_{i=1}^\infty \Lambda(\varphi^{-1}(B(y_i, 2r_i))) \leq \xi_n \Lambda\Big(\varphi^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^\infty B(y_i, 2r_i) \Big) \Big),$$

где постоянная ξ_n зависит только от размерности n [31]. Учитывая, что $U = \varphi(B(x_0, r)) = \bigcup\limits_{i=1}^\infty B(y_i, 2r_i) = \bigcup\limits_{i=1}^\infty B(y_i, r_i)$, имеем

$$\Big(\int\limits_{B(x_0,r)} |D\varphi|^q(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{q}} \leq C_3 \Lambda(B(x_0, r))^{\frac{1}{\varkappa}} |\varphi(B(x_0, r))|^{\frac{1}{p}}.$$

Преобразуем это неравенство к виду

$$\Big(\frac{1}{|B(x_0,r)|} \int\limits_{B(x_0,r)} |D\varphi|^q(x)\, dx \Big)^{1/q} \leq C_3 \Big(\frac{\Lambda(B(x_0,r))}{|B(x_0,r)|} \Big)^{1/\varkappa} \Big(\frac{|\varphi(B(x_0,r))|}{|B(x_0,r)|} \Big)^{1/p}$$

и перейдем к пределу при $r \to 0$. Тогда

$$|D\varphi|(x) \leq C_3 \begin{cases} \Lambda'(x)^{1/\varkappa} J_\varphi(x)^{1/p} & \text{при } q < p; \\ \|\varphi_D^*\| J_\varphi(x)^{1/p} & \text{при } q = p. \end{cases}$$

Так как отображение φ принадлежит $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$, то (напр., [29], [34]) существует последовательность замкнутых множеств $\{A_k\}$, $A_k \subset A_{k-1}$, таких, что $\varphi|_{A_k} \in \mathrm{Lip}(A_k)$ и $|D \setminus \bigcup\limits_k A_k| = 0$. Отсюда получим, в частности, что $J_\varphi(x) = J(x, \varphi)$ для почти всех $x \in D$ ([29]), и, следовательно, отображение φ имеет конечное искажение. Кроме того,

$$K_p(x) = \frac{|D\varphi|(x)}{|J(x,\varphi)|^{1/p}} \leq c\|\varphi_D^*\| \qquad \text{для почти всех } x \in D \text{ при } 1 \leq q = p < \infty \tag{7}$$

и

$$K_p^\varkappa(x) = \Big(\frac{|D\varphi|(x)}{|J(x,\varphi)|^{1/p}} \Big)^\varkappa \leq c\Lambda'(x) \quad \text{для почти всех } x \in D \text{ при } 1 \leq q < p < \infty. \tag{8}$$

Интегрируя (8) по ограниченному открытому множеству $A \subset D$ и применяя предложение 1, получим оценку нормы оператора φ_D^* снизу

$$\int_A \left(\frac{|D\varphi|(x)}{|J(x,\varphi)|^{1/p}} \right)^{\varkappa} dx \le c \int_A \Lambda'(x)\, dx \le c\Lambda(A) \le c\Psi(D). \tag{9}$$

Достаточность. Пусть $A \subset D$ — произвольное открытое множество, а $A' = \varphi(A)$. Покажем, что для любой функции $f \in L_p^1(A') \cap C^1(A')$ выполняется неравенство $\|\varphi^* f \mid L_q^1(A)\| \le K_{p,q} \|f \mid L_p^1(A')\|$, $q \le p$. Так как $f \circ \varphi$ принадлежит классу $\mathrm{ACL}(A)$, то

$$\|\varphi^* f \mid L_q^1(A)\| \le \left(\int_A (|\nabla f|(\varphi(x))|D\varphi|)^q\, dx \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\int_{A\setminus Z} |\nabla f|^q(\varphi(x))|J(x,\varphi)|^{q/p} \frac{|D\varphi|^q}{|J(x,\varphi)|^{q/p}}\, dx \right)^{1/q}.$$

Используя неравенство Гёльдера при $q \le p$, выводим оценку

$$\|\varphi^* f \mid L_q^1(A)\| \le \left(\int_{A\setminus Z} \left(\frac{|D\varphi|(x)}{|J(x,\varphi)|^{1/p}} \right)^{\varkappa} dx \right)^{1/\varkappa} \left(\int_{A\setminus Z} |\nabla f|^p(\varphi(x))|J(x,\varphi)|\, dx \right)^{1/p}$$

(при $q = p$ левый сомножитель равен $K_{p,p}(A)$). Применяя к правому сомножителю формулу (1), получим оценку для нормы $\|\varphi_A^*\| \le K_{p,q}(A)$. Распространение полученной оценки на все функции $f \in L_p^1(A')$ происходит по схеме теоремы 1.

Соотношение $\Psi^{\frac{1}{\varkappa}}(A) = \|\varphi_A^*\| \le K_{p,q}(A)$ при $q \le p$, таким образом, доказано. Отсюда в силу неравенства $\Lambda(A) \le \Psi(A)$ получим оценку сверху для производной $\Lambda'(x)$ при $q < p$

$$\Lambda'(x) \le \left(\frac{|D\varphi|(x)}{|J(x,\varphi)|^{1/p}} \right)^{\varkappa} \quad \text{для почти всех } x \in D \text{ в случае } 1 \le q < p < \infty.$$

Поскольку оператор $\varphi_A^* : L_p^1(\varphi(A)) \to L_q^1(A)$ ограничен, то из рассуждений первой части доказательства, примененной к открытому множеству A вместо D, получаем для него оценку снизу; из (7) имеем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in A} \frac{|D\varphi|(x)}{|J(x,\varphi)|^{1/p}} \le C\|\varphi_A^*\| \quad \text{в случае } 1 \le q = p < \infty,$$

а в силу (9) и неравенства $\Lambda(A) \le \Psi(A)$ —

$$\int_A \left(\frac{|D\varphi|(x)}{|J(x,\varphi)|^{1/p}} \right)^{\varkappa} dx \le c\Psi(A)$$

для любого ограниченного множества $A \subset D$. Если $B \subset D$ — произвольное открытое множество, то для произвольной возрастающей последовательности $A_i \subset A_{i+1} \subset B$ ограниченных открытых множеств таких, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = B$, имеем $K_{p,q}^{\varkappa}(A_i) \le c\Lambda(A_i) \le c\Psi(B)$. Переходя к пределу при $i \to \infty$, получаем необходимую оценку. $\square$

Следствие 5. Функция множества Ψ является ограниченной абсолютно непрерывной счетно ϑ-квазиаддитивной функцией множества, определенной на открытых множествах из D.

Доказательство. Для произвольной совокупности попарно непересекающихся открытых множеств $A_i \subset A \subset D$ имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Psi(A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \left(\frac{|D\varphi|(x)}{|J(x,\varphi)|^{1/p}} \right)^{\varkappa} dx \le \int_A \left(\frac{|D\varphi|(x)}{|J(x,\varphi)|^{1/p}} \right)^{\varkappa} dx \le \vartheta\Psi(A).$$

Отсюда, из теорем 7 и 8 и предложения 1 получим

Следствие 6. Пусть D и D' — открытые множества в $\mathbb{R}^n$. Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор вложения $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D)$, $1 \le q < p < \infty$, тогда и только тогда, когда существует ограниченная абсолютно непрерывная счетно ϑ-квазиаддитивная функция Ψ, определенная на открытых множествах $A \subset D$, причем ее верхняя производная $\overline{\Psi}'(x)$ эквивалентна $K^{\varkappa}_p(x) = \left(\frac{|D\varphi(x)|}{|J(x,\varphi)|^{1/p}}\right)^{\varkappa}$:

$$\lambda_2 K^{\varkappa}_p(x) \le \overline{\Psi}'(x) \le K^{\varkappa}_p(x)$$

почти всюду в D, где λ_2 — некоторая постоянная.

Норма оператора φ^*_A эквивалентна $\int\limits_A \overline{\Psi}'(x)\,dx$ для любого открытого множества $A \subset D$.

Литература

1. Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М. *Структурные изоморфизмы пространств W^1_n и квазиконформные отображения* // Сиб. матем. журн. – 1975. – Т. 16. – № 2. – С. 224–246.
2. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория.* – М.: Ин. лит., 1962. – 895 с.
3. Nakai M. *Algebraic criterion on quasiconformal equivalence of Riemann surfaces* // Nagoya Math. J. – 1960. – V. 16. – P. 157–184.
4. Lewis L.G. *Quasiconformal mappings and Royden algebras in space* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – V. 158. – № 2. – P. 481–492.
5. Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М. *Функциональные характеристики квазиизометрических отображений* // Сиб. матем. журн. – 1976. – Т. 17. – № 4. – С. 768–773.
6. Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М. *Новый функциональный инвариант для квазиконформных отображений* // Некоторые вопросы современной теории функций: Материалы конф. – Новосибирск. – 1976. – С. 18–20.
7. Водопьянов С.К. *Отображения однородных групп и вложения функциональных пространств* // Сиб. матем. журн. – 1989. – Т. 30. – № 5. – С. 25–41.
8. Гольдштейн В.М., Романов А.С. *Об отображениях, сохраняющих пространства Соболева* // Сиб. матем. журн. – 1984. – Т. 25. – № 3. – С. 55–61.
9. Романов А.С. *О замене переменной в пространствах потенциалов Бесселя и Рисса* // Функц. анал. и мат. физика. Ин-т матем. СО АН СССР. – Новосибирск. – 1985. – С. 117–133.
10. Водопьянов С.К. *L_p-теория потенциала и квазиконформные отображения на однородных группах* / С.С. Кутателадзе. Соврем. пробл. геометрии и анализа. – Новосибирск: Наука, 1989. – С. 45–89.
11. Мазья В.Г., Шапошникова Т.О. *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций.* – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. – 403 с.
12. Мазья В.Г. *Пространства С.Л. Соболева.* – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 416 с.
13. Reiman M. *Über harmonische Kapazität und quasikonforme Abbildungen in Raum* // Comm. Math. Helv. – 1969. – V. 44. – P. 264–307.
14. Gehring F.W. *Lipschitz mappings and the p-capacity of rings in n-space* // Advances in the Theory of Riemann surfaces, Ann. Math. Stud. – 1971. – N. 66. – P. 175–193.
15. Lelong-Ferrand J. *Etude d'une classe d'applications liées à des homotomorphismes d'algèbres de fonctions et généralisant les quasi-conformes* // Duke Math. J. – 1973. – V. 40. – P. 163–186.
16. Водопьянов С.К. *Формула Тейлора и функциональные пространства.* – Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 1988. – 96 с.
17. Водопьянов С.К. *Весовые пространства Соболева и теория отображений* // Тез. докл. Всесоюз. матем. шк. "Теория потенциала". Кацивели, 26 июня–3 июля 1991. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1991. – С. 7.

18. Водопьянов С.К. *Геометрические свойства пространств функций с обобщенной гладкостью.* Дис. … докт. физ.-матем. наук. – Новосибирск: Ин-т математики им. С.Л. Соболева, 1992. – 335 с.
19. Mostow G.D. *Quasiconformal mappings in n-spaces and the rigidity of hyperbolic spaces forms* // Inst. hautes études scient. publications mathematiques. – 1968. – V. 34. – P. 53–104.
20. Väisälä J. *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings.* – Berlin etc.: Springer. (Lecture Notes in Math.; 229), 1971. – 144 p.
21. Решетняк Ю.Г. *Пространственные отображения с ограниченным искажением.* – Новосибирск: Наука, 1982. – 279 с.
22. Gol'dshteĭn V., Gurov L., Romanov A. *Homeomorphisms that induce monomorphisms of Sobolev spaces* // Israel J. Math. – 1995. – V. 91. – № 1–3. – P. 31–60.
23. Ухлов А.Д. *Отображения, порождающие вложения пространств Соболева* // Сиб. матем. журн. – 1993. – Т. 34. – № 1. – С. 185–192.
24. Кругликов В.И. *Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем* // Матем. сб. – 1986. – Т. 130. – № 2. – С. 185–206.
25. Gol'dshteĭn V., Gurov L. *Applications of change of variables operators for exact embedding theorems* // Integral equations operator theory. – 1994. – V. 19. – № 1. – P. 1–24.
26. Водопьянов С.К. *Топологические и геометрические свойства отображений классов Соболева с суммируемым якобианом.* I // Сиб. матем. журн. – 2000. – Т. 41. – № 1.– С. 23–48.
27. Водопьянов С.К., Ухлов А.Д. *Пространства Соболева и (P,Q)-квазиконформные отображения групп Карно* // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39. – № 4. – С. 776–795.
28. Водопьянов С.К., Ухлов А.Д. *Операторы суперпозиции в пространствах Лебега и дифференцируемость квазиаддитивных функций множества* // Владикавказск. матем. журн. – 2002. – Т. 4. – № 1. – С. 11–33.
29. Vodop'yanov S.K. *$\mathcal{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics* // Тр. по анализу и геометрии – Новосибирск. Изд-во Ин-та математики им. С.Л. Соболева СО РАН. – 2000. – С. 603–670.
30. Водопьянов С.К. *Операторы подстановки пространств Соболева* // Современ. пробл. теории функций и их прилож., Саратов, янв. 2002 г. – Саратов. – 2002. – С. 42–43.
31. Гусман М. *Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$.* – М.: Мир, 1978. – 200 с.
32. Херрон А.Д., Коскела П. *Области Пуанкаре и квазиконформные отображения* // Сиб. матем. журн. – 1995. – Т. 36. – № 6. – С. 1416–1434.
33. Ухлов А.Д. *Пространства Соболева и дифференциальные свойства гомеоморфизмов на группах Карно.* – Препринт. Хабаровск. ИПМ ДВО РАН. – 2000. – № 18. – 28 с.
34. Федерер Г. *Геометрическая теория меры.* – М.: Наука, 1987. – 760 с.

Новосибирский государственный университет

Поступила
26.06.2002