ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 5 (492)

УДК 514.755

Т.Б. ЖОГОВА

ФОКАЛЬНОЕ ИЗГИБАНИЕ СЕМЕЙСТВ L^m_{2n-1}

Данная статья является продолжением исследований автора в области проективного изгибания семейств L^m_{2n-1} [1]. Исследуется проективное изгибание 1-го и 2-го порядка фокальных m-поверхностей семейств L^m_{2n-1}. Доказано, что проективное изгибание 2-го порядка фокальных m-поверхностей допускают только семейства R^m_{2n-1}.

Условимся, что по индексам i, j, k суммирования нет, и они не принимают равные значения, а по индексам p, q, r всегда проводится суммирование. Все индексы, как правило, принимают значения от 1 до n включительно.

1. *Фокальное изгибание первого порядка.* В $(2n-1)$-мерном проективном пространстве введем проективный репер $\{A_i, A_{n+i}\}$ с инфинитезимальными перемещениями

$$dA_i = \omega^p_i A_p + \omega^{n+p}_i A_{n+p}, \quad dA_{n+i} = \omega^p_{n+i} A_p + \omega^{n+p}_{n+i} A_{n+p}$$

и известными уравнениями структуры проективного пространства.

Как и в работе [1], отнесем семейство L^m_{2n-1}, описываемое $(n-1)$-плоскостью

$$L_{n-1} = (A_1 \dots A_n),$$

к реперу 1-го порядка. Тогда будут иметь место уравнения

$$\omega^{n+j}_i = 0, \tag{1}$$

$$\omega^j_i \wedge \omega_j - \omega^{n+j}_{n+i} \wedge \omega_i = 0, \tag{2}$$

в которых формы ω_k, $k = \overline{1,m}$, $2 \le m \le n$, являются независимыми и введено обозначение $\omega_i = \omega^{n+i}_i$. Точка A_i, являясь фокусом с фокальным направлением $\omega_i = 0$, описывает фокальную m-поверхность. Аналогично, семейство $\overline{L}^m_{2n-1}$ отнесем к реперу 1-го порядка $\{B_i, B_{n+i}\}$ с инфинитезимальными перемещениями

$$dB_i = \Omega^p_i B_p + \Omega^{n+p}_i B_{n+p}, \quad dB_{n+i} = \Omega^p_{n+i} B_p + \Omega^{n+p}_{n+i} B_{n+p}.$$

Определение. Проективное изгибание фокальных m-поверхностей семейства L^m_{2n-1} назовем фокальным изгибанием семейства L^m_{2n-1}.

Рассмотрим проективное преобразование Π, которое переводит репер $\{B_i, B_{n+i}\}$ в репер $\{\widetilde{B}_i, \widetilde{B}_{n+i}\}$, совпадающий с репером $\{A_i, A_{n+i}\}$ так, что

$$\Pi(B_i) = \widetilde{B}_i = A_i, \quad \Pi(B_{n+i}) = \widetilde{B}_{n+i} = A_{n+i}.$$

Тогда условия аналитического касания 1-го порядка соответствующих фокальных m-поверхностей семейств L^m_{2n-1} и $\Pi(\overline{L}^m_{2n-1}) = \widetilde{L}^m_{2n-1}$ определятся равенствами

$$\widetilde{B}_i + d\widetilde{B}_i = (\theta^i_0 + \theta^i_1)(A_i + dA_i), \tag{3}$$

где θ_0^i, θ_1^i — некоторые множители надлежащего порядка малости. Отсюда получим

$$\begin{gathered}\theta_0^i = 1, \quad \theta_1^i = \widetilde{\omega}_i^i, \\ \widetilde{\omega}_i = 0, \quad \widetilde{\omega}_i^{n+j} = 0, \quad \widetilde{\omega}_i^j = 0,\end{gathered} \tag{4}$$

где введены обозначения

$$\Omega_i^{n+i} = \Omega_i, \quad \widetilde{\omega}_\alpha^\beta = \Omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\beta, \quad \alpha, \beta = \overline{1, 2n}.$$

Из первых двух серий уравнений (4) следует, что фокальное изгибание 1-го порядка семейства L_{2n-1}^m влечет за собой его проективное изгибание 1-го порядка; обратное утверждение несправедливо. Продифференцировав внешним образом уравнения (4), получим

$$\begin{gathered}(\widetilde{\omega}_i^i - \widetilde{\omega}_{n+i}^{n+i}) \wedge \omega_i = 0, \quad \widetilde{\omega}_{n+i}^{n+j} \wedge \omega_i = 0, \\ (\widetilde{\omega}_j^j - \widetilde{\omega}_i^i) \wedge \omega_i^j + \widetilde{\omega}_{n+i}^j \wedge \omega_i = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Замкнутая система уравнений (1), (4); (2), (5) (система (α)) определяет семейства L_{2n-1}^m и $\overline{L}_{2n-1}^m$, находящиеся в отношении фокального изгибания 1-го порядка.

Зададим семейство L_{2n-1}^m, т. е. зададим решение системы (1), (2) и внесем это решение в систему (α). Тогда уравнения (1), (2) обратятся в тождества, а оставшаяся замкнутая система уравнений (4), (5) будет определять семейство $\overline{L}_{2n-1}^m$. Эта система находится в инволюции с характерами $s_1 = 2n^2 - n$, $s_2 = n - 1$, т. е. справедлива

Теорема 1. *Заданное семейство L_{2n-1}^m допускает фокальное изгибание 1-го порядка с произволом $n - 1$ функций двух аргументов.*

2. *Фокальное изгибание второго порядка.* При фокальном изгибании 2-го порядка семейств L_{2n-1}^m, кроме равенств (3), будут иметь место равенства $d^2\widetilde{B}_i = d^2A_i + 2\widetilde{\omega}_i^i dA_i + \theta_2^i A_i$. Учитывая, что $d^2A_i = \Delta\omega_i^q A_q + \Delta\omega_i^{n+q} A_{n+q}$, где

$$\begin{gathered}\Delta\omega_i^j = d\omega_i^j + \omega_i^p \omega_p^j + \omega_i^{n+p} \omega_{n+p}^j, \\ \Delta\omega_i^{n+j} = d\omega_i^{n+j} + \omega_i^p \omega_p^{n+j} + \omega_i^{n+p} \omega_{n+p}^{n+j}\end{gathered}$$

(здесь индекс j может быть равен индексу i), а также аналогичные выражения для $d^2\widetilde{B}_i$, получим

$$\theta_2^i = d\widetilde{\omega}_i^i + (\widetilde{\omega}_i^i)^2 + \widetilde{\omega}_{n+i}^i \omega_i,$$

$$(\widetilde{\omega}_j^j - \widetilde{\omega}_i^i)\omega_i^j + \widetilde{\omega}_{n+i}^j \omega_i = 0, \tag{6}$$

$$\widetilde{\omega}_i^i - \widetilde{\omega}_{n+i}^{n+i} = 0, \quad \widetilde{\omega}_{n+i}^{n+j} = 0. \tag{7}$$

В силу (7) первые две серии уравнений (5) обращаются в тождества, а из последней серии уравнений (5) и уравнений (6) найдем

$$\widetilde{\omega}_j^j - \widetilde{\omega}_i^i = 0, \quad \widetilde{\omega}_{n+i}^j = 0. \tag{8}$$

Продифференцировав внешним образом уравнения (7) и (8), получим

$$\widetilde{\omega}_{n+i}^i \wedge \omega_i = 0, \tag{9}$$

$$\widetilde{\omega}_{n+i}^i \wedge \omega_i^j - \widetilde{\omega}_{n+j}^j \wedge \omega_{n+i}^{n+j} = 0. \tag{10}$$

Наконец, как и в [2], если $m \neq n$, положим

$$\omega_k = \Lambda_k^r \omega_r, \quad r = \overline{1, m}, \quad k = \overline{m+1, n}. \tag{11}$$

Отсюда внешним дифференцированием находим

$$\Delta\Lambda_k^r \wedge \omega_r = 0, \tag{12}$$

где $\Delta\Lambda_k^j = d\Lambda_k^j + \Lambda_k^j(\omega_j^j - \omega_k^k - \omega_{n+j}^{n+j} + \omega_{n+k}^{n+k})$, $j = \overline{1,m}$.

Замкнутая система уравнений (1), (4), (7), (8), (11); (2), (9), (10), (12) (*основная система*) определяет семейства L_{2n-1}^m и $\overline{L}_{2n-1}^m$, находящиеся в отношении фокального изгибания 2-го порядка. Эта система находится в инволюции с характерами

$$s_1 = 2n^2 - m, \quad s_2 = \cdots = s_m = n - m. \tag{13}$$

Таким образом, справедливы

Теорема 2. *При $m \neq n$ класс семейств L_{2n-1}^m, допускающий фокальное изгибание 2-го порядка, существует с произволом $n - m$ функций m аргументов.*

Теорема 3. *Класс семейств L_{2n-1}^n, допускающий фокальное изгибание 2-го порядка, существует с произволом $2n^2 - n$ функций одного аргумента.*

Из системы уравнений (1), (4), (7) следует, что фокальное изгибание 2-го порядка семейств L_{2n-1}^m влечет за собой их проективное изгибание 2-го порядка; обратное утверждение несправедливо.

3. *Фокальное изгибание семейств R_{2n-1}^m.* Раскрывая уравнения (2), (9) по лемме Картана, получим

$$\omega_i^j = a_i^j \omega_j + c_i^j \omega_i, \quad \omega_{n+i}^{n+j} = b_i^j \omega_i - c_i^j \omega_j, \tag{14}$$

$$\widetilde{\omega}_{n+i}^i = \alpha_i \omega_i. \tag{15}$$

Из уравнений (10) находим, что

$$\alpha_i a_i^j + \alpha_j b_i^j = 0. \tag{16}$$

Если $\alpha_i = 0$, то фокальное изгибание 2-го порядка семейств L_{2n-1}^m становится тривиальным. Таким образом, из уравнений (16) следуют уравнения

$$a_i^j a_j^i - b_i^j b_j^i = 0, \quad a_i^j a_j^k a_k^i + b_i^j b_j^k b_k^i = 0. \tag{17}$$

Известно [3], что уравнения (17) являются характеристическим признаком семейства R_{2n-1}^m. Присоединяя к системе (1), (11), (14) уравнения (17), как и в [2], получим замкнутую систему уравнений, определяющую семейство R_{2n-1}^m, которая названа *малой системой*. Она содержит, кроме уравнений (1), (11), (12), уравнения

$$\begin{gathered}
\omega_i^j = a_i^j \omega_j, \quad \omega_{n+i}^{n+j} = t_i^j a_i^j \omega_i, \\
t_i^j t_j^i = 1, \quad t_i^j t_j^k t_k^i = -1, \\
\Delta a_i^j = a_{ij}^j \omega_j + a_{ii}^j \omega_i, \quad \Delta t_i^j = b_i \omega_i - b_j \omega_j, \\
\omega_{n+i}^j = a_i^j (a_{ii}^j \omega_j + t_i^j (b_j - a_{ij}^j) \omega_i), \\
\Delta a_{ij}^j \wedge \omega_j + \Delta a_{ii}^j \wedge \omega_i = 0, \quad \Delta b_i \wedge \omega_i = 0, \\
\Delta a_{ii}^j \wedge \omega_j - t_i^j \Delta a_{ij}^j \wedge \omega_i = 0,
\end{gathered} \tag{18}$$

где

$$\Delta a_i^j = d \ln a_i^j + 2\omega_j^j - \omega_i^i - \omega_{n+j}^{n+j} - (a_p^j / a_i^j)\omega_i^p,$$
$$\Delta t_i^j = d \ln t_i^j + 2(\omega_i^i - \omega_j^j - \omega_{n+i}^{n+i} + \omega_{n+j}^{n+j}),$$

$$
\begin{aligned}
\Delta b_i &= db_i + b_i(\omega_i^i - \omega_{n+i}^{n+i}) + 4(\omega_{n+i}^i - a_r^i\omega_i^r),\\
\Delta a_{ij}^j &= da_{ij}^j + a_{ij}^j(\omega_j^j - \omega_{n+j}^{n+j}) + 3w_{n+j}^j - 3a_q^j\omega_j^q - t_j^q a_j^q \omega_{n+q}^{n+j} +\\
&\quad + (a_p^j/a_i^j)(a_{ij}^j - a_{pj}^j)\omega_i^p + (b_j - a_{ij}^j)^2\omega_j - \Delta b_j,\\
\Delta a_{ii}^j &= da_{ii}^j + a_{ii}^j(\omega_i^i - \omega_{n+i}^{n+i} + a_{ii}^j\omega_i) - \omega_{n+i}^i +\\
&\quad + (a_p^j/a_i^j)(a_{ii}^j\omega_i^p - a_{pp}^j\omega_{n+i}^{n+p} - \omega_{n+i}^p), \quad r \neq i, \quad q \neq j, \quad p \neq i, j.
\end{aligned}
$$

Заметим, что при продолжении системы (1) функции c_i^j в уравнениях (14) приведены к нулю.

Малая система находится в инволюции с характерами (13), которые определяют произвол существования семейств R_{2n-1}^m, R_{2n-1}^2, R_{2n-1}^n.

В силу (15), (18) из уравнений (10) получим

$$\alpha_i + t_i^j\alpha_j = 0,$$

и уравнения (15) примут вид

$$\widetilde{\omega}_{n+1}^1 = \alpha_1\omega_1, \quad \widetilde{\omega}_{n+i}^i = -\alpha_1 t_i^1\omega_i. \tag{19}$$

Отсюда внешним дифференцированием находим

$$(d\ln\alpha_1 + 2(\omega_1^1 - \omega_{n+1}^{n+1}) - b_1\omega_1) \wedge \omega_i = 0$$

и, следовательно,

$$d\ln\alpha_1 = b_1\omega_1 - 2(\omega_1^1 - \omega_{n+1}^{n+1}). \tag{20}$$

Внешний дифференциал этого уравнения обращается в тождество.

Таким образом, при продолжении основной системы получим замкнутую систему уравнений (1), (4), (7), (8), (11), (12), (18), (19), (20) (*большая система*), которая содержит как часть малую систему.

Зададим семейство R_{2n-1}^m, определяемое решением малой системы, и внесем это решение в большую систему. Тогда оставшаяся система уравнений (4), (7), (8), (19), (20) будет вполне интегрируемой, но существенной постоянной при интегрировании этой системы будет только одна постоянная, определяемая уравнением (20).

Итак, справедлива

Теорема 4. *Только семейства R_{2n-1}^m допускают непрерывное фокальное изгибание 2-го порядка с произволом одного параметра.*

Таким образом, имеем новое определение семейств R_{2n-1}^m: семейства R_{2n-1}^m суть семейства L_{2n-1}^m, которые допускают фокальное изгибание 2-го порядка.

Литература

1. Жогова Т.Б. *Проективное изгибание второго порядка семейств L_{2n-1}^m* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 9. – С. 13–16.
2. Жогова Т.Б. *О существовании семейств R_{2n-1}^m, допускающих проективное изгибание второго порядка* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 1. – С. 31–38.
3. Макеева Г.Н. *Семейства R_{2n-1}^m и Φ_{2n-1}^m* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 1. – С. 84–86.

Нижегородский государственный педагогический университет

Поступила
25.06.2002