ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 5 (492)

УДК 517.946

С.М. ГАФУРОВА

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ B-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть $E_{\rm p}^+$ — полупространство $x_{\rm p} > 0$ p-мерного евклидова пространства $E_{\rm p}$ точек $x = (x', x_p)$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$, а R_{p+1}^+ — полупространство $t > 0$ арифметического пространства R_{p+1} точек (x,t); $R_{p+1}^{++} = E_{\rm p}^+ \times [0,\infty)$. Обозначим через $Q_R^+ = \{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 < R^2,\ x_p > 0\}$ полушар, который ограничен полусферой $S_R^+ = \{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 = R^2,\ x_p > 0\}$ и частью $K_R = \{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{p-1}^2 \le R^2\}$ гиперплоскости $x_p = 0$, а через T_R^+ — область $\{x \in Q_R^+,\ 0 < t < \infty\}$ в R_{p+1}^{++}, $\widetilde{T_R^+} = T_R^+ \bigcup \overline{Q_R^+}$.

Рассмотрим гиперболическое уравнение с оператором Бесселя

$$L(u) \equiv \Delta_B u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t), \tag{1}$$

где $\Delta_B = \sum\limits_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + B_{x_p}$, $B_{x_p} = \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{k}{x_p}\frac{\partial}{\partial x_p}$ — оператор Бесселя, k — любое положительное число.

В работе доказывается существование единственного решения одной смешанной задачи для уравнения (1).

1. *Постановка смешанной задачи. Теорема единственности.* Рассмотрим смешанную задачу: найти четное по x_p решение уравнения (1) в области T_R^+, непрерывное в $\overline{T_R^+}$, один раз непрерывно дифференцируемое в $\widetilde{T_R^+}$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t'\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \overline{Q_R^+}, \tag{2}$$

и граничному условию

$$u\big|_{S_R^+ \times [0,\infty)} = \phi(x,t). \tag{3}$$

Теорема 1. *Смешанная задача* (1)–(3) *не может иметь более одного решения.*

Доказательство легко провести методом от противного.

2. *Решение смешанной задачи для однородного B-гиперболического уравнения методом Фурье.* Рассмотрим задачу об отыскании четного по x_p решения $u(x,t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_B u \tag{4}$$

в области T_R^+ такого, что $u \in C(\overline{T_R^+}) \bigcap C^1(\widetilde{T_R^+}) \bigcap C^2(T_R^+)$, удовлетворяющего начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t'\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \overline{Q_R^+}, \tag{5}$$

и граничному условию

$$u\big|_{S_R^+ \times [0,\infty)} = 0. \tag{6}$$

Теорема 2. *Если функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную третью производную и удовлетворяет условиям*

$$\varphi(x)\big|_{S_R^+}=0, \quad \varphi''(x)\big|_{S_R^+}=0,$$

а функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную вторую производную и удовлетворяет условию

$$\psi(x)\big|_{S_R^+}=0,$$

то решение задачи (4)–(6) существует и может быть представлено в виде

$$u(x,t)=\frac{2r^{-\frac{\gamma-2}{2}}}{R^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\sigma(m)}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{J^2_{\nu_m+1}\left(\eta_{m,i}\right)}\times$$
$$\times\int_0^R\int_{S_1^+}\left[\cos\left(\frac{\eta_{m,i}}{R}t\right)\varphi(\rho,\vartheta)+\frac{R\sin\left(\frac{\eta_{m,i}}{R}t\right)}{\eta_{m,i}}\psi(\rho,\vartheta)\right]\times$$
$$\times Y^{\frac{k}{2}}_{m,s}(\theta)Y^{\frac{k}{2}}_{m,s}(\vartheta)J_{\nu_m}\left(\frac{\eta_{m,i}\rho}{R}\right)J_{\nu_m}\left(\frac{\eta_{m,i}r}{R}\right)\rho^{\frac{\gamma}{2}}\vartheta_p^k d\vartheta\,d\rho, \tag{7}$$

где $Y^k_{m,s}(\theta)$ — весовая сферическая функция, $J_{\nu_m}(\tau)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\nu_m=\sqrt{(\gamma-2)^2+4m(m+\gamma-2)}/2$, $\gamma=p+k$, $\eta_{m,i}$ — положительные корни уравнения $J_{\nu_m}(\eta_m)=0$, причем $\eta_{m,1}<\eta_{m,2}<\cdots<\eta_{m,i}<\cdots$

Решение уравнения (4) будем искать в виде произведения

$$u(x,t)=\Re(r,t)\cdot Y(\theta), \tag{8}$$

где функция $\Re(r,t)$, зависящая от $r=|x|$ и t, и функция $Y(\theta)$, зависящая от угловых координат $\theta=\frac{x}{r}$, — пока неопределенные функции. Подставляя (8) в уравнение (4) и учитывая граничное условие (6), получаем

$$\frac{r^2\frac{\partial^2\Re}{\partial r^2}+(\gamma-1)r\frac{\partial\Re}{\partial r}-r^2\frac{\partial^2\Re}{\partial t^2}}{\Re}=-\frac{\Delta_B(\theta)Y(\theta)}{Y(\theta)}, \tag{9}$$

$$\Re\big|_{r=R}=0. \tag{10}$$

Равенство (9) возможно лишь тогда, когда его левая и правая части равны постоянной. Обозначая эту постоянную через μ, получаем

$$\frac{\partial^2\Re}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\Re}{\partial r^2}+\frac{(\gamma-1)}{r}\frac{\partial\Re}{\partial r}-\frac{\mu}{r^2}\Re, \tag{11}$$
$$-\Delta_B(\theta)Y(\theta)=\mu Y(\theta).$$

Известно [1], что значения $\mu_m=m(m+\gamma-2)$, $m=0,1,2,\ldots,$ — суть собственные числа оператора $-\Delta_B(\theta)$ кратности $\sigma(m)$, а соответствующие собственные функции $Y^{\frac{k}{2}}_{m,s}(\theta)$, $m=0,1,2,\ldots,$ $s=\overline{1,\sigma(m)}$, образуют полную ортонормированную систему в $L_{2,k}(S_1^+)$, где $S_1^+:\{|x|=1,\,x_p>0\}$ — полусфера. Уравнение (11) и граничное условие (10) при $\mu=m(m+\gamma-2)$ соответственно принимают вид

$$\frac{\partial^2\Re_m}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\Re_m}{\partial r^2}+\frac{(\gamma-1)}{r}\frac{\partial\Re_m}{\partial r}-\frac{m(m+\gamma-2)}{r^2}\Re_m, \tag{12}$$

$$\Re_m\big|_{r=R}=0. \tag{13}$$

Решение уравнения (12), удовлетворяющее граничному условию (13), имеет вид

$$\Re_m(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[C_{m,i}\cos\left(\frac{\eta_{m,i}}{R}t\right)+D_{m,i}\sin\left(\frac{\eta_{m,i}}{R}t\right)\right]r^{-\frac{\gamma-2}{2}}J_{\nu_m}\left(\frac{\eta_{m,i}r}{R}\right).$$

Решение задачи (4)–(6) будем искать в виде

$$u(x,t)=\frac{2r^{-\frac{\gamma-2}{2}}}{R^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\sigma(m)}\sum_{i=1}^{\infty}\left[C_{m,s,i}\cos\left(\frac{\eta_{m,i}}{R}t\right)+D_{m,s,i}\sin\left(\frac{\eta_{m,i}}{R}t\right)\right]\times$$
$$\times\, r^{-\frac{\gamma-2}{2}}J_{\nu_m}\left(\frac{\eta_{m,i}r}{R}\right)Y_{m,s}^{\frac{k}{2}}(\theta), \quad (14)$$

где $C_{m,s,i}$ и $D_{m,s,i}$ — неопределенные постоянные. Учитывая начальные условия (5), имеем

$$C_{m,s,i}=\frac{2}{R^2J^2_{\nu_m+1}(\eta_{m,i})}\int_0^R\int_{S_1^+}\varphi(r,\theta)Y_{m,s}^{\frac{k}{2}}(\theta)J_{\nu_m}\left(\frac{\eta_{m,i}r}{R}\right)r^{\frac{\gamma}{2}}\theta_p^k\,d\theta\,dr, \quad (15)$$

$$D_{m,s,i}=\frac{2}{R^2\eta_{m,i}J^2_{\nu_m+1}(\eta_{m,i})}\int_0^R\int_{S_1^+}\psi(r,\theta)Y_{m,s}^{\frac{k}{2}}(\theta)J_{\nu_m}\left(\frac{\eta_{m,i}r}{R}\right)r^{\frac{\gamma}{2}}\theta_p^k\,d\theta\,dr. \quad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в (14), получаем решение задачи (4)–(6) в виде (7).

Нетрудно доказать, что функция $u(x,t)$, определяемая рядом (7), является решением задачи (4)–(6), если ряд (7) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по x_j ($j=1,\ldots,p$) и t до второго порядка включительно, равномерно сходятся. Можно показать, что такая сходимость рядов будет обеспечена, если выполнены условия теоремы 2.

3. *О существовании решения смешанной задачи для неоднородного B-гиперболического уравнения.* Рассмотрим задачу об отыскании четного по x_p решения $u(x,t)$ уравнения (1) в области T_R^+ такого, что $u\in C(\overline{T_R^+})\bigcap C^1(\widetilde{T_R^+})\bigcap C^2(T_R^+)$, удовлетворяет начальным условиям

$$u\big|_{t=0}=0,\quad u'_t\big|_{t=0}=0 \quad (17)$$

и граничному условию

$$u\big|_{S_R^+\times[0,\infty)}=0. \quad (18)$$

Теорема 3. *Если функция $f(x,t)\in L_{2,k}(S_1^+)$ дважды непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную третью производную по x_j ($j=1,\ldots,p$) и кусочно-непрерывную производную по t, то решение задачи* (1), (17), (18) *существует и может быть представлено в виде*

$$u(x,t)=\frac{2r^{-\frac{\gamma-2}{2}}}{R}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\sigma(m)}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\eta_{m,i}J^2_{\nu_m+1}(\eta_{m,i})}\times$$
$$\times\int_0^t\int_0^R\int_{S_1^+}f(\rho,\vartheta,\tau)\sin\left[\frac{\eta_{m,i}}{R}(t-\tau)\right]Y_{m,s}^{\frac{k}{2}}(\theta)Y_{m,s}^{\frac{k}{2}}(\vartheta)\times$$
$$\times\, J_{\nu_m}\left(\frac{\eta_{m,i}r}{R}\right)J_{\nu_m}\left(\frac{\eta_{m,i}\rho}{R}\right)\rho^{\frac{\gamma}{2}}\vartheta_p^k\,d\vartheta\,d\rho\,d\tau. \quad (19)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция $u(x,t)$, определяемая рядом (19), является решением задачи (1), (17), (18), если ряд (19) и ряды, полученные из него дважды почленным дифференцированием по t и x_j ($j=1,\ldots,p$) равномерно сходятся. Можно показать, что такая сходимость рядов будет обеспечена, если выполнены условия теоремы 3.

Литература

1. Ляхов Л.Н. *Весовые сферические функции и сингулярные псевдодифференциальные операторы* // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21. – № 6. – С. 1020–1032.
2. Кошляков Н.С. и др. *Уравнения в частных производных математической физики.* – М.: Высш. школа, 1970. – 710 с.
3. Кошляков Н.С. и др. *Основные дифференциальные уравнения математической физики.* – М.: Физматгиз, 1962. – 767 с.

Казанский государственный
педагогический университет

Поступила
16.01.2002