ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 3 (514)

УДК 517.988

А.Н. КОВАЛЬЧУК, В.Г. НОВОХРОСТ, О.Л. ЯБЛОНСКИЙ

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ОСРЕДНЕНИЕМ

Введение. При переходе к нелинейным задачам возникают принципиально неразрешимые трудности, связанные с невозможностью корректного определения произведения обобщенных функций. Многими авторами предложены различные способы трактовки решений некоторых классов нелинейных дифференциальных уравнений. К сожалению, разные трактовки одного и того же нелинейного уравнения приводят к различным решениям и предпочесть ту или иную интерпретацию можно только с помощью каких-либо соображений, используемых при моделировании решаемой практической задачи данным уравнением. В данной статье ограничимся изучением следующего нелинейного дифференциального уравнения:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))\dot{L}(t), \tag{1}$$

где $\dot{L}(t)$ — обобщенная производная функции ограниченной вариации. Рассмотрим некоторые подходы к определению решений данного уравнения. Первый подход связан с попытками формализации такой задачи в рамках теории обобщенных функций и упирается в проблему умножения разрывных функций на обобщенные, которая возникает в выражении $f(t, x(t))\dot{L}(t)$. В ([1], гл. 1, § 8, с. 41) вводится определение умножения, которое для гладких функций совпадает с классической формулой для производной сложной функции. В [2]–[4] в рамках секвенциального подхода теории обобщенных функций вводится определение произведения разрывной функции на обобщенную, а затем ищется решение дифференциального уравнения. Решения, понимаемые в смысле работ [2]–[4], отличаются от решений, рассматриваемых в [1]. Второй подход предполагает формальный переход к интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi, x(\xi))dL(\xi),$$

в котором интеграл понимается в смысле Лебега–Стилтьеса, Перрона–Стилтьеса и т. д. [5]–[7]. Однако при таком толковании скачки решения будут зависеть от определения интегрируемой функции в точках разрыва функции $L(t)$, что является недостатком данного подхода. Третий подход восходит к работе [8] и опирается на идею аппроксимации искомого решения уравнения (1) классическими, порожденными гладкими приближениями функции $L(t)$. В ([1], гл. 4, с. 143) при рассмотрении такого подхода приходят к следующему уравнению:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi, x(\xi))dL^c(\xi) + \\ + \sum_{\mu_i < t} S(\mu_i, x(\mu_i - 0), \Delta L(\mu_i)) + S(\mu_p, x(\mu_p - 0), \Delta L(\mu_p))\chi(t - \mu_p),$$

где $L^c(t)$ — непрерывная составляющая функции $L(t)$, μ_i — точки разрыва функции $L(t)$, $\Delta L(\mu_i) = L^d(\mu_i + 0) - L^d(\mu_i - 0)$ — величина скачка, $\chi(t)$ — функция единичного скачка, а функция $S(\mu_i, x(\mu_i - 0), \Delta L(\mu_i))$ определена специальным образом. Отметим, что решения, полученные в [1] с помощью первого и последнего подходов, совпадают.

В данной работе использование единой схемы аппроксимации позволило охватить решения, получающиеся в результате толкования уравнения (1) с помощью этих трех подходов. Подобный способ аппроксимации с успехом применяется в теории стохастических дифференциальных уравнений для исследования как уравнений в смысле Ито, так и в смысле Стратоновича [9], [10].

1. Основные результаты. Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &\dot{X}(t) = f(X(t))\dot{L}(t), \\ &X(0) = x_0, \end{aligned} \tag{2}$$

где f — произвольная функция, а $L(t)$ — функция ограниченной вариации на отрезке T. Без существенного ограничения общности будем считать, что функция $L(t)$ непрерывна справа, $L(0) = 0$ и $L(a - 0) = L(a)$.

Задаче (2) поставим в соответствие следующую конечно-разностную задачу с осреднением:

$$\begin{gathered} X_n(t + h_n) - X_n(t) = f_n(X_n(t))[L_n(t + h_n) - L_n(t)], \\ X_n(t)|_{[0,h_n)} = X_{n0}(t). \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $L_n(t) = (L * \rho_n)(t) = \int\limits_0^{1/n} L(t + s)\rho_n(s)ds$, $f_n = f * \rho_n$, $\rho_n(t) = n\rho(nt)$, $\rho(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\rho(t) \geq 0$, $\operatorname{supp} \rho \subset [0, 1]$, $\int\limits_0^1 \rho(s)ds = 1$.

Пусть t — произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда t можно представить в виде $t = \tau_t + m_t h_n$, где $\tau_t \in [0, h_n)$, $m_t \in \mathbb{N}$. Несложно видеть, что решение системы (3) можно записать в виде

$$X_n(t) = X_{n0}(\tau_t) + \sum_{k=0}^{m_t - 1} f_n(X_n(\tau_t + kh_n))[L_n(\tau_t + (k + 1)h_n) - L_n(\tau_t + kh_n)].$$

Теорема 1. *Пусть $f \in C_B^1(\mathbb{R})$. Тогда при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ так, что $h_n = o(1/n)$ для всех $t \in T$, решение $X_n(t)$ задачи Коши* (3) *сходится к $Y(L(t))$, где $Y(v)$ — решение уравнения*

$$Y(v) = x_0 + \int_0^v f(Y(u))du, \tag{4}$$

если для любого $t \in T$ выполняется $|X_{n0}(\tau_t) - x_0| \to 0$.

Замечание 1. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция $Y(L(t))$ является решением уравнения

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\xi))dL^c(\xi) + \sum_{\mu_i \leq t} S(x(\mu_i - 0), \Delta L(\mu_i)),$$

где $S(x, u) = \varphi(1, x, u) - \varphi(0, x, u)$, а $\varphi(t, x, u)$ находится из уравнения $\varphi(t, x, u) = x + u \int\limits_0^t f(\varphi(s, x, u))ds$.

Таким образом, теорема 1 показывает, что при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ так, что $h_n = o(1/n)$, предельная функция решений задачи Коши (3) совпадает с аппроксимируемым решением из [1] задачи (2).

Теорема 2. *Пусть $f \in C_B^1(\mathbb{R})$. Тогда при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ так, что $1/n = o(h_n)$, для всех $t \in T$ решение $X_n(t)$ задачи Коши* (3) *сходится к решению уравнения*

$$X(t) = x_0 + \int_0^{t+} f(X(s - 0))dL(s), \tag{5}$$

если для любого $t \in T$ выполняется $|X_{n0}(\tau_t) - x_0| \to 0$.

Замечание 2. Данная теорема устанавливает, что предел решений задачи Коши (3) является решением уравнения (2), трактуемого как интегральное в духе работ [5]–[7].

2. Доказательство основных результатов.

Лемма 1. *Пусть для любого n справедливо неравенство*

$$Z_{n+1} \leq A + \sum_{k=1}^{n} A_k + \sum_{k=1}^{n} B_k Z_k, \tag{6}$$

где A, A_k, B_k — некоторые положительные константы и $Z_k > 0, k = \overline{0,n}$. Тогда верно неравенство

$$Z_{n+1} \leq \Big(A + \sum_{k=1}^{n} A_k\Big) \exp\Big(\sum_{k=1}^{n} B_k\Big).$$

Доказательство. Последовательно применяя неравенство (6), получаем

$$Z_{n+1} \leq A + \sum_{k=1}^{n} A_k + \sum_{k=1}^{n-1} B_k Z_k + B_n Z_n \leq A + \sum_{k=1}^{n} A_k + B_n\Big(A + \sum_{k=1}^{n-1} A_k +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1} B_k Z_k\Big) + \sum_{k=1}^{n-1} B_k Z_k = A + \sum_{k=1}^{n} A_k + B_n\Big(A + \sum_{k=1}^{n-1} A_k\Big) + (B_n + 1) \sum_{k=1}^{n-1} B_k Z_k \leq$$
$$\cdots \leq A + \sum_{k=1}^{n} A_k + B_n\Big(A + \sum_{k=1}^{n-1} A_k\Big) + B_{n-1}(B_n + 1)\Big(A + \sum_{k=1}^{n-2} A_k\Big) + \cdots$$
$$+ B_1(1 + B_2(1 + \cdots + (1 + B_{n-1}(1 + B_n)))) \leq \Big(A + \sum_{k=1}^{n} A_k\Big) \prod_{k=1}^{n} (1 + B_n).$$

Прологарифмируем это неравенство

$$\ln Z_{n+1} \leq \ln\Big(A + \sum_{k=1}^{n} A_k\Big) + \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + B_n) \leq \ln\Big(A + \sum_{k=1}^{n} A_k\Big) + \sum_{k=1}^{n} B_n.$$

Отсюда и вытекает утверждение леммы. □

Обозначим $S^2 L_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{m_t} [L_n(\tau_t + kh_n) - L_n(\tau_t + (k-1)h_n)]^2$.

Лемма 2. *Пусть $L(t)$ — функция ограниченной вариации. Тогда $S^2 L_n(t) \to 0$ для всех $t \in T$, если $n \to \infty$, $h_n \to 0$ и $h_n = o(1/n)$.*

Доказательство. Представим $L(t)$ в виде

$$L(t) = L^c(t) + L^d(t), \tag{7}$$

где $L^c(\cdot)$ и $L^d(\cdot)$ — непрерывная и разрывная части $L(\cdot)$ соответственно.

Так как $L(\cdot)$ — функция ограниченной вариации, то

$$S^2 L_n(t) \leq \max_{1 \leq k \leq m_t} |L_n(\tau_t + kh_n) - L_n(\tau_t + (k-1)h_n)| \sum_{k=1}^{m_t} |L_n(\tau_t + kh_n) - L_n(\tau_t + (k-1)h_n)| \leq$$
$$\leq \operatorname*{var}_{t \in T} L(t) \max_{1 \leq k \leq m_t} |L_n(\tau_t + kh_n) - L_n(\tau_t + (k-1)h_n)|.$$

Рассмотрим приращение функции L_n. Используя вид L_n и ρ_n, представление (7), имеем

$$|L_n(\tau_t + kh_n) - L_n(\tau_t + (k-1)h_n)| =$$

$$= \left| \int_0^{1/n} [L(\tau_t + kh_n + s) - L(\tau_t + (k-1)h_n + s)]\rho_n(s)ds \right| \leq \max_{0\leq s\leq 1/n} |L^c(\tau_t + kh_n + s) -$$

$$-L^c(\tau_t + (k-1)h_n + s)| + \left| \int_0^{1/n} [L^d(\tau_t + kh_n + s) - L^d(\tau_t + (k-1)h_n + s)]\rho_n(s)ds \right| \leq$$

$$\leq \max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ |t_1-t_2|\leq 1/n}} |L^c(t_1) - L^c(t_2)| + \left| \int_0^{1/n} [L^d(\tau_t + kh_n + s) - L^d(\tau_t + (k-1)h_n + s)]\rho_n(s)ds \right|.$$

Первое слагаемое стремится к нулю при $n \to \infty$ в силу равномерной непрерывности $L^c(\cdot)$ на отрезке T.

Рассмотрим второе слагаемое. Так как функция $L(\cdot)$ имеет не более чем счетное число точек разрыва и ее вариация конечна, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\Delta L(\mu_i)| < +\infty$. Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\sum\limits_{i=n_0}^{\infty} |\Delta L(\mu_i)| < \varepsilon$.

Представим $L^d(\cdot)$ в виде

$$L^d(t) = L^{d,\geq n_0}(t) + L^{d,<n_0}(t), \tag{8}$$

где $L^{d,\geq n_0}(\cdot)$ и $L^{d,<n_0}(\cdot)$ содержат точки разрывов μ_i с номерами, бо́льшими либо равными n_0, т. е. $i \geq n_0$, и меньшими n_0, т. е. $i < n_0$, соответственно. Тогда, учитывая, что $h_n < 1/n$ и шапочки ρ_n стандартные, для достаточно больших n и малых h имеем

$$\left| \int_0^{1/n} [L^d(\tau_t + kh_n + s) - L^d(\tau_t + (k-1)h_n + s)]\rho_n(s)ds \right| \leq \left| \int_0^{1/n} [L^{d,\geq n_0}(\tau_t + kh_n + s) - \right.$$

$$\left. -L^{d,\geq n_0}(\tau_t + (k-1)h_n + s)]\rho_n(s)ds \right| + \left| \int_0^{1/n} [L^{d,<n_0}(\tau_t + kh_n + s) - L^{d,<n_0}(\tau_t + (k-1)h_n + \right.$$

$$\left. +s)]\rho_n(s)ds \right| \leq \sum_{i=n_0}^{\infty} |\Delta L^d(\mu_i)| \left| \int_0^{1/n} \rho_n(s)ds \right| + \left| \sum_{i=1}^{n_0-1} \int_{\mu_i-\tau_t-ih_n}^{\mu_i-\tau_t-(i-1)h_n} \Delta L^d(\mu_i)\rho_n(s)ds \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=n_0}^{\infty} |\Delta L^d(\mu_i)| + \operatorname*{var}_{t\in T} L(t) \sum_{i=1}^{n_0-1} nh_n \leq \varepsilon + \operatorname*{var}_{t\in T} L(t) \sum_{i=1}^{n_0-1} nh_n.$$

Объединяя все вышеизложенное, в силу произвольности ε получаем требуемое. $\square$

Доказательство теоремы 1. Решение системы (2) можно записать в виде

$$X_n(t) = X_{n0}(\tau_t) + \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n(X_n(\tau_t + kh_n))[L_n(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n(\tau_t + kh_n)].$$

Тогда, используя вид $Y(u)$ из (4), имеем

$$|X_n(t) - Y(L_n(t))| = \left| X_{n0}(\tau_t) + \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n(X_n(\tau_t + kh_n))[L_n(\tau_t + (k+1)h_n) - \right.$$

$$\left. -L_n(\tau_t + kh_n)] - x_0 - \int_0^{L_n(t)} f(Y(s))ds \right| \leq |X_{n0}(\tau_t) - x_0| + \left| \int_0^{L_n(\tau_t)} f(Y(s))ds \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k=0}^{m_t-1} \big(f_n(X_n(\tau_t + kh_n)) - f(X_n(\tau_t + kh_n))\big)[L_n(\tau_t + (k+1)h_n) - \right.$$

$$-L_n(\tau_t+kh_n)]\Big| + \Big|\sum_{k=0}^{m_t-1}\big(f(X_n(\tau_t+kh_n)) - f(Y(L_n(\tau_t+kh_n)))\big)[L_n(\tau_t+(k+1)h_n) -$$

$$-L_n(\tau_t+kh_n)]\Big| + \Big|\sum_{k=0}^{m_t-1}\int_{L_n(\tau_t+kh_n)}^{L_n(\tau_t+(k+1)h_n)}[f(Y(L_n(\tau_t+kh_n))) - f(Y(s))]\,ds\Big| =$$

$$= I_1(t)+I_2(t)+I_3(t)+I_4(t)+I_5(t).$$

Пусть $M=\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$, $M_1=\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|$. Так как $f\in C_B^1(\mathbb{R})$, то $MM_1<\infty$. Тогда

$$I_2(t)\le M|L_n(\tau_t)|.$$

Используя теорему Лагранжа о конечных приращениях, ограниченность вариации функции L, представления L_n и f_n, получим следующие оценки:

$$I_3(t)\le\Big|\sum_{k=0}^{m_t-1}\big(f_n(X_n(\tau_t+kh_n))-f(X_n(\tau_t+kh_n))\big)[L_n(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n(\tau_t+kh_n)]\Big|\le M_1\operatorname*{var}_{t\in T}L(t)/n.$$

Таким же образом получаем

$$I_4(t)=\Big|\sum_{k=0}^{m_t-1}\big(f(X_n(\tau_t+kh_n))-f(Y(L_n(\tau_t+kh_n)))\big)[L_n(\tau_t+(k+1)h_n)-$$

$$-L_n(\tau_t+kh_n)]\Big|\le M_1\sum_{k=0}^{m_t-1}|X_n(\tau_t+kh_n)-Y(L_n(\tau_t+kh_n))||L_n(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n(\tau_t+kh_n)|.$$

Из вида уравнения (4) и теоремы Лагранжа о конечных приращениях получим

$$I_5(t)=\Big|\sum_{k=0}^{m_t-1}\int_{L_n(\tau_t+kh_n)}^{L_n(\tau_t+(k+1)h_n)}[f(Y(L_n(\tau_t+kh_n)))-f(Y(s))]ds\Big|\le$$

$$\le MM_1\sum_{k=0}^{m_t-1}\Big|\int_{L_n(\tau_t+kh_n)}^{L_n(\tau_t+(k+1)h_n)}|L_n(\tau_t+kh_n)-s|ds\Big|=\frac{MM_1}{2}\sum_{k=0}^{m_t-1}[L_n(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n(\tau_t+kh_n)]^2.$$

Учитывая все предыдущие неравенства, имеем

$$|X_n(t)-Y(L_n(t))|\le|X_{n0}(\tau_t)-x_0|+M|L_n(\tau_t)|+M_1\operatorname*{var}_{t\in T}L(t)/n+M_1\sum_{k=0}^{m_t-1}|X_n(\tau_t+kh_n)-Y(L_n(\tau_t+$$

$$+kh_n))|\,|L_n(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n(\tau_t+kh_n)|+\frac{MM_1}{2}\sum_{k=0}^{m_t-1}[L_n(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n(\tau_t+kh_n)]^2.$$

Применяя к последнему неравенству лемму 1, получим

$$|X_n(t)-Y(L_n(t))|\le\Big(|X_{n0}(\tau_t)-x_0|+M|L_n(\tau_t)|+M_1\operatorname*{var}_{t\in T}L(t)/n+$$

$$+\frac{MM_1}{2}\sum_{k=0}^{m_t-1}[L_n(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n(\tau_t+kh_n)]^2\Big)\exp\big(M_1\operatorname*{var}_{t\in T}L(t)\big).$$

Устремляя в этом неравенстве $n\to\infty$, $h_n\to0$, так что $h_n=o(1/n)$, из леммы 2 получим утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 2. Уравнение (5) эквивалентно уравнению

$$X(t)=x_0+\int_0^t f(X(s))\,dL^c(s)+\sum_{\mu_i\le t}f(X(\mu_i-0))\Delta L^d(\mu_i),$$

где, как и раньше, μ_i — точки разрыва, а $\Delta L^d(\mu_i)$ — величина скачка функции $L(t)$.

Проделаем следующие преобразования:

$$|X_n(t) - X(t)| = \Big| X_{n0}(\tau_t) - x_0 + \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n(X_n(\tau_t + kh_n))[L_n(\tau_t + (k+1)h_n) -$$

$$-L_n(\tau_t + kh_n)] - \int_0^t f(X(s))dL^c(s) - \sum_{\mu_i \le t} f(X(\mu_i - 0))\Delta L^d(\mu_i)\Big| \le$$

$$\le |X_{n0}(\tau_t) - x_0| + \Big| \int_0^{\tau_t} f(X(s))\, dL^c(s)\Big| + \Big| \sum_{k=0}^{m_t-1} (f_n(X_n(\tau_t + kh_n)) - f(X_n(\tau_t +$$

$$+kh_n)))[L_n(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n(\tau_t + kh_n)]\Big| + \Big| \sum_{k=0}^{m_t-1} (f(X_n(\tau_t + kh_n)) - f(X(\tau_t +$$

$$+kh_n)))[L_n(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n(\tau_t + kh_n)]\Big| + \Big| \sum_{k=0}^{m_t-1} f(X(\tau_t + kh_n))[L_n^c(\tau_t +$$

$$+(k+1)h_n) - L_n^c(\tau_t + kh_n)] - \sum_{k=0}^{m_t-1} f(X(\tau_t + kh_n))[L^c(\tau_t + (k+1)h_n) - L^c(\tau_t + kh_n)]\Big| +$$

$$+\Big| \sum_{k=0}^{m_t-1} f(X(\tau_t + kh_n))[L^c(\tau_t + (k+1)h_n) - L^c(\tau_t + kh_n)] - \int_{\tau_t}^t f(X(s))\, dL^c(s)\Big| +$$

$$+\Big| \sum_{k=0}^{m_t-1} f(X(\tau_t + kh_n))[L_n^d(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^d(\tau_t + kh_n)] - \sum_{\mu_i \le t} f(X(\mu_i - 0))\Delta L^d(\mu_i)\Big| =$$

$$= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) + I_5(t) + I_6(t) + I_7(t).$$

Так как $f \in C_B^1(\mathbb{R})$ и функция $L(t)$ имеет ограниченную вариацию, то $I_2(t) \le M \operatorname*{var}_{t\in[0,h_n)} L^c(t)$. Используя представление f_n и ограниченность вариации L_n, находим оценку

$$I_3(t) \le (M_1/n) \sum_{k=0}^{m_t-1} |L_n(\tau_t + kh_n) - L_n(\tau_t + (k+1)h_n)| \le M_1 \operatorname*{var}_{t\in T} L(t)/n.$$

Используя теорему Лагранжа о конечных приращениях и то, что $f \in C_B^1(\mathbb{R})$, получим

$$I_4(t) \le M_1 \sum_{k=0}^{m_t-1} |X_n(\tau_t + kh_n) - X(\tau_t + kh_n)||L_n(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n(\tau_t + kh_n)|.$$

Для оценки $I_5(t)$ разобьем сумму на две, затем в первой сделаем замену индексов суммирования, после чего воспользуемся теоремой Лагранжа и видом $X(t)$:

$$I_5(t) = \Big| \sum_{k=0}^{m_t-1} f(X(\tau_t + kh_n))[L_n^c(\tau_t + (k+1)h_n) - L^c(\tau_t + (k+1)h_n)] -$$

$$- \sum_{k=0}^{m_t-1} f(X(\tau_t + kh_n))[L_n^c(\tau_t + kh_n) - L^c(\tau_t + kh_n)]\Big| =$$

$$= \Big| \sum_{k=1}^{m_t} f(X(\tau_t + (k-1)h_n))[L_n^c(\tau_t + kh_n) - L^c(\tau_t + kh_n)] - \sum_{k=0}^{m_t-1} f(X(\tau_t + kh_n))[L_n^c(\tau_t + kh_n) -$$

$$-L^c(\tau_t + kh_n)]\Big| = \Big| \sum_{k=1}^{m_t-1} [f(X(\tau_t + (k-1)h_n)) - f(X(\tau_t + kh_n))][L_n^c(\tau_t +$$

$$+kh_n) - L^c(\tau_t + kh_n)] + f(X(\tau_t + (m_t-1)h_n))(L_n^c(\tau_t + m_t h_n) - L^c(\tau_t + m_t h_n)) -$$

$$
-f(X(\tau_t))(L_n^c(\tau_t)-L^c(\tau_t))\Big| \le M_1 \sum_{k=1}^{m_t-1} \operatorname*{var}_{t\in[\tau_t+kh_n,\tau_t+kh_n+1/n]} L^c(t)|X(\tau_t+(k-1)h_n)-
$$

$$
-X(\tau_t+kh_n)| + M \operatorname*{var}_{t\in[\tau_t+kh_n,\tau_t+(k+1)h_n]} L^c(t) + M \operatorname*{var}_{t\in[\tau_t+m_th_n,\tau_t+m_th_n+1/n]} L^c(t) \le
$$

$$
\le M_1 \operatorname*{var}_{t\in T} X(t) \max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ [t_1,t_2]\le 1/n}} \operatorname*{var}_{t\in[t_1,t_2]} L^c(t) + 2M \max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ [t_1,t_2]\le 1/n}} \operatorname*{var}_{t\in[t_1,t_2]} L^c(t) \le
$$

$$
\le M_1 M \operatorname*{var}_{t\in T} L(t) \max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ [t_1,t_2]\le 1/n}} \operatorname*{var}_{t\in[t_1,t_2]} L^c(t) + 2M \max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ [t_1,t_2]\le 1/n}} \operatorname*{var}_{t\in[t_1,t_2]} L^c(t).
$$

Из свойств интеграла Стилтьеса вытекает оценка

$$
I_6(t) = \int_{\tau_t}^{t} \left[f\left(X(\widehat{s}(s))\right) - f\left(X(s)\right)\right] dL^c(s) \le
$$

$$
\le M_1 \sum_{k=1}^{m_t-1} \big(\operatorname*{var}_{t\in[\tau_t+kh_n,\tau_t+(k+1)h_n]} X(t) \operatorname*{var}_{t\in[\tau_t+kh_n,\tau_t+(k+1)h_n]} L^c(t)\big) \le
$$

$$
\le M_1 \max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ [t_1,t_2]\le 1/n}} \operatorname*{var}_{t\in[t_1,t_2]} L^c(t) \operatorname*{var}_{t\in T} X(t) \le M M_1 \operatorname*{var}_{t\in T} L(t) \max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ [t_1,t_2]\le 1/n}} \operatorname*{var}_{t\in[t_1,t_2]} L^c(t),
$$

где $\widehat{s}(s) = \tau_t + kh_n$, $s \in [\tau_t + kh_n, \tau_t + (k+1)h_n)$. Рассмотрим $I_7(t)$. Используя представление (8), получим

$$
I_7(t) \le \Big| \sum_{k=0}^{m_t-1} f(X(\tau_t+kh_n))[L_n^{d,<n_0}(\tau_t+kh_n) - L_n^{d,<n_0}(\tau_t+(k+1)h_n)] -
$$

$$
-\sum_{\mu_i\le t} f(X(\mu_i-0))\Delta L^{d,<n_0}(\mu_i)\Big| + \Big| \sum_{k=0}^{m_t-1} f(X(\tau_t+kh_n))[L_n^{d,\ge n_0}(\tau_t+kh_n) -
$$

$$
-L_n^{d,\ge n_0}(\tau_t+(k+1)h_n)] - \sum_{\mu_i\le t} f(X(\mu_i-0))\Delta L^{d,\ge n_0}(\mu_i)\Big| = I_7^1(t) + I_7^2(t).
$$

Так как функция $L^{d,<n_0}(t)$ имеет n_0-1 точку разрыва на отрезке T, то существует конечное число номеров k_i таких, что $\mu_i \in [\tau_t+k_ih_n, \tau_t+(k_i+1)h_n]$, причем, если $h_n < 1/2 \min\limits_{1\le i\le n_0-1} |\mu_{i+1}-\mu_i|$, то $k_i \ne k_j$ при $i \ne j$. Тогда, учитывая, что $1/n = o(h_n)$, имеем $\int\limits_{\mu_i-(k_i+1)h_n-\tau_t}^{\mu_i-(k_i-1)h_n-\tau_t} \rho_n(s)ds = 1$. Отсюда вытекают следующие преобразования, использующие представление L_n:

$$
I_7^1(t) = \Big| \sum_{\mu_i\le t} \Big[f(X(\tau_t+(k_i-1)h_n)) \int_{\mu_i-k_ih_n-\tau_t}^{\mu_i-(k_i-1)h_n-\tau_t} \rho_n(s)ds +
$$

$$
+f(X(\tau_t+k_ih_n)) \int_{\mu_i-(k_i+1)h_n-\tau_t}^{\mu_i-k_ih_n-\tau_t} \rho_n(s)ds - f(X(\mu_i-0))\Big] \Delta L^{d,<n_0}(\mu_i)\Big| \le
$$

$$
\le \max_{1\le i\le n_0-1} |\Delta L^d(\mu_i)| \sum_{i=1}^{n_0-1} \Big| \int_{\mu_i-k_ih_n-\tau_t}^{\mu_i-(k_i-1)h_n-\tau_t} \rho_n(s)ds (f(X(\tau_t+(k_i-1)h_n)) -
$$

$$
-f(X(\tau_t+k_ih_n))) + f(X(\tau_t+k_ih_n)) - f(X(\mu_i-0))\Big| \le \operatorname*{var}_{t\in T} L(t) \Big[\sum_{i=1}^{n_0-1} |f(X(\tau_t+(k_i-1)h_n) -
$$

$$
-f(X(\tau_t+k_ih_n))| + \sum_{i=1}^{n_0-1} |f(X(\tau_t+k_ih_n)) - f(X(\mu_i-0))| \Big] \le
$$

$$
\le M_1 \operatorname*{var}_{t\in T} L(t) \Big[\sum_{i=1}^{n_0-1} |X(\tau_t+(k_i-1)h_n) - X(\tau_t+k_ih_n)| + \sum_{i=1}^{n_0-1} |X(\tau_t+k_ih_n) - X(\mu_i-0)| \Big] \le
$$

$$\leq MM_1 \operatorname*{var}_{t\in T} L(t)\Bigg[\sum_{i=1}^{n_0-1} \operatorname*{var}_{t\in[\tau_t+(k_i-1)h_n,\tau_t+k_ih_n]} L(t) + \sum_{i=1}^{n_0-1} \operatorname*{var}_{t\in[\tau_t+k_ih_n,\mu_i)} L(t)\Bigg] \leq$$

$$\leq MM_1 \operatorname*{var}_{t\in T} L(t)\Bigg(\sum_{i=1}^{n_0-1} \operatorname*{var}_{t\in[\mu_i-2h_n,\mu_i]} L^c(t) + \varepsilon\Bigg).$$

Последнее неравенство вытекает из того, что полуинтервалы $[\mu_i - 2h_n, \mu_i)$ содержат $[\tau_t + (k_i - 1)h_n, \mu_i)$ и на них вариация функции $L(t)$ отличается от вариации $L^c(t)$ не более чем на ε, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{n_0-1} \operatorname*{var}\limits_{[\mu_i-2h_n,\mu_i)} L(t) \leq \sum\limits_{i=1}^{n_0-1} \operatorname*{var}\limits_{[\mu_i-2h_n,\mu_i]} L^c(t) + \varepsilon$. Получим

$$I_7^2(t) = \Bigg|\sum_{k=0}^{m_t-1} f(X(\tau_t + kh_n))[L^{d,\geq n_0}(\tau_t + kh_n) - L^{d,\geq n_0}(\tau_t + (k+1)h_n)] -$$

$$-\sum_{\mu_i\leq t} f(X(\mu_i - 0))\Delta L^{d,\geq n_0}(\mu_i)\Bigg| \leq 2M\varepsilon.$$

Таким образом,

$$|X_n(t) - X(t)| \leq |X_{n0}(\tau_t) - x_0| + M \operatorname*{var}_{t\in[0,h_n)} L^c(t) + M_1 \operatorname*{var}_{t\in T} L(t)/n + M_1 \sum_{k=0}^{m_t-1} |X_n(\tau_t + kh_n) -$$

$$-X(\tau_t + kh_n)|\,|L_n(\tau_t + kh_n) - L_n(\tau_t + (k+1)h_n)| + M_1 \max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ [t_1,t_2]\leq 1/n}} \operatorname*{var}_{t\in[t_1,t_2]} L^c(t) M \operatorname*{var}_{t\in T} L(t) +$$

$$+2M \max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ [t_1,t_2]\leq 1/n}} \operatorname*{var}_{t\in[t_1,t_2]} L^c(t) + MM_1 \max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ [t_1,t_2]\leq 1/n}} \operatorname*{var}_{t\in[t_1,t_2]} L^c(t) \operatorname*{var}_{t\in T} L(t) +$$

$$+MM_1 \operatorname*{var}_{t\in T} L(t)\Bigg(\sum_{i=1}^{n_0-1} \operatorname*{var}_{t\in[\mu_i-2h_n,\mu_i]} L^c(t) + \varepsilon\Bigg) + 2M\varepsilon.$$

Применяя лемму 1 к последнему неравенству, получим

$$|X_n(t) - X(t)| \leq \Bigg(|X_{n0}(\tau_t) - x_0| + M \operatorname*{var}_{t\in[0,h_n)} L^c(t) + M_1 \operatorname*{var}_{t\in T} L(t)/n +$$

$$+M_1 \max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ [t_1,t_2]\leq 1/n}} \operatorname*{var}_{t\in[t_1,t_2]} L^c(t) M \operatorname*{var}_{t\in T} L(t) + 2M \max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ [t_1,t_2]\leq 1/n}} \operatorname*{var}_{t\in[t_1,t_2]} L^c(t) +$$

$$+MM_1 \max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ [t_1,t_2]\leq 1/n}} \operatorname*{var}_{t\in[t_1,t_2]} L^c(t) \operatorname*{var}_{t\in T} L(t) + MM_1 \operatorname*{var}_{t\in T} L(t)\Bigg(\sum_{i=1}^{n_0-1} \operatorname*{var}_{t\in[\mu_i-2h_n,\mu_i]} L^c(t) + \varepsilon\Bigg) +$$

$$+2M\varepsilon\Bigg) \exp\big(M_1 \operatorname*{var}_{t\in T} L(t)\big).$$

Устремляя $n \to \infty$, $h_n \to 0$ так, что $1/n = o(h_n)$, а затем $\varepsilon \to 0$, из непрерывности $L^c(t)$ на отрезке T, а значит, и равномерной непрерывности на этом отрезке, получим $|X_n(t) - X(t)| \to 0$ для любого $t \in T$. $\square$

Замечание 3. Уравнение (5) можно переписать следующим образом:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\xi))\, dL^c(\xi) + \sum_{\mu_i\leq t} S(x(\mu_i - 0), \Delta L(\mu_i)),$$

где $S(x, u) = \varphi(1, x, u) - \varphi(0, x, u)$, а $\varphi(t, x, u)$ находится из уравнения

$$\varphi(t, x, u) = x + u\int_{[0;t)} f(\varphi(s, x, u))\, d\chi(s),$$

где $\chi(s) = \begin{cases} 1, & s > 0; \\ 0, & s \leq 0. \end{cases}$

Из замечаний 1 и 3 вытекает, что решение задачи Коши (2) можно толковать как решение уравнения

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\xi))\, dL^c(\xi) + \sum_{\mu_i \leq t} S(x(\mu_i - 0), \Delta L(\mu_i)), \tag{9}$$

где $S(x,u) = \varphi(1,x,u) - \varphi(0,x,u)$, а $\varphi(t,x,u)$ находится из некоторого вспомогательного интегрального уравнения.

Если рассмотреть более общую последовательность "шапочек" ρ_n, то предел решений задачи Коши (3), если он существует, будет также удовлетворять уравнению (9), однако вспомогательные интегральные уравнения для нахождения функции $\varphi(t,x,u)$ будут отличаться от полученных в данной работе. Кроме этого, для некоторых последовательностей ρ_n предел будет совпадать с решениями уравнения (2), понимаемыми в смысле работ [2]–[4]. Заметим, что в случае, когда функция $L(t)$ непрерывна, пределы решений уравнения (3), при условии их существования, для различных последовательностей "шапочек" ρ_n будут совпадать и удовлетворять уравнению (9) без последнего слагаемого.

Литература

1. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. *Импульсные процессы. Модели и приложения.* – М.: Наука, 1991. – 256 с.
2. Antosik P., Ligeza J. *Products of measures and functions of finite variations* // Generalized functions and operational calculus: Proc. Conf. – Varna, 1975. – Sofia, 1979. – P. 20–26.
3. Ligeza J. *On generalized solutions of some differential non-linear equations of order n* // Ann. Pol. math. – 1977. – V. 31. – № 2. – P. 115–120.
4. Ligeza J. *The existence and uniqueness of some systems of non-linear differential equations* // Čas. pestov. math. – 1977. – V. 102. – № 1. – P. 218–226.
5. Ашордия М.Т. *О начальной задаче для систем обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнений* // Краевые задачи. – Пермь: Перм. политех. ин-т, 1984. – С. 63–68.
6. Das P.C., Sharma R.R. *Existence and stability of measure differential equations* // Czech. Math. J. – 1972. – V. 22. – № 1. – P. 145–158.
7. Pandit S.G., Deo S.G. *Differential systems involving impulses* // Lect. Notes Math. – 1982. – V. 954. – 102 p.
8. Kurzweil J. *Generalized ordinary differential equations* // Czech. Math. J. – 1958. – V. 8. – № 1. – P. 360–388.
9. Лазакович Н.В., Сташуленок С.П., Стемковская Т.В. *Ассоциированные решения уравнений в дифференциалах в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов* // Теор. вероятн. и ее примен. – 1998. – Т. 43. – № 2. – С. 272–293.
10. Лазакович Н.В., Яблонский О.Л. *О приближении решений одного класса стохастических уравнений* // Сиб. матем. журнал. – 2001. – Т. 42. – № 1. – С. 87–102.

Белорусский государственный университет

Поступила 20.09.2002