Известия вузов. Математика
2013, №1, с. 3–20

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

С.Н. КИЯСОВ

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ВЕКТОРА, РАЗРЕШИМЫЕ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

Аннотация. Рассмотрена структура множества кусочно-мероморфных решений задачи линейного сопряжения для двумерного вектора и их связь с задачей дробно-линейного сопряжения. Показано, что при наличии кусочно-мероморфного решения любой из этих задач может быть построена каноническая система решений задачи линейного сопряжения и выделены классы задач, разрешимых в замкнутой форме.

Ключевые слова: матрица-функция, задача линейного сопряжения, задача дробно-линейного сопряжения.

УДК: 517.544

Пусть Γ — простой гладкий замкнутый контур, разбивающий плоскость комплексного переменного на две области: D^+ и D^- $(0 \in D^+, \infty \in D^-)$,

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad \Delta(t) = \det G(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{0.1}$$

H — непрерывная на Γ матрица-функция второго порядка. Однородная задача линейного сопряжения для двумерного вектора состоит в отыскании кусочно-голоморфной функции $\mathbf{w}(z) = \big(w^1(z), w^2(z)\big)$ с H-непрерывными на Γ предельными значениями $\mathbf{w}^{\pm}(t)$, связанными условием

$$\mathbf{w}^+(t) = G(t)\mathbf{w}^-(t), \tag{0.2}$$

или в скалярной форме — условиями

$$\begin{aligned} w^{1+}(t) &= g_{11}(t)w^{1-}(t) + g_{12}(t)w^{2-}(t), \\ w^{2+}(t) &= g_{21}(t)w^{1-}(t) + g_{22}(t)w^{2-}(t). \end{aligned} \tag{0.3}$$

Качественная теория задачи (0.2) в классах гельдеровских функций, причем любой размерности, изложена в монографии ([1], с. 17–52), а в более широких классах матриц-функций — в [2]. Однако имеется сравнительно немного примеров матриц-функций, для которых решение задачи может быть записано в замкнутой форме (в интегралах типа Коши). Одним из таких примеров служит решение задачи с треугольной матрицей-функцией второго порядка в работе [3]. Задача линейного сопряжения для мероморфных матриц-функций произвольного порядка рассмотрена в монографии [2]. В работе [4] предложен конструктивный алгоритм решения задачи линейного сопряжения для мероморфных матриц-функций второго порядка. Исследование специального класса матриц-функций второго порядка, которые умножением слева и справа на рациональные матрицы приводятся к треугольным матрицам-функциям, дано в [5]. Эта работа легла в основу статьи [6] по классификациям матриц-функций второго порядка, допускающим такие преобразования в зависимости от

Поступила 08.12.2011

числа линейно-независимых элементов матрицы-функции над полем рациональных функций. В данной работе приводится ряд условий на элементы матрицы-функции (0.1), при выполнении которых решение задачи (0.3) может быть записано в замкнутой форме.

Работа состоит из трех частей. В первой части изучается структура множества кусочно-мероморфных решений задачи (0.3). Во второй части работы, обобщая результаты статьи [7], показано, что наличие любого кусочно-мероморфного решения задачи позволяет построить ее каноническую систему решений и, значит, записать общее решение задачи в классе кусочно-голоморфных функций. Этот результат, очевидно, может служить методом решения в замкнутой форме задачи линейного сопряжения для мероморфных и треугольных матриц-функций второго порядка, а также других матриц-функций, для которых удается указать хотя бы одно кусочно-мероморфное решение. В третьей части рассмотрен ряд случаев, когда удается подобрать частное решение задачи.

1. Структура множества кусочно-мероморфных решений однородной задачи линейного сопряжения для двумерного вектора

Определение 1. Пусть $\mathbf{w}(z) = \big(w^1(z), w^2(z)\big)$ — кусочно-мероморфное решение задачи (0.3). Будем называть его решением с парой $(\lambda(t), \mu(t))$, если на Γ

$$w^{1+}(t)/w^{1-}(t) = \lambda(t), \quad w^{2+}(t)/w^{2-}(t) = \mu(t). \tag{1.1}$$

Всюду в дальнейшем предполагаем, что матрица-функция (0.1) не является диагональной и для решения $\mathbf{w}(z)$ задачи (0.3) $\lambda(t) \not\equiv 0, \infty$ и (или) $\mu(t) \not\equiv 0, \infty$ на Γ. В противном случае (обращения в тождественный нуль) хотя бы одно из отношений g_{12}/g_{11}, g_{22}/g_{21} будет мероморфно продолжимым в область D^-, а в случае бесконечности хотя бы одно из отношений g_{12}/g_{22}, g_{11}/g_{21} будет мероморфно продолжимым в D^+. Поэтому матрица-функция (0.1) умножением справа на мероморфную в D^-, соответственно слева на мероморфную в D^+ матрицу-функцию, может быть приведена к треугольной матрице-функции, у которой всегда можно выбрать решение, удовлетворяющее высказанным требованиям.

Легко видеть, что множество всех кусочно-мероморфных решений задачи (0.3) представляет собой двумерное векторное пространство над полем рациональных функций, базисом которого является любая каноническая система решений

$$\mathbf{w}_{\varkappa_1}(z) = \big(w^1_{\varkappa_1}(z), w^2_{\varkappa_1}(z)\big), \quad \mathbf{w}_{\varkappa_2}(z) = \big(w^1_{\varkappa_2}(z), w^2_{\varkappa_2}(z)\big), \quad \varkappa_1 \geq \varkappa_2 \tag{1.2}$$

($\varkappa_1 + \varkappa_2 = \varkappa = \operatorname{ind}\det G(t)$ — суммарный индекс матрицы-функции (0.1)).

Пусть $\mathbf{w}_1(z)$, $\mathbf{w}_2(z)$ — два кусочно-мероморфных решения задачи (0.3), разложения которых по канонической системе решений (1.2) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1(z) &= r_{11}(z)\mathbf{w}_{\varkappa_1}(z) + r_{21}(z)\mathbf{w}_{\varkappa_2}(z), \\ \mathbf{w}_2(z) &= r_{12}(z)\mathbf{w}_{\varkappa_1}(z) + r_{22}(z)\mathbf{w}_{\varkappa_2}(z), \end{aligned} \tag{1.3}$$

где r_{ij}, $i, j = 1, 2,$ — рациональные функции.

Покажем, что $\mathbf{w}_1(z)$, $\mathbf{w}_2(z)$ будут решениями задачи (0.3) с одной и той же парой $(\lambda(t), \mu(t))$ тогда и только тогда, когда

$$r_{11}(z)r_{22}(z) \equiv r_{21}(z)r_{12}(z). \tag{1.4}$$

Действительно, если

$$\lambda(t) = w_1^{1+}(t)/w_1^{1-}(t) = w_2^{1+}(t)/w_2^{1-}(t), \quad \mu(t) = w_1^{2+}(t)/w_1^{2-}(t) = w_2^{2+}(t)/w_2^{2-}(t),$$

то согласно разложениям (1.3) получаем

$$\lambda(t) = \frac{r_{11}(t)w^{1+}_{\varkappa_1}(t) + r_{21}(t)w^{1+}_{\varkappa_2}(t)}{r_{11}(t)w^{1-}_{\varkappa_1}(t) + r_{21}(t)w^{1-}_{\varkappa_2}(t)} = \frac{r_{12}(t)w^{1+}_{\varkappa_1}(t) + r_{22}(t)w^{1+}_{\varkappa_2}(t)}{r_{12}(t)w^{1-}_{\varkappa_1}(t) + r_{22}(t)w^{1-}_{\varkappa_2}(t)},$$
$$\mu(t) = \frac{r_{11}(t)w^{2+}_{\varkappa_1}(t) + r_{21}(t)w^{2+}_{\varkappa_2}(t)}{r_{11}(t)w^{2-}_{\varkappa_1}(t) + r_{21}(t)w^{2-}_{\varkappa_2}(t)} = \frac{r_{12}(t)w^{2+}_{\varkappa_1}(t) + r_{22}(t)w^{2+}_{\varkappa_2}(t)}{r_{12}(t)w^{2-}_{\varkappa_1}(t) + r_{22}(t)w^{2-}_{\varkappa_2}(t)}.$$

Если условие (1.4) не выполняется, то умножая числитель и знаменатель первой и второй дроби на r_{22} и $-r_{21}$ соответственно, а затем на $-r_{12}$ и r_{11}, по свойству равных дробей придем к равенствам

$$\lambda(t) = w^{1+}_{\varkappa_1}(t)/w^{1-}_{\varkappa_1}(t) = w^{1+}_{\varkappa_2}(t)/w^{1-}_{\varkappa_2}(t), \quad \mu(t) = w^{2+}_{\varkappa_1}(t)/w^{2-}_{\varkappa_1}(t) = w^{2+}_{\varkappa_2}(t)/w^{2-}_{\varkappa_2}(t).$$

Откуда $w^{1+}_{\varkappa_2}(t)/w^{1+}_{\varkappa_1}(t) = w^{1-}_{\varkappa_2}(t)/w^{1-}_{\varkappa_1}(t)$, $w^{2+}_{\varkappa_2}(t)/w^{2+}_{\varkappa_1}(t) = w^{2-}_{\varkappa_2}(t)/w^{2-}_{\varkappa_1}(t)$, $t \in \Gamma$. Значит, $w^1_{\varkappa_2}(z) = rw^1_{\varkappa_1}(z)$, $w^2_{\varkappa_2}(z) = fw^2_{\varkappa_1}(z)$, где r, f — рациональные функции. Так как функции (1.2) — решения задачи (0.3), то из первого условия (0.3) получаем $\lambda(t) = g_{11}(t) + g_{12}(t)w^{2-}_{\varkappa_1}(t)/w^{1-}_{\varkappa_1}(t) = g_{11}(t) + g_{12}(t)w^{2-}_{\varkappa_2}(t)/w^{1-}_{\varkappa_2}(t) = g_{11}(t) + g_{12}(t)fw^{2-}_{\varkappa_1}(t)/rw^{1-}_{\varkappa_1}(t)$. Поэтому $r = f = p/q$, p, q — полиномы и $p(z)\mathbf{w}_{\varkappa_1}(z) = q(z)\mathbf{w}_{\varkappa_2}(z)$, что невозможно в силу свойства канонической системы решений ([1], с. 30).

Обратно, если условие (1.4) выполнено, то записывая разложения (1.3) на Γ в виде

$$r_{11}w^{j\pm}_{\varkappa_1} + r_{21}w^{j\pm}_{\varkappa_2} = w^{j\pm}_1,$$
$$r_{12}w^{j\pm}_{\varkappa_1} + r_{22}w^{j\pm}_{\varkappa_2} = w^{j\pm}_2, \quad j = 1, 2,$$

будем рассматривать их как линейные алгебраические системы для определения $w^{j\pm}_{\varkappa_1}$, $w^{j\pm}_{\varkappa_2}$, $j = 1, 2$, соответственно. Так как определители этих систем на Γ равны нулю, то $w^{j\pm}_2 = r_{12}w^{j\pm}_1/r_{11} = r_{22}w^{j\pm}_1/r_{21}$. Откуда $w^{j+}_2/w^{j-}_2 = w^{j+}_1/w^{j-}_1$, $j = 1, 2$.

Так как формула

$$\mathbf{w}(z) = r_1(z)\mathbf{w}_{\varkappa_1}(z) + r_2(z)\mathbf{w}_{\varkappa_2}(z)$$

определяет кусочно-мероморфное решение задачи (0.3) для любых рациональных функций r_1 и r_2, то множество всех нетривиальных кусочно-мероморфных решений этой задачи может быть представлено в виде бесконечной суммы непересекающихся подпространств, образованных решениями задачи с одной и той же парой $(\lambda(t), \mu(t))$.

Пусть $\lambda(t)$, $\mu(t)$ не обращаются в нуль и бесконечность на Γ, в качестве представителя подпространства будем рассматривать решение $\mathbf{w}(z)$ задачи (0.3) без конечных полюсов, имеющее наинизший возможный порядок на бесконечности. Всегда можно считать, что компоненты $w^1(z)$, $w^2(z)$ такого решения не обращаются в нуль одновременно ни в одной конечной точке плоскости. Действительно, если при $z = z_0$, не лежащей на Γ, $w^1(z_0) = w^2(z_0) = 0$, то из представления

$$\mathbf{w}(z) = p(z)\mathbf{w}_{\varkappa_1}(z) + q(z)\mathbf{w}_{\varkappa_2}(z), \tag{1.5}$$

в котором p, q — полиномы, учитывая, что определитель канонической системы решений отличен от нуля, получим $p(z_0) = q(z_0) = 0$ и $\mathbf{w}_1(z) = \mathbf{w}(z)/(z - z_0)$ будет решением, компоненты которого не имеют общих нулей. Случай $z_0 \in \Gamma$ исследуется как в ([1], с. 29).

Для построения такого решения рассмотрим на Γ отношения

$$\Phi^+(t) = w^{2+}(t)/w^{1+}(t), \quad \Phi^-(t) = w^{2-}(t)/w^{1-}(t). \tag{1.6}$$

Из краевого условия (0.3) следует, что $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ являются предельными значениями на Γ кусочно-мероморфного решения $\Phi(z)$ задачи дробно-линейного сопряжения

$$g_{11}\Phi^+ - g_{22}\Phi^- + g_{12}\Phi^+\Phi^- = g_{21}. \tag{1.7}$$

Так как числитель и знаменатель отношений $w^{2\pm}(z)/w^{1\pm}(z)$ не обращаются одновременно в нуль, обозначим через $T_n(z)$ и $T_p(z)$ полиномы, определенные с точностью до мультипликативных постоянных, нулями которых являются все конечные нули и полюсы этих отношений, согласно сделанному предположению, не лежащие на Γ. Тогда из (1.1) получаем

$$w^{1+}(t)/\lambda^+(t) = w^{1-}(t)/\lambda^-(t) = T_p(t), \quad w^{2+}(t)/\mu^+(t) = w^{2-}(t)/\mu^-(t) = T_n(t),$$

где $\lambda^+(t)$, $1/\lambda^-(t)$ и $\mu^+(t)$, $1/\mu^-(t)$ — факторизационные множители на Γ отношений (1.1). Подставляя вид искомого решения в любое из условий (0.3), получим соотношение между этими мультипликативными постоянными. Таким образом, в качестве представителя подпространства решений задачи (0.3) с парой (λ, μ) берем решение

$$\mathbf{w}(z) = (\lambda(z)T_p(z), \mu(z)T_n(z))\,, \tag{1.8}$$

где $\lambda(z)$, $\mu(z)$ — кусочно-голоморфные функции в конечной части плоскости без нулей с H-непрерывными предельными значениями $\lambda^\pm(t)$, $\mu^\pm(t)$ соответственно, имеющие на бесконечности порядки $-\varkappa_\lambda$ и $-\varkappa_\mu$. Здесь через $\varkappa_\lambda$ и $\varkappa_\mu$ обозначены индексы Коши отношений (1.1).

Если $\lambda(t)$, $\mu(t)$ в конечном числе точек контура обращаются в нуль или бесконечность, такое решение запишем используя формулу решения краевой задачи Римана в исключительных случаях ([8], с. 130).

Определение 2. Будем называть кусочно-мероморфное решение $\Phi(z)$ задачи (1.7) решением с парой (λ, μ), если на Γ

$$g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi^-(t) = \lambda(t), \quad g_{22}(t) + g_{21}(t)/\Phi^-(t) = \mu(t). \tag{1.9}$$

Очевидно, если $\mathbf{w}(z)$ — решение задачи (0.3) с парой (λ, μ), то отношения (1.6) — предельные значения на Γ решения задачи (1.7) с той же парой (λ, μ).

Обратно, если $\Phi(z)$ — решение задачи (1.7) с парой (λ, μ), то полагая на Γ

$$g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi^-(t) = w^{1+}(t)/w^{1-}(t), \quad w^{2\pm}(t) = \Phi^\pm(t)w^{1\pm}(t), \tag{1.10}$$

получим решение задачи (0.3) с парой (λ, μ), что следует из (1.10) и равенства

$$g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi^-(t) = \frac{\Phi^-(t)}{\Phi^+(t)}\left(g_{22}(t) + \frac{g_{21}(t)}{\Phi^-(t)}\right). \tag{1.11}$$

Исключая $\Phi^-(t)$ из (1.9), придем к соотношению

$$g_{22}(t)\lambda(t) + g_{11}(t)\mu(t) - \lambda(t)\mu(t) = \Delta(t), \quad t \in \Gamma. \tag{1.12}$$

Если H-непрерывные на Γ функции $\lambda(t)$, $\mu(t)$, связанные соотношением (1.12), определяют пару какого-либо кусочно-мероморфного решения $\Phi(z)$ задачи (1.7), то предельные значения этого решения согласно (1.9), (1.11) могут быть записаны по любой из формул

$$\Phi^-(t) = (\lambda(t) - g_{11}(t))/g_{12}(t) = g_{21}(t)/(\mu(t) - g_{22}(t)), \qquad t \in \Gamma, \tag{1.13}$$

$$\Phi^+(t) = (g_{22}(t)\lambda(t) - \Delta(t))/g_{12}(t)\lambda(t) = g_{21}(t)\mu(t)/(g_{11}(t)\mu(t) - \Delta(t)), \quad t \in \Gamma. \tag{1.14}$$

Определение 3. Две пары H-непрерывных на Γ функций $(\lambda(t), \mu(t))$ и $(\lambda_1(t), \mu_1(t))$ назовем подобными, если

$$\mu(t)/\lambda(t) = \mu_1(t)/\lambda_1(t).$$

Определение 4. Задачи дробно-линейного сопряжения (1.7) и

$$f_{11}\Psi^+ - f_{22}\Psi^- + f_{12}\Psi^+\Psi^- = f_{21} \tag{1.15}$$

назовем подобными, если $f_{ij} = h^{j-i}g_{ij}$, $i, j = 1, 2$, $h \in H$.

Легко видеть, если кусочно-мероморфная функция $\Phi(z)$ — решение задачи (1.7) с парой $(\lambda(t), \mu(t))$, то кусочно-мероморфная функция $\Psi(z) = \Phi(z)/R(z)$, где $R(z)$ — рациональная функция, будет решением подобной задачи (1.15) с $h(t) = R(t)$, определяющим ту же пару $(\lambda(t), \mu(t))$.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi(z)$ *— кусочно-мероморфное решение задачи* (1.7) *с парой* (λ, μ). *Тогда* $\Phi(z)$ *будет решением подобной задачи* (1.15) *с коэффициентами*

$$f_{12} = \frac{\lambda_1 - g_{11}}{\lambda - g_{11}} g_{12} = -\frac{g_{21}}{\Phi^+\Phi^-}, \quad f_{21} = \frac{\mu_1 - g_{22}}{\mu - g_{22}} g_{21} = -g_{12}\Phi^+\Phi^-, \tag{1.16}$$

определяющим подобную пару (λ_1, μ_1), *связанную с парой* (λ, μ) *соотношениями*

$$\lambda + \lambda_1 - g_{22}\lambda\lambda_1/\Delta = g_{11}, \quad \mu + \mu_1 - g_{11}\mu\mu_1/\Delta = g_{22}. \tag{1.17}$$

Действительно, проверка того, что $\Phi(z)$ — решение задачи (1.15) с коэффициентами $f_{12} = -g_{21}/\Phi^+\Phi^-$, $f_{21} = -g_{12}\Phi^+\Phi^-$ осуществляется непосредственно. Согласно (1.11) и определению 3 имеем $\mu/\lambda = \Phi^+/\Phi^- = \mu_1/\lambda_1$ и пары (λ, μ), (λ_1, μ_1) будут подобными. Выражая в отношении Φ^+/Φ^- предельные значения $\Phi(z)$ через λ по формулам (1.13), (1.14) и по соответствующим формулам через λ_1, придем к первому равенству (1.17), которое может быть записано также в виде $\Delta(\lambda - g_{11})(\lambda_1 - g_{11}) = -g_{12}g_{21}\lambda\lambda_1$. Подставляя выражения $\Phi^\pm$ через λ в коэффициент f_{12}, с учетом последнего равенства получим требуемое. Проверка второго соотношения из (1.17) и вида коэффициента f_{21} делается аналогично.

Пусть теперь, как и выше, $\Phi(z)$ — кусочно-мероморфное решение задачи (1.7) с парой (λ, μ). Выясним, когда $\Phi(z)$ будет решением с той же парой (λ, μ) задачи дробно-линейного сопряжения вида (1.15), не подобной задаче (1.7).

Приравнивая первые равенства (1.13), (1.14) для задач (1.7), (1.15), получим

$$f_{12}(\lambda - g_{11}) = g_{12}(\lambda - f_{11}), \quad f_{12}(g_{22}\lambda - \Delta) = g_{12}(f_{22}\lambda - \Delta_1), \quad \Delta_1 = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}.$$

Исключая из этих равенств λ и полагая

$$f_{11} = g_{11}p, \quad f_{12} = g_{12}u, \quad f_{21} = g_{21}v, \quad f_{22} = g_{22}q, \tag{1.18}$$

получим, что функции p, u, v, q должны быть связаны равенством

$$(p-1)(q-1)g_{11}g_{22} = (u-1)(v-1)g_{12}g_{21}. \tag{1.19}$$

Вводя обозначения

$$(p-1)/(u-1) = \omega, \quad (v-1)/(q-1) = \delta \tag{1.20}$$

и учитывая (1.19), получим

$$\omega g_{11}g_{22} = \delta g_{12}g_{21}, \quad \lambda = g_{11}(1-\omega) = (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}\delta)/g_{22}. \tag{1.21}$$

Таким образом, из первых равенств (1.13), (1.14) на Γ приходим к представлениям

$$\Phi^+(t) = \frac{g_{12}(t)g_{21}(t) - g_{11}(t)g_{22}(t)\omega(t)}{g_{11}(t)g_{12}(t)(1-\omega(t))}, \quad \Phi^-(t) = -\frac{g_{11}(t)\omega(t)}{g_{12}(t)}, \tag{1.22}$$

$$\Phi^+(t) = \frac{g_{21}(t)g_{22}(t)(1-\delta(t))}{g_{11}(t)g_{22}(t) - g_{12}(t)g_{21}(t)\delta(t)}, \quad \Phi^-(t) = -\frac{g_{21}(t)\delta(t)}{g_{22}(t)}. \tag{1.23}$$

2. Построение канонической системы решений задачи (0.3) по решению задачи с парой (λ, μ)

Пусть (1.8) — решение задачи (0.3) с парой (λ, μ). Тогда его разложение по функциям искомой канонической системы решений (1.2) этой задачи имеет вид (1.5), где p, q — некоторые полиномы. Обозначим через $\Delta^{\pm}(z)$ определители канонической матрицы

$$X(z) = \begin{pmatrix} w^1_{\varkappa_1}(z) & w^1_{\varkappa_2}(z) \\ w^2_{\varkappa_1}(z) & w^2_{\varkappa_2}(z) \end{pmatrix}, \quad G(t) = X^+(t)[X^-(t)]^{-1}, \quad \Delta(t) = \frac{\Delta^+(t)}{\Delta^-(t)}, \quad t \in \Gamma \tag{2.1}$$

(порядок Δ^- на бесконечности равен $-\varkappa$).

Рассматривая предельные значения из областей D^+ и D^- разложения (1.5) как линейные алгебраические системы для определения полиномов p и q, на Γ придем к равенствам

$$p = \left(w^{1+} w^{2+}_{\varkappa_2} - w^{2+} w^{1+}_{\varkappa_2}\right) / \Delta^+ = \left(w^{1-} w^{2-}_{\varkappa_2} - w^{2-} w^{1-}_{\varkappa_2}\right) / \Delta^-, \tag{2.2}$$

$$q = \left(w^{2+} w^{1+}_{\varkappa_1} - w^{1+} w^{2+}_{\varkappa_1}\right) / \Delta^+ = \left(w^{2-} w^{1-}_{\varkappa_1} - w^{1-} w^{2-}_{\varkappa_1}\right) / \Delta^-. \tag{2.3}$$

Выражая из второго равенства (2.3) $w^{2-}_{\varkappa_1}$, подставляя его в первое из этих равенств, в котором $w^{2+}_{\varkappa_1}$ записано согласно второму краевому условию (0.3), и учитывая, что компоненты решения $\mathbf{w}(z) = \left(w^1(z), w^2(z)\right)$ на Γ связаны тем же равенством, получим

$$w^{1+}_{\varkappa_1} = \frac{w^{1+}}{w^{1-}} w^{1-}_{\varkappa_1} + q \frac{\Delta^+ w^{1-} - g_{22} \Delta^- w^{1+}}{w^{1-} w^{2+}}.$$

Если из второго равенства (2.3) выразить $w^{1-}_{\varkappa_1}$, подставить его в первое, где $w^{1+}_{\varkappa_1}$ записано согласно первому краевому условию (0.3) и учитывая это условие для решения $\mathbf{w}(z)$, придем к равенству, связывающему предельные значения второй компоненты $w^2_{\varkappa_1}(z)$:

$$w^{2+}_{\varkappa_1} = \frac{w^{2+}}{w^{2-}} w^{2-}_{\varkappa_1} - q \frac{\Delta^+ w^{2-} - g_{11} \Delta^- w^{2+}}{w^{1+} w^{2-}}.$$

Преобразуем выражения $(\Delta^+ w^{1-} - g_{22} \Delta^- w^{1+})/(w^{1-} w^{2+})$ и $(\Delta^+ w^{2-} - g_{11} \Delta^- w^{2+})/(w^{1+} w^{2-})$. Вынося за скобки Δ^- и учитывая представление для Δ в (2.1), воспользуемся сначала, в преобразуемых выражениях, соответственно первым и вторым краевыми условиями (0.3), а затем, вторым и первым. Таким образом, придем к краевым условиям

$$w^{1+}_{\varkappa_1} = \frac{w^{1+}}{w^{1-}} w^{1-}_{\varkappa_1} - q \frac{g_{12} \Delta^-}{w^{1-}}, \tag{2.4}$$

$$w^{2+}_{\varkappa_1} = \frac{w^{2+}}{w^{2-}} w^{2-}_{\varkappa_1} + q \frac{g_{21} \Delta^-}{w^{2-}}. \tag{2.5}$$

Считая полином q известным, решения скалярных задач линейного сопряжения (2.4), (2.5) запишем на Γ соответственно в виде

$$w^{1+}_{\varkappa 1} = w^{1+} \left(-P \left[q \frac{g_{12} \Delta^-}{w^{1+} w^{1-}} \right] + \frac{P_m}{T_p} \right), \quad w^{1-}_{\varkappa 1} = w^{1-} \left(Q \left[q \frac{g_{12} \Delta^-}{w^{1+} w^{1-}} \right] + \frac{P_m}{T_p} \right), \tag{2.6}$$

$$w^{2+}_{\varkappa 1} = w^{2+} \left(P \left[q \frac{g_{21} \Delta^-}{w^{2+} w^{2-}} \right] + \frac{P_l}{T_n} \right), \qquad w^{2-}_{\varkappa 1} = w^{2-} \left(-Q \left[q \frac{g_{21} \Delta^-}{w^{2+} w^{2-}} \right] + \frac{P_l}{T_n} \right). \tag{2.7}$$

В формулах (2.6), (2.7) $P = [I + S]/2$, $Q = [I - S]/2$ (I — единичный, S — сингулярный операторы), P_m, P_l — произвольные полиномы, степени которых m, l будут определены ниже, а T_p и T_n — полиномы, входящие в формулу (1.8).

Подставляя (2.6), (2.7) в первое краевое условие (0.3) и учитывая это условие для решения $\mathbf{w}(z)$, для определения полинома q получим сингулярное интегральное уравнение

$$\left(\frac{g_{11}}{w^{1+}w^{2-}}+\frac{g_{22}}{w^{2+}w^{1-}}\right)\Delta^{-}q+S\left[\left(\frac{g_{12}}{w^{1+}w^{1-}}+\frac{g_{21}}{w^{2+}w^{2-}}\right)\Delta^{-}q\right]=2\left(\frac{P_m}{T_p}-\frac{P_l}{T_n}\right). \tag{2.8}$$

Подстановка (2.6), (2.7) во второе краевое условие (0.3) приводит также к уравнению (2.8). Полагая

$$\left(\frac{g_{12}}{w^{1+}w^{1-}}+\frac{g_{21}}{w^{2+}w^{2-}}\right)\Delta^{-}q=\omega, \tag{2.9}$$

придем к характеристическому сингулярному интегральному уравнению

$$\left(\frac{g_{11}}{w^{1+}w^{2-}}+\frac{g_{22}}{w^{2+}w^{1-}}\right)\omega+\left(\frac{g_{12}}{w^{1+}w^{1-}}+\frac{g_{21}}{w^{2+}w^{2-}}\right)S\left[\omega\right]=2\left(\frac{g_{12}}{w^{1+}w^{1-}}+\frac{g_{21}}{w^{2+}w^{2-}}\right)\left(\frac{P_m}{T_p}-\frac{P_l}{T_n}\right),$$

решение которого ищем в виде

$$\omega(t)=\omega^{+}(t)-\omega^{-}(t),\quad t\in\Gamma,\quad \omega^{-}(\infty)=0. \tag{2.10}$$

Тогда для предельных значений кусочно-голоморфной и исчезающей на бесконечности функции $\omega(z)$, после несложных преобразований, придем на Γ к скалярной задаче линейного сопряжения

$$\frac{1}{w^{1-}w^{2-}}\omega^{+}=\frac{\Delta}{w^{1+}w^{2+}}\omega^{-}+\left(\frac{g_{12}}{w^{1+}w^{1-}}+\frac{g_{21}}{w^{2+}w^{2-}}\right)\left(\frac{P_m}{T_p}-\frac{P_l}{T_n}\right)$$

или к задаче

$$\omega^{+}=\frac{\Delta^{+}w^{1-}w^{2-}}{\Delta^{-}w^{1+}w^{2+}}\omega^{-}+\left(g_{12}\frac{w^{2-}}{w^{1+}}+g_{21}\frac{w^{1-}}{w^{2+}}\right)\left(\frac{P_m}{T_p}-\frac{P_l}{T_n}\right), \tag{2.11}$$

индекс которой равен $\varkappa=\varkappa-\varkappa_\lambda-\varkappa_\mu$ ($\varkappa_\lambda$ и $\varkappa_\mu$ — индексы Коши отношений (1.1)). Так как согласно (0.3), (1.1), (1.12) имеет место равенство

$$\left(\frac{g_{12}}{w^{1+}w^{1-}}+\frac{g_{21}}{w^{2+}w^{2-}}\right)=2-\frac{g_{11}}{\lambda}-\frac{g_{22}}{\mu}=\frac{\lambda\mu-\Delta}{\lambda\mu},$$

то при $\varkappa>0$ решение задачи (2.11) на Γ запишем в виде

$$\begin{aligned}\omega^{+}&=\frac{\Delta^{+}}{\lambda^{+}\mu^{+}}\left\{P\left[\left(\frac{\lambda^{+}\mu^{+}}{\Delta^{+}}-\frac{\lambda^{-}\mu^{-}}{\Delta^{-}}\right)\left(\frac{P_m}{T_p}-\frac{P_l}{T_n}\right)\right]+P_{\varkappa-1}\right\},\\ \omega^{-}&=\frac{\Delta^{-}}{\lambda^{-}\mu^{+-}}\left\{-Q\left[\left(\frac{\lambda^{+}\mu^{+}}{\Delta^{+}}-\frac{\lambda^{-}\mu^{-}}{\Delta^{-}}\right)\left(\frac{P_m}{T_p}-\frac{P_l}{T_n}\right)\right]+P_{\varkappa-1}\right\},\end{aligned} \tag{2.12}$$

где $\lambda^{\pm}(t)$, $\mu^{\pm}(t)$ определены в (1.8). Если $\varkappa\le 0$, то в (2.12) следует положить $P_{\varkappa-1}\equiv 0$ и потребовать выполнения $-\varkappa$ условий разрешимости

$$\int_\Gamma\left(\frac{\lambda^{+}(\tau)\mu^{+}(\tau)}{\Delta^{+}(\tau)}-\frac{\lambda^{-}(\tau)\mu^{-}(\tau)}{\Delta^{-}(\tau)}\right)\left(\frac{P_m(\tau)}{T_p(\tau)}-\frac{P_l(\tau)}{T_n(\tau)}\right)\tau^{j-1}\mathrm{d}\tau=0,\quad j=\overline{1,-\varkappa}. \tag{2.13}$$

Подставляя найденный из (2.9), (2.10) полином $q(t)$ в формулы (2.6), (2.7), получим представление для первой функции канонической системы решений $\mathbf{w}_{\varkappa_1}(z)$ задачи (0.3).

Обозначим через k_1 и k_2 порядки компонент решения (1.8) на бесконечности так, что

$$k=\max(k_1,k_2)=\max(p-\varkappa_\lambda,n-\varkappa_\mu) \tag{2.14}$$

— порядок решения $\mathbf{w}(z)$ на бесконечности.

1. Пусть $k_1\le 0$, $k_2\le 0$ ($\varkappa_\lambda\ge p\ge 0$, $\varkappa_\mu\ge n\ge 0$). Значит, $\varkappa_1\ge -k\ge 0$.

1.1. Если $\varkappa<0$, то $\varkappa_2<0$. Поэтому в разложении (1.5) полином $q(z)\equiv 0$ и согласно выбору решения (1.8) $\mathbf{w}_{\varkappa_1}(z)=\mathbf{w}(z)$.

1.2. Если $\varkappa = 0$, то при $k < 0$, рассуждая аналогично, получим $\mathbf{w}_{\varkappa_1}(z) = \mathbf{w}(z)$ ($\varkappa_1 = -k$, $\varkappa_2 = k$). При $k = 0$, $\varkappa_1 = 0$ и за первую функцию канонической системы решений можно также взять $\mathbf{w}(z)$. Действительно, из предположения $\varkappa_1 = -\varkappa_2 > 0$ следует, что в (1.5) полином $q(z) \equiv 0$, $p(z) \not\equiv 0$, а это противоречит выбору решения (1.8).

1.3. Если $\varkappa > 0$, то при $k < 0$ и $\varkappa \le -k$ имеем $\varkappa_2 = \varkappa - \varkappa_1 \le \varkappa + k \le 0$ ($\varkappa_1 \ge -k > 0$). Поэтому в (1.5) полином $q(z) \equiv 0$ и $\mathbf{w}_{\varkappa_1}(z) = \mathbf{w}(z)$ ($\varkappa_1 = -k$, $\varkappa_2 = \varkappa + k$).

1.4. Если $-k < \varkappa < -2k$, то $\varkappa_2 < -2k - \varkappa_1 < -k < 0$ и $\mathbf{w}_{\varkappa_1}(z) = \mathbf{w}(z)$.

1.5. Если $-2k \le \varkappa$ и $k < 0$, то $\varkappa_2 \ge -k > 0$, так как, предполагая противное ($\varkappa_2 < -k < 0$), получим $q(z) \equiv 0$, $\varkappa_1 = -k$ и $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 < -2k$.

1.6. Если $\varkappa > 0$ и $k = 0$, то $\varkappa_2 \ge 0$, так как иначе (при $\varkappa_2 < 0$) получим $\varkappa_1 = 0$ и $\varkappa < 0$.

Для построения второй функции канонической системы решений $\mathbf{w}_{\varkappa_2}(z)$ в случаях 1.1–1.4 ($\mathbf{w}_{\varkappa_1}(z) = \mathbf{w}(z)$) распишем равенства $\Delta^+ = \det X^+$, $\Delta^- = \det X^-$ в виде

$$w^{1+}_{\varkappa_1} w^{2+}_{\varkappa_2} - w^{2+}_{\varkappa_1} w^{1+}_{\varkappa_2} = \Delta^+, \quad w^{1-}_{\varkappa_1} w^{2-}_{\varkappa_2} - w^{2-}_{\varkappa_1} w^{1-}_{\varkappa_2} = \Delta^-. \tag{2.15}$$

Заменяя в первом условии (0.3), записанным для $\mathbf{w}_{\varkappa_2}$, $w^{2-}_{\varkappa_2}$ из второго равенства (2.15) с учетом того же условия (0.3) для $\mathbf{w}_{\varkappa_1}$, получим

$$w^{1+}_{\varkappa_2} = \frac{w^{1+}_{\varkappa_1}}{w^{1-}_{\varkappa_1}} w^{1-}_{\varkappa_2} + \frac{g_{12}}{w^{1-}_{\varkappa_1}} \Delta^-. \tag{2.16}$$

Аналогично, из второго условия (0.3) и первого равенства (2.15) имеем

$$w^{2+}_{\varkappa_2} = \frac{w^{2+}_{\varkappa_1}}{w^{2-}_{\varkappa_1}} w^{2-}_{\varkappa_2} - \frac{g_{21}}{w^{2-}_{\varkappa_1}} \Delta^-. \tag{2.17}$$

Индексы задач линейного сопряжения (2.16), (2.17) равны $\varkappa_\lambda$ и $\varkappa_\mu$ (индексы Коши отношений (1.1)). Так как $\varkappa_1 = -k$ (k — порядок (2.14) решения $\mathbf{w}(z)$ на бесконечности), то $\varkappa_2 = \varkappa + k$. Поэтому решения задач (2.16), (2.17) ищем в классе кусочно-голоморфных функций, имеющих на бесконечности порядок не выше $-\varkappa_2$. Записывая решения полученных задач линейного сопряжения по формулам

$$w^{1+}_{\varkappa_2} = \lambda^+ \left(P\left[\frac{g_{12}\Delta^-}{w^{1-}_{\varkappa_1}\lambda^+}\right] + M_{\varkappa_\lambda - \varkappa - k} \right), \quad w^{1-}_{\varkappa_2} = \lambda^- \left(-Q\left[\frac{g_{12}\Delta^-}{w^{1-}_{\varkappa_1}\lambda^+}\right] + M_{\varkappa_\lambda - \varkappa - k} \right), \tag{2.18}$$

$$w^{2+}_{\varkappa_2} = \mu^+ \left(-P\left[\frac{g_{21}\Delta^-}{w^{2-}_{\varkappa_1}\mu^+}\right] + N_{\varkappa_\mu - \varkappa - k} \right), \quad w^{2-}_{\varkappa_2} = \mu^- \left(Q\left[\frac{g_{21}\Delta^-}{w^{2-}_{\varkappa_1}\mu^+}\right] + N_{\varkappa_\mu - \varkappa - k} \right) \tag{2.19}$$

и подставляя их во второе равенство (2.15), в силу (1.8) получим

$$\frac{\Delta^-}{\lambda^-\mu^-} - T_p Q\left[\frac{g_{21}\Delta^-}{w^{2-}_{\varkappa_1}\mu^+}\right] - T_n Q\left[\frac{g_{12}\Delta^-}{w^{1-}_{\varkappa_1}\lambda^+}\right] = T_p N_{\varkappa_\mu - \varkappa - k} - T_n M_{\varkappa_\lambda - \varkappa - k}. \tag{2.20}$$

Согласно принципу непрерывности и теоремы Лиувилля в левой части этого выражения будет полином степени $\varkappa_\lambda + \varkappa_\mu - \varkappa$.

Если, например, в (2.14) порядок k решения $\mathbf{w}(z)$ на бесконечности равен $p - \varkappa_\lambda$, то и в правой части стоит полином той же степени, в который входят $3\varkappa_\lambda + \varkappa_\mu - 2\varkappa - 2p + 2$ произвольных коэффициентов полиномов $M_{\varkappa_\lambda - \varkappa - k}$ и $N_{\varkappa_\mu - \varkappa - k}$. Из общей теории задачи линейного сопряжения ([1], с. 35) известно, что любая другая каноническая система решений задачи (0.2) имеет вид

$$\left(\alpha w^1_{\varkappa_1}, \alpha w^2_{\varkappa_1}\right), \quad \left(P_{\varkappa_1 - \varkappa_2} w^1_{\varkappa_1} + \beta w^1_{\varkappa_2}, P_{\varkappa_1 - \varkappa_2} w^2_{\varkappa_1} + \beta w^2_{\varkappa_2}\right), \tag{2.21}$$

где α, β — произвольные постоянные, $P_{\varkappa_1-\varkappa_2}(z)$ — произвольный полином степени $\varkappa_1-\varkappa_2$ и вторая функция канонической системы решений с точностью до мультипликативной постоянной зависит от $\varkappa_1-\varkappa_2+1$ произвольных постоянных. В нашем случае $\varkappa_1=\varkappa_\lambda-p$, $\varkappa_2=\varkappa+p-\varkappa_\lambda$, $\varkappa_1-\varkappa_2=2\varkappa_\lambda-\varkappa-2p$. Рассматривая (2.20) как систему $\varkappa_\lambda+\varkappa_\mu-\varkappa+1$ уравнений относительно $3\varkappa_\lambda+\varkappa_\mu-2\varkappa-2p+2$ коэффициентов полиномов в правой части этого равенства, получим, что произвольной согласно (2.21) останется $2\varkappa_\lambda-\varkappa-2p+1$ постоянная.

Случай $k=n-\varkappa_\mu$ рассматривается аналогично.

Рассмотрим теперь случаи 1.5, 1.6. Полагая в (2.6), (2.7), (2.12)

$$m=\varkappa_\lambda-1, \quad l=\varkappa_\mu-1, \tag{2.22}$$

определяя вид полинома q из (2.9), (2.10) и подставляя его в (2.6), (2.7), при $\varkappa>0$ получим формулы, определяющие вид первой функции $\mathbf{w}_{\varkappa_1}(z)$ канонической системы решений. При $\varkappa\le 0$ к этим формулам следует добавить $-\varkappa$ условий разрешимости (2.13), (2.22). Выбирая среди полученных решений задачи (0.3) решение, имеющее наинизший порядок на бесконечности, определим, с точностью до мультипликативной постоянной $\mathbf{w}_{\varkappa_1}(z)$ и частный индекс $\varkappa_1$ матрицы-функции (0.1). Так как в рассматриваемых случаях окончательный вид формул (2.6), (2.7) содержит все решения задачи (0.3), исчезающие на бесконечности, для которых заданное решение $\mathbf{w}(z)$ может быть записано в виде (1.5), то вторую функцию канонической системы решений $\mathbf{w}_{\varkappa_2}(z)$ можно определить как решение задачи порядка $\varkappa_1-\varkappa$, учитывая (2.21). Однако предпочтем, как это будет делаться и при изучении других случаев, вторую функцию канонической системы решений искать в виде решения скалярных задач линейного сопряжения (2.16), (2.17). Подставляя общее решение этих задач в классе кусочно-голоморфных функций порядка $\varkappa_1-\varkappa$ на бесконечности в любое из краевых условий (0.3), придем к соотношениям между коэффициентами произвольных полиномов, входящих в это решение.

2. Пусть $k_1>0$, $k_2\le 0$ ($p-\varkappa_\lambda>0$, $n-\varkappa_\mu\le 0$). В (2.6), (2.7), (2.12) положим

$$m=p-1, \quad l=\varkappa_\mu-1, \tag{2.23}$$

$P_m(z)\equiv 0$ при $p=0$, $P_l(z)\equiv 0$ при $\varkappa_\mu\le 0$.

Если $\varkappa=\varkappa-\varkappa_\lambda-\varkappa_\mu>0$, то указанные формулы будут содержать $n_1=\varkappa+p-\varkappa_\lambda$ неопределенных коэффициентов полиномов $P_{p-1}(z)$, $P_{\varkappa_\mu-1}(z)$ и $P_{\varkappa-\varkappa_\lambda-\varkappa_\mu-1}(z)$. Поэтому в формулах (2.6) требуем выполнения $p-\varkappa_\lambda$ условий обращения выражения

$$Q\left[q\frac{g_{12}\Delta^-}{w^{1+}w^{1-}}\right]+P_{p-1}/T_p \tag{2.24}$$

на бесконечности в нуль кратности $p-\varkappa_\lambda+1$.

Если $\varkappa\le 0$, то $P_{\varkappa-1}(z)\equiv 0$, число неопределенных коэффициентов будет равно $n_1=p+\varkappa_\mu$, а сами коэффициенты должны быть подчинены $-\varkappa$ условиям (2.13), к которым следует добавить $p-\varkappa_\lambda+\varkappa$ условий обращения выражения (2.24) на бесконечности в нуль кратности $p-\varkappa_\lambda+\varkappa+1$.

3. Пусть $k_1\le 0$, $k_2>0$. Тогда в формулах (2.6), (2.7), (2.12) возьмем

$$m=\varkappa_\lambda-1, \quad l=n-1, \tag{2.25}$$

$P_m(z)\equiv 0$ при $\varkappa_\lambda\le 0$, $P_l(z)\equiv 0$ при $n=0$.

Если $\varkappa > 0$, то на $n_1 = \varkappa + n - \varkappa_\mu$ неопределенных коэффициентов полиномов $P_{\varkappa_\lambda - 1}(z)$, $P_{n-1}(z)$ и $P_{\varkappa - \varkappa_\lambda - \varkappa_\mu - 1}(z)$ следует наложить $n - \varkappa_\mu$ условий обращения выражения

$$Q\left[q\frac{g_{21}\Delta^-}{w^{2+}w^{2-}}\right] + P_{n-1}/T_n \tag{2.26}$$

на бесконечности в нуль кратности $n - \varkappa_\mu + 1$.

Если $\varkappa \le 0$, то $P_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$, число неопределенных коэффициентов будет равно $n_1 = n + \varkappa_\lambda$, и требуем выполнения $-\varkappa$ условий (2.13), а также $n - \varkappa_\mu + \varkappa$ условий обращения выражения (2.26) на бесконечности в нуль кратности $n - \varkappa_\mu + \varkappa + 1$.

4. Пусть $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Тогда в (2.6), (2.7), (2.12) следует считать

$$m = p - 1, \quad l = n - 1, \tag{2.27}$$

$P_m(z) \equiv 0$ при $p = 0$, $P_l(z) \equiv 0$ при $n = 0$.

Если $\varkappa > 0$, то $n_1 = \varkappa + p + n - \varkappa_\lambda - \varkappa_\mu$ неопределенных коэффициентов полиномов $P_{p-1}(z)$, $P_{n-1}(z)$ и $P_{\varkappa - \varkappa_\lambda - \varkappa_\mu - 1}(z)$ должны удовлетворять $p + n - \varkappa_\lambda - \varkappa_\mu$ условиям обращения на бесконечности в нуль кратностей $p - \varkappa_\lambda + 1$ и $n - \varkappa_\mu + 1$ выражений (2.24) и (2.26) соответственно.

Если $\varkappa \le 0$, то $P_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$, $n_1 = p + n$ и к $-\varkappa$ условиям (2.13) следует добавить $p - \varkappa_\lambda + [\varkappa/2]$ и $n - \varkappa_\mu + [\varkappa/2]$ условий (2.24) и (2.26) соответственно, обеспечивающих обращение их на бесконечности в нуль кратностей $p - \varkappa_\lambda + [\varkappa/2] + 1$ и $n - \varkappa_\mu + [\varkappa/2] + 1$ (здесь квадратная скобка означает целую часть числа $\varkappa/2$).

Выбирая, как и выше, среди полученных решений задачи (0.3) решение, имеющее наинизший порядок на бесконечности, с точностью до мультипликативной постоянной определим $\mathbf{w}_{\varkappa_1}(z)$ и частный индекс $\varkappa_1$ матрицы-функции (0.1). Вторую функцию канонической системы решений (1.2) определим по краевым условиям (2.16), (2.17).

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{w}(z)$ *— заданное решение задачи линейного сопряжения* (0.2) *с парой* (λ, μ) *вида* (1.8), *компоненты которого на бесконечности имеют порядки* $k_1 = p - \varkappa_\lambda$ *и* $k_2 = n - \varkappa_\mu$ *соответственно,* n, p *— общее число нулей и полюсов в конечной части плоскости,* $\varkappa$ *— суммарный индекс матрицы-функции* (0.1), $k = \max(k_1, k_2)$ *— порядок решения на бесконечности,* $\varkappa_\lambda$, $\varkappa_\mu$ *— индексы Коши отношений* (1.1).

Если $k_1 \le 0$, $k_2 \le 0$, *то при* $\varkappa \le 0$ *либо* $k < 0$ *и* $0 < \varkappa < -2k$, *первая функция канонической системы решений* (1.2) *—* $\mathbf{w}_{\varkappa_1}(z) = \mathbf{w}(z)$, *а вторая функция этой системы определяется формулами* (2.18), (2.19) *согласно равенству* (2.20). *В случаях* $k < 0$ *и* $-2k \le \varkappa$ *либо* $k = 0$ *и* $\varkappa > 0$, *первая функция канонической системы решений* (1.2) *при* $\varkappa = \varkappa - \varkappa_\lambda - \varkappa_\mu > 0$ *находится по формулам* (2.22), (2.12), (2.10), (2.9), (2.6), (2.7), *содержащим* $\varkappa$ *неопределенных коэффициентов, а при* $\varkappa \le 0$ $\varkappa + \varkappa_\mu$ *коэффициентов должны быть связаны* $-\varkappa$ *условиями* (2.13). *Вторая функция системы* (1.2) *находится по краевым условиям* (2.16), (2.17).

Если $k_1 > 0$, $k_2 \le 0$, *то при* $\varkappa > 0$ *первая функция системы* (1.2) *ищется по формулам* (2.23), (2.12), (2.10), (2.9), (2.6), (2.7), *содержащим* $\varkappa + p - \varkappa_\lambda$ *неопределенных коэффициентов, на которые накладывается* $p - \varkappa_\lambda$ *условий* (2.24), *а при* $\varkappa \le 0$ $p + \varkappa_\mu$ *коэффициентов должны быть подчинены такому же числу условий* (2.13), (2.24). *Вторая функция этой системы находится по условиям* (2.16), (2.17).

Если $k_1 \le 0$, $k_2 > 0$, *то при* $\varkappa > 0$ *вместо формулы* (2.23) *и условия* (2.24) *предыдущего случая следует взять формулу* (2.25) *и* $n - \varkappa_\mu$ *условий* (2.26), *которым должны удовлетворять* $\varkappa + n - \varkappa_\mu$ *неопределенных коэффициентов, а при* $\varkappa \le 0$ *на* $n + \varkappa_\lambda$ *коэффициентов накладываем такое же число условий* (2.13), (2.26).

Если $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, *то система* (1.2) *определяется по формулам* (2.27), (2.12), (2.10), (2.9), (2.6), (2.7) *и условиям* (2.13), (2.24), (2.26), *при* $\varkappa > 0$ *содержащим* $\varkappa + p + n - \varkappa_\lambda - \varkappa_\mu$ *неопределенных коэффициентов и* $p + n - \varkappa_\lambda - \varkappa_\mu$ *условий для их определения, а при* $\varkappa \le 0$ *содержащим* $p + n$ *коэффициентов и* $p + n - \varkappa + 2[\varkappa/2]$ *условий, где квадратные скобки означают целую часть числа* $[\varkappa/2]$, *а также краевым условиям* (2.16), (2.17).

Пример. Пусть матрица-функция (0.1) мероморфно продолжима в область $D^+ : |z| < 1$ и имеет вид

$$G(t) = \begin{pmatrix} t & \sin t \\ t/\sin t & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta(t) = t \ \ (\Delta^+(t) = 1, \ \ \Delta^-(t) = 1/t), \quad t \in \Gamma : |t| = 1. \qquad (2.28)$$

Полагая $\mathbf{w}^-(t) = (1/t, 1)$ на Γ, из (0.3) найдем $\mathbf{w}^+(t) = (1 + \sin t, (1 + 2\sin t)/\sin t)$. Отношения (1.6) мероморфно продолжимы в соответствующие области и имеют в конечной части плоскости (в нашем случае в D^+) по одному нулю и полюсу ($n = 1$, $p = 1$). Факторизации отношений (1.1) возьмем в виде $w^{1+}(t)/w^{1-}(t) = \lambda^+(t)/\lambda^-(t)$, $\lambda^+(t) = 1 + \sin t$, $\lambda^-(t) = 1/t$, $\varkappa_\lambda = 1$; $w^{2+}(t)/w^{2-}(t) = \mu^+(t)/\mu^-(t)$, $\mu^+(t) = t(1+2\sin t)/((t+\pi/6)\sin t)$, $\mu^-(t) = t/(t+\pi/6)$, $\varkappa_\mu = 0$. Ищем полиномы $T_n = a(t + \pi/6)$, $T_p = bt$ (a, b — постоянные). Подставляя решение вида (1.8) в (0.3), найдем $a = b = 1$,

$$\mathbf{w}^+(z) = ((1 + \sin z)z, (1 + 2\sin z)z/\sin z)\,, \quad \mathbf{w}^-(z) = (1, z)\,. \qquad (2.29)$$

Порядки (2.14) компонент решения (2.29) на бесконечности равны $k_1 = 0$, $k_2 = 1$ и реализуется случай 3 ($P_m = c$, $P_l = d$, c, d — постоянные). Так как индекс $\varkappa$ задачи линейного сопряжения (2.11) равен нулю, предельные значения на Γ решения этих задач запишем по формулам (2.12):

$$\begin{aligned} \omega^+(t) = \{ & t[(c-d)t + c\pi/6](1 + 2\sin t)^2 - 6c\sin t(t + \pi/6)^2/\pi - \\ & - t\sin t[2c(1 + \sin t)(t + \pi/6) - 2dt(1 + \sin t) - \pi d/6 - \\ & \quad - (c - d + \sqrt{3}\pi d/6)(t + \pi/6)]\}/[t^2(t + \pi/6)(1 + \sin t)(1 + 2\sin t)], \\ \omega^-(t) = -\{ & 6c(t + \pi/6)^2/\pi - \pi dt/6 - t(t + \pi/6)(c - d + \sqrt{3}\pi d/6)\}/[t^2(t + \pi/6)]. \end{aligned}$$

Подставляя (2.10) в (2.9) получим

$$q(z) = (6c/\pi - \sqrt{3}\pi d/6)z + c.$$

Поэтому формулы (2.6), (2.7) позволяют записать вид первой функции канонической системы решений задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией (2.28):

$$w^{1+}_{\varkappa_1} = 2c(1 + \sin t) - [(6c/\pi - \sqrt{3}\pi d/6)t + c]\sin t/t, \quad w^{1-}_{\varkappa_1} = 2c/t, \qquad (2.30)$$

$$\begin{aligned} w^{2+}_{\varkappa_1} = {} & \frac{(1 + 2\sin t)t}{\sin t}\left(\frac{(6c/\pi - \sqrt{3}\pi d/6)t + c}{(1 + 2\sin t)t^2} - \frac{6c/\pi - \sqrt{3}\pi d/6 - 2c}{t} - \frac{c}{t^2} + \right. \\ & \left. + \frac{12\sqrt{3}[(6c/\pi - \sqrt{3}\pi d/6)\pi - 6c]}{\pi^2(6t + \pi)}\right) + \frac{6dt(1 + 2\sin t)}{(6t + \pi)\sin t}, \\ w^{2-}_{\varkappa_1} = {} & d + 2c - 6c/\pi + \sqrt{3}\pi d/6 + 2\sqrt{3}[(6c/\pi - \sqrt{3}\pi d/6)\pi - 6c]/\pi^2 - \\ & - \frac{c}{t} - \frac{2\sqrt{3}[(6c/\pi - \sqrt{3}\pi d/6)\pi - 6c]}{\pi(6t + \pi)} - \frac{\pi d}{(6t + \pi)}. \end{aligned} \qquad (2.31)$$

Требуя от функций (2.30), (2.31) наинизшего порядка на бесконечности, приходим к равенству

$$d = 4\sqrt{3}c(3 - \pi)/\pi^2,$$

что позволяет записать формулы (2.30), (2.31) в виде

$$w_{\varkappa_1}^{1+} = \frac{c(2t-\sin t)}{t}, \quad w_{\varkappa_1}^{1-} = \frac{2c}{t}, \quad w_{\varkappa_1}^{2+} = \frac{2c(t-\sin t)}{t\sin t}, \quad w_{\varkappa_1}^{2-} = -\frac{c}{t}. \tag{2.32}$$

Так как $\varkappa_1 = 1$, то для отыскания второй функции системы (1.2) решаем задачи (2.16), (2.17) в классе функций, ограниченных на бесконечности:

$$w_{\varkappa_2}^{1+} = \frac{2t-\sin t}{2} w_{\varkappa_2}^{1-} + \frac{1}{2}\sin t, \quad w_{\varkappa_2}^{2+} = \frac{2(\sin t - t)}{\sin t} w_{\varkappa_2}^{2-} + \frac{t}{\sin t},$$

индексы которых равны единице (чтобы избежать применения принципа аргумента и оценки соответствующих интегралов, предполагаем отсутствия нулей в единичном круге у функций $2-\sin z/z$ и $(\sin z - z)/z\sin z$). В этих предположениях, которые ниже будут проверены, на Γ получим

$$w_{\varkappa_2}^{1+} = \frac{1}{2}\sin t + \left(1 - \frac{\sin t}{2t}\right)(c_1 t + c_2), \quad w_{\varkappa_2}^{1-} = c_1 + \frac{c_2}{t};$$
$$w_{\varkappa_2}^{2+} = \frac{t}{\sin t} + \frac{2(\sin t - t)}{t\sin t}(d_1 t + d_2), \qquad w_{\varkappa_2}^{2-} = d_1 + \frac{d_2}{t}.$$

Подставляя этот вид второй функции системы (1.2) в любое из условий (0.3), найдем $d_1 = (1-c_1)/2$, $d_2 = -c_2/2$. Значит, вторая функция канонической системы решений задается формулами

$$w_{\varkappa_2}^{1+} = \frac{1}{2}\sin t + \left(1 - \frac{\sin t}{2t}\right)(c_1 t + c_2), \qquad w_{\varkappa_2}^{1-} = c_1 + \frac{c_2}{t};$$
$$w_{\varkappa_2}^{2+} = \frac{t}{\sin t} + \frac{(\sin t - t)}{t\sin t}[(1-c_1)t - c_2], \quad w_{\varkappa_2}^{2-} = \frac{[(1-c_1)t - c_2]}{2t}.$$

Вычисляя определители канонической матрицы (2.1), получим $\Delta^+(t) = 1$, $\Delta^-(t) = 1/t$ и предположения относительно индекса задач (2.16), (2.17) оказались верными.

3. Задачи линейного сопряжения, разрешимые в замкнутой форме

В этой части работы, используя полученные результаты, выделяются классы задач дробно-линейного сопряжения (1.7), для которых удается указать частное кусочно-мероморфное решение, что согласно (1.10) и результатов второй части статьи позволяет найти каноническую систему решений задачи линейного сопряжения (0.3).

1. Пусть у задачи (1.7) или соответствующей задачи (0.3) имеется решение с парой $(\lambda(t), \mu(t))$, для которого $\lambda(t) = r(t)$ — рациональная функция. Тогда из первого равенства (1.13) находим, что определенная на Γ функция

$$\Phi^-(t) = (r(t) - g_{11}(t))/g_{12}(t)$$

должна быть мероморфно продолжимой в область D^-, а из первого равенства (1.14) вытекает, что функция

$$\Phi^+(t) = (g_{22}(t)r(t) - \Delta(t))/(g_{12}(t)r(t))$$

должна быть мероморфно продолжимой в область D^+. Очевидно, эти условия являются также и достаточными.

2. Пусть имеется решение с парой $(\lambda(t), \mu(t))$, для которого $\mu(t) = r(t)$ — рациональная функция. Из вторых равенств (1.13), (1.14) следует, что это возможно тогда и только тогда,

когда определенные на Γ функции

$$\Phi^-(t) = g_{21}(t)/(r(t) - g_{22}(t)),$$
$$\Phi^+(t) = g_{21}(t)r(t)/(g_{11}(t)r(t) - \Delta(t))$$

мероморфно продолжимы в области D^- и D^+ соответственно.

3. Если имеется решение с парой $(\lambda(t), \mu(t))$, для которого $\lambda(t) = \lambda^+(t)$ — предельное значение функции, мероморфно продолжимой в область D^+, то из первого равенства (1.13) получим

$$\lambda^+(t) = g_{12}(t)\Phi^-(t) + g_{11}(t).$$

Пусть $g_{ij}(t) = g_{ij}^+(t)g_{ij}^-(t)$, $i,j = 1,2$, — факторизация на Γ элементов матрицы-функции (0.1). Тогда

$$\lambda^+(t) = g_{12}^+(t)(P[g_{11}/g_{12}^+](t) + r(t)), \quad \Phi^-(t) = (-Q[g_{11}/g_{12}^+](t) + r(t))/g_{12}^-(t),$$

$r(t)$ — рациональная функция. Поэтому из первого равенства (1.14) придем к условию мероморфной продолжимости функции

$$\Phi^+(t) = \frac{g_{22}(t)g_{12}^+(t)(P[g_{11}/g_{12}^+](t) + r(t)) - \Delta(t)}{g_{12}(t)g_{12}^+(t)(P[g_{11}/g_{12}^+](t) + r(t))}$$

в область D^+. Последнее будет выполнено, если это условие выполняется для функции

$$(g_{22}(t)g_{12}^+(t)(P[g_{11}/g_{12}^+](t) + r(t)) - \Delta(t))/g_{12}^-(t), \quad t \in \Gamma.$$

4. Пусть имеется решение с парой $(\lambda(t), \mu(t))$, для которого $\mu(t) = \mu^+(t)$ — предельное значение функции, мероморфно продолжимой в область D^+. Тогда из второго равенства (1.13) получим

$$\mu^+(t) = g_{21}(t)/\Phi^-(t) + g_{22}(t) \quad \text{или} \quad \mu^+(t)/g_{21}^+(t) = g_{21}^-(t)/\Phi^-(t) + g_{22}(t)/g_{21}^+(t), \quad t \in \Gamma.$$

Отсюда на Γ имеем

$$\mu^+(t) = g_{21}^+(t)(P[g_{22}/g_{21}^+](t) + r(t)), \quad \Phi^-(t) = g_{21}^-(t)/(-Q[g_{22}/g_{21}^+](t) + r(t)),$$

$r(t)$ — рациональная функция. Поэтому из второго равенства (1.14) придем к условию мероморфной продолжимости функции

$$\Phi^+(t) = \frac{g_{21}(t)g_{21}^+(t)(P[g_{22}/g_{21}^+](t) + r(t))}{g_{11}(t)g_{21}^+(t)(P[g_{22}/g_{21}^+](t) + r(t)) - \Delta(t)}$$

в область D^+. Последнее также будет выполнено, если это условие выполняется для функции

$$(g_{11}(t)g_{21}^+(t)(P[g_{22}/g_{21}^+](t) + r(t)) - \Delta(t))/g_{21}^-(t), \quad t \in \Gamma.$$

5. Пусть имеется решение с парой $(\lambda(t), \mu(t))$, для которого $\lambda(t) = \lambda^-(t)$ — предельное значение функции, мероморфно продолжимой в область D^-. Из первого равенства (1.14) получим

$$\Phi^+(t) = -\frac{\Delta(t)}{g_{12}(t)}\frac{1}{\lambda^-(t)} + \frac{g_{22}(t)}{g_{12}(t)} \quad \text{или} \quad \frac{g_{12}^+(t)}{\Delta^+(t)}\Phi^+(t) = -\frac{1}{\Delta^-(t)g_{12}^-(t)}\frac{1}{\lambda^-(t)} + \frac{g_{22}(t)}{\Delta^+(t)g_{12}^-(t)}.$$

Отсюда находим

$$\Phi^+(t) = \Delta^+(t)(P[g_{22}/\Delta^+g_{12}^-](t) + r(t))/g_{12}^+(t), \quad \lambda^-(t) = 1/\Delta^-(t)g_{12}^-(t)(Q[g_{22}/\Delta^+g_{12}^-](t) - r(t)),$$

где $r(t)$ — рациональная функция. Тогда из первого условия (1.13) придем к условию мероморфной продолжимости функции

$$\Phi^-(t) = \frac{1 - g_{11}(t)\Delta^-(t)g_{12}^-(t)(Q[g_{22}/\Delta^+ g_{12}^-](t) - r(t))}{g_{12}^+(t)\Delta^-(t)[g_{12}^-(t)]^2(Q[g_{22}/\Delta^+ g_{12}^-](t) - r(t))}$$

в область D^-, что равносильно такой продолжимости для функции

$$(1 - g_{11}(t)\Delta^-(t)g_{12}^-(t)(Q[g_{22}/\Delta^+ g_{12}^-](t) - r(t)))/g_{12}^+(t), \quad t \in \Gamma.$$

6. Пусть имеется решение с парой $(\lambda(t), \mu(t))$, для которого $\mu(t) = \mu^-(t)$ — предельное значение функции, мероморфно продолжимой в область D^-. Из второго равенства (1.14) получим

$$\frac{1}{\Phi^+(t)} = -\frac{\Delta(t)}{g_{21}(t)\Delta^+(t)} + \frac{g_{11}(t)}{g_{21}(t)}.$$

Откуда на Γ

$$\Phi^+(t)=g_{21}^+(t)/(\Delta^+(t)(P[g_{11}/(\Delta^+ g_{21}^-](t)+r(t))), \;\; \mu^-(t)=1/(g_{21}^-(t)\Delta^-(t)(Q[g_{11}/\Delta^+ g_{21}^-](t)-r(t))),$$

$r(t)$ — рациональная функция. Тогда из второго условия (1.13) приходим к требованию мероморфной продолжимости в область D^- функции

$$\Phi^-(t) = g_{21}(t)\Delta^-(t)g_{21}^-(t)(Q[g_{11}/\Delta^+ g_{21}^-](t)-r(t))/(1-g_{22}(t)\Delta^-(t)g_{21}^-(t)(Q[g_{11}/\Delta^+ g_{21}^-](t)-r(t))),$$

что равносильно такой продолжимости для функции

$$(1 - g_{22}(t)\Delta^-(t)g_{21}^-(t)(Q[g_{11}/\Delta^+ g_{21}^-](t) - r(t)))/g_{21}^+(t), \quad t \in \Gamma.$$

7. Предположим теперь, что у задачи (1.7) имеется решение $\Phi(z)$ с парой $(\lambda(t), \mu(t))$, определяющее подобную пару $(\lambda_1(t), \mu_1(t))$ такую, что $\lambda_1(t) = r(t)$ — рациональная функция. Согласно теореме 1 функция $\Phi(z)$ будет решением подобной задачи (1.15), (1.16). Тогда из первых равенств (1.13), (1.14), записанных для предельных значений на Γ решения подобной задачи, получим, что функции

$$\Phi^+(t) = g_{21}(t)/(g_{11}(t) - r(t)), \quad \Phi^-(t) = g_{21}(t)r(t)/(\Delta(t) - g_{22}(t)r(t)), \quad t \in \Gamma,$$

должны быть мероморфно продолжимыми в области D^+ и D^- соответственно.

8. Пусть $\Phi(z)$ будет решением подобной задачи (1.15), (1.16) с парой $(\lambda_1(t), \mu_1(t))$ такой, что $\mu_1(t) = r(t)$. Тогда из второго условия (1.13) и (1.14) для задачи (1.15) получим, что функции

$$\Phi^+(t) = (g_{22}(t) - r(t))/g_{12}(t), \quad \Phi^-(t) = (\Delta(t) - g_{11}(t)r(t))/(g_{12}(t)r(t)), \quad t \in \Gamma,$$

должны быть мероморфно продолжимыми в области D^+ и D^- соответственно.

9. Допустим, что $\Phi(z)$ будет решением подобной задачи (1.15), (1.16) с парой $(\lambda_1(t), \mu_1(t))$ такой, что $\lambda_1(t) = \lambda_1^+(t)$ — предельное значение функции мероморфно продолжимой в область D^+. Тогда из первого условия (1.14) для задачи (1.15), (1.16) получим

$$1/\Phi^-(t) = \Delta(t)/(g_{21}(t)\lambda_1^+(t)) - g_{22}(t)/g_{21}(t).$$

Откуда на Γ

$$\lambda_1^+(t) = \Delta^+(t)/(g_{21}^+(t)(P[g_{22}\Delta^-/g_{21}^+](t)+r(t))), \;\; \Phi^-(t) = \Delta^-(t)g_{21}^-(t)/(-Q[g_{22}\Delta^-/g_{21}^+](t)+r(t)),$$

$r(t)$ — рациональная функция. Поэтому из (1.7) вытекает, что функция

$$\Phi^+(t) = [g_{21}^+(t)]^2 g_{21}^-(t)(P[g_{22}\Delta^-/g_{21}^+](t) + r(t))/(g_{11}(t)g_{21}^+(t)(P[g_{22}\Delta^-/g_{21}^+](t) + r(t)) - \Delta^+(t))$$

должна быть мероморфно продолжимой в область D^+, что будет выполнено, если мероморфно продолжима в область D^+ функция

$$g_{21}^-(t)/(g_{11}(t)g_{21}^+(t)(P[g_{22}\Delta^-/g_{21}^+](t)+r(t))-\Delta^+(t)),\quad t\in\Gamma.$$

10. Пусть $\Phi(z)$ будет решением подобной задачи (1.15), (1.16) с парой $(\lambda_1(t),\mu_1(t))$ такой, что $\mu_1(t)=\mu_1^+(t)$ — предельное значение функции мероморфно продолжимой в область D^+. Тогда из второго условия (1.14) для задачи (1.15), (1.16) получим

$$\Delta(t)/(g_{12}(t)\mu_1^+(t))=\Phi^-(t)+g_{11}(t)g_{12}(t).$$

Откуда

$$\mu_1^+(t)=\Delta^+(t)/(g_{12}^+(t)(P[g_{11}\Delta^-/g_{12}^+](t)+r(t))),\ \ \Phi^-(t)=(-Q[g_{11}\Delta^-/g_{12}^+](t)+r(t))/(\Delta^-(t)g_{12}^-(t)),$$

$r(t)$ — рациональная функция. Поэтому из (1.7) вытекает, что функция

$$\Phi^+(t)=(g_{12}^+(t)g_{22}(t)(P[g_{11}\Delta^-/g_{12}^+](t)+r(t))-\Delta^+(t))/[g_{12}^+(t)]^2g_{12}^-(t)(P[g_{11}\Delta^-/g_{12}^+](t)+r(t))$$

должна быть мероморфно продолжимой в область D^+, что будет выполнено при такой продолжимости функции

$$(g_{12}^+(t)g_{22}(t)(P[g_{11}\Delta^-/g_{12}^+](t)+r(t))-\Delta^+(t))/g_{12}^-(t),\quad t\in\Gamma.$$

11. Предположим, что $\Phi(z)$ будет решением подобной задачи (1.15), (1.16) с парой $(\lambda_1(t),\mu_1(t))$ такой, что $\lambda_1(t)=\lambda_1^-(t)$ — предельное значение функции мероморфно продолжимой в область D^-. Тогда из первого условия (1.13) для задачи (1.15), (1.16) получим

$$1/\Phi^+(t)=-\lambda_1^-(t)/g_{21}(t)+g_{11}(t)/g_{21}(t).$$

Таким образом,

$$\lambda_1^-(t)=g_{21}^-(t)(Q[g_{11}/g_{21}^-](t)-r(t)),\quad \Phi^+(t)=g_{21}^+(t)/(P[g_{11}/g_{21}^-](t)+r(t)),$$

$r(t)$ — рациональная функция. Значит, согласно (1.7) выражение

$$\Phi^-(t)=g_{21}^+(t)[g_{21}^-(t)]^2(Q[g_{11}/g_{21}^-](t)-r(t))/(\Delta(t)-g_{22}(t)g_{21}^-(t)(Q[g_{11}/g_{21}^-](t)-r(t)))$$

должно быть мероморфно продолжимым в область D^-, что равносильно такой продолжимости для функции

$$g_{21}^+(t)/(\Delta(t)-g_{22}(t)g_{21}^-(t)(Q[g_{11}/g_{21}^-](t)-r(t))),\quad t\in\Gamma.$$

12. Пусть решение $\Phi(z)$ задачи (1.7) будет решением подобной задачи (1.15), (1.16) с парой $(\lambda_1(t),\mu_1(t))$ такой, что $\mu_1(t))=\mu_1^-(t)$ — предельное значение функции мероморфно продолжимой в область D^-. Тогда из второго условия (1.13) для подобной задачи на Γ приходим к равенству

$$\Phi^+(t)=-\mu_1^-(t)/g_{12}(t)+g_{22}(t)/g_{12}(t).$$

Поэтому

$$\mu_1^-(t)=g_{12}^-(t)(Q[g_{22}/g_{12}^-](t)-r(t)),\quad \Phi^+(t)=(P[g_{22}/g_{12}^-](t)+r(t))/g_{12}^+(t)$$

и из (1.7) получаем, что функция

$$\Phi^-(t)=(\Delta(t)-g_{11}(t)g_{12}^-(t)(Q[g_{22}/g_{12}^-](t)-r(t)))/g_{12}^+(t)[g_{12}^-(t)]^2(Q[g_{22}/g_{12}^-](t)-r(t)),$$

где $r(t)$ — рациональная функция, должна быть мероморфно продолжимой в область D^-, что равносильно такой продолжимости для функции

$$(\Delta(t)-g_{11}(t)g_{12}^-(t)(Q[g_{22}/g_{12}^-](t)-r(t)))/g_{12}^+(t),\quad t\in\Gamma.$$

Рассмотрим теперь случаи, когда решение $\Phi(z)$ задачи (1.7) будет решением задачи (1.15), (1.18), (1.19) с той же парой $(\lambda(t),\mu(t))$.

13. Предположим, что в представлениях (1.20), (1.22) $\omega(t) = r(t)$ — рациональная функция. Это возможно тогда и только тогда, когда функции

$$\Phi^+(t) = \frac{g_{12}(t)g_{21}(t) - g_{11}(t)g_{22}(t)r(t)}{g_{11}(t)g_{12}(t)(1-r(t))}, \quad \Phi^-(t) = -\frac{g_{11}(t)r(t)}{g_{12}(t)}, \quad t \in \Gamma,$$

будут мероморфно продолжимыми в области D^+ и D^- соответственно.

14. Пусть в представлениях (1.22) $\omega(t) = \omega^+(t)$ — предельное значение функции мероморфно продолжимой в область D^+. Тогда из второго представления (1.22) получим

$$\omega^+(t) = -r(t)g_{12}^+(t)/g_{11}^+(t), \quad \Phi^-(t) = r(t)g_{11}^-(t)/g_{12}^-(t), \quad t \in \Gamma,$$

$r(t)$ — рациональная функция, а из первого представления (1.22) следует, что функция

$$\Phi^+(t) = \frac{g_{12}^-(t)g_{21}(t) + g_{11}^-(t)g_{22}(t)r(t)}{g_{11}^-(t)g_{12}^-(t)(g_{11}^+(t) + g_{12}^+(t)r(t))}$$

должна быть мероморфно продолжима в область D^+, что равносильно такой продолжимости для функции

$$\frac{g_{12}^-(t)g_{21}(t) + g_{11}^-(t)g_{22}(t)r(t)}{g_{11}^-(t)g_{12}^-(t)}.$$

15. Пусть в представлениях (1.22) $\omega(t) = \omega^-(t)$ — предельное значение функции, мероморфно продолжимой в область D^-. Тогда из второго представления (1.22) следует, что отношение

$$g_{11}(t)/g_{12}(t), \quad t \in \Gamma,$$

должно быть мероморфно продолжимо в область D^-. Первое представление (1.22) перепишем в виде

$$\Phi^+(t) = -\frac{\Delta(t)}{g_{11}(t)g_{12}(t)}\frac{1}{\omega_1^-(t)} + \frac{g_{22}(t)}{g_{12}(t)}, \quad \omega_1^-(t) = 1 - \omega^-(t).$$

Откуда на Γ

$$\Phi^+(t) = \frac{\Delta^+(t)}{g_{11}^+(t)g_{12}^+(t)}\left(P\left[\frac{g_{11}^+g_{22}}{g_{12}^-\Delta^+}\right](t) + r(t)\right),$$

$$\omega_1^-(t) = 1/g_{11}^-(t)g_{12}^-(t)\Delta^-(t)\left(Q\left[\frac{g_{11}^+g_{22}}{g_{12}^-\Delta^+}\right](t) - r(t)\right),$$

$r(t)$ — рациональная функция, $\Phi^-(t) = (\omega_1^-(t) - 1)g_{11}(t)/g_{12}(t)$.

16. Предположим, что в представлениях (1.20), (1.23) $\delta(t) = r(t)$ — рациональная функция. Это возможно тогда и только тогда, когда функции

$$\Phi^+(t) = \frac{g_{21}(t)g_{22}(t)(1-r(t))}{g_{11}(t)g_{22}(t) - g_{12}(t)g_{21}(t)r(t)}, \quad \Phi^-(t) = -\frac{g_{21}(t)r(t)}{g_{22}(t)}$$

будут мероморфно продолжимы в области D^+ и D^- соответственно.

17. Пусть в представлениях (1.23) $\delta(t) = \delta^+(t)$ — предельное значение функции мероморфно продолжимой в область D^+. Тогда из второго представления (1.23) получим

$$\delta^+(t) = -r(t)g_{22}^+(t)/g_{21}^+(t), \quad \Phi^-(t) = r(t)g_{21}^-(t)/g_{22}^-(t), \quad t \in \Gamma,$$

$r(t)$ — рациональная функция, а из первого представления (1.23) следует, что функция

$$\Phi^+(t) = \frac{g_{21}^-(t)g_{22}^-(t)(g_{21}^+(t) + g_{22}^+(t)r(t))}{g_{11}(t)g_{22}^-(t) + g_{12}(t)g_{21}^-(t)r(t)}$$

должна быть мероморфно продолжимой в область D^+, что равносильно такой продолжимости для функции

$$\frac{g_{21}^-(t)g_{22}^-(t)}{g_{11}(t)g_{22}^-(t)+g_{12}(t)g_{21}^-(t)r(t)}.$$

18. Пусть в представлениях (1.23) $\delta(t)=\delta^-(t)$ — предельное значение функции мероморфно продолжимой в область D^-. Тогда из второго представления (1.23) следует, что отношение

$$g_{21}(t)/g_{22}(t), \quad t\in\Gamma,$$

должно быть мероморфно продолжимым в область D^-. Полагая $\delta_1^-(t)=1-\delta^-(t)$, из первого представления (1.23) на Γ получим

$$g_{21}(t)g_{22}(t)/\Phi^+(t)=\Delta(t)/\delta_1^-(t)+g_{12}(t)g_{21}(t),$$

$$\Phi^+(t)=g_{21}^+(t)g_{22}^+(t)/(\Delta^+(t)(P[g_{12}g_{21}^+/g_{22}^-\Delta^+](t)+r(t))),$$

$$\delta_1^-(t)=1/(g_{21}^-(t)g_{22}^-(t)\Delta^-(t)(-Q[g_{12}g_{21}^+/g_{22}^-\Delta^+](t)+r(t))), \quad \Phi^-(t)=g_{21}(t)(\delta_1^-(t)-1)/g_{22}(t),$$

$r(t)$ — рациональная функция.

Выражая в числителе первого представления (1.22) ω через δ и используя первое соотношение (1.21), согласно (1.13) получим

$$\Phi^+(t)=g_{21}(t)\gamma(t)/g_{11}(t), \quad \Phi^-(t)=g_{11}(t)g_{21}(t)(\gamma(t)-1)/(\Delta(t)-g_{12}(t)g_{21}(t)(\gamma(t)-1)), \quad t\in\Gamma,$$
$$\gamma(t)=(\delta(t)-1)/(\omega(t)-1).$$

Если в знаменателе первого представления (1.22) выразить ω через δ и ввести обозначение $(g_{12}(t)g_{21}(t)-g_{11}(t)g_{22}(t)\omega(t))/(g_{11}(t)g_{22}(t)-g_{12}(t)g_{21}(t)\delta(t))=\sigma(t)$, на Γ придем к представлению

$$\Phi^+(t)=g_{22}(t)\sigma(t)/g_{12}(t), \quad \Phi^-(t)=(\Delta(t)-g_{11}(t)g_{22}(t)(1-\sigma(t)))/(g_{12}(t)g_{22}(t)(1-\sigma(t))).$$

Используя полученные представления, можно указать другие условия на элементы матрицы-функции (0.1), аналогичные полученным в случаях 13–18, при выполнении которых частное решение задач (1.7) и (0.3) оказывается известным.

Литература

[1] Векуа Н.П. *Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи* (Наука, М.,1970).

[2] Литвинчук Г.С., Спитковский И.М. *Факторизация матриц-функций*, ч. I, ч. II, ВИНИТИ, №2410-84.

[3] Чеботарев Г.Н. *Частные индексы краевой задачи Римана с треугольной матрицей второго порядка*, УМН **11** (3), 199–202 (1956).

[4] Адуков В.М. *Факторизация Винера–Хопфа мероморфных матриц-функций*, Алгебра и анализ, **4** (1), 54–74 (1992).

[5] Спитковский И.М., Ташбаев А.М. *К вопросу об эффективной факторизации матриц-функций*, Изв. вузов. Матем., №4, 69–76 (1989).

[6] Ehrhardt T., Speck F.-O. *Transformation techniques towards the factorization of non-rational* 2×2 *matrix functions*, Linear Algebra Appl. **353** (1–3), 53–90 (2002).

[7] Киясов С.Н. *Дробно-линейная краевая задача Римана и ее приложение к факторизации некоторых классов гёльдеровских матриц-функций второго порядка*, Изв. вузов. Матем., №9, 23–29 (1995).

[8] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи* (Наука, М., 1977).

С.Н. Киясов

доцент, кафедра дифференциальных уравнений,

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия, `e-mail:` Kiyasov@mi.ru

S.N. Kiyasov

Some classes of linear conjugation problems for a two-dimensional vector resolvable in a closed form

Abstract. We consider the structure of the set of piecewise-meromorphic solutions to the linear conjugation problem for a two-dimensional vector and study its connection with the fractional linear conjugation problem. We prove that if there exists a piecewise-meromorphic solution to any of these problems then one can construct a canonical system of solutions to the linear conjugation problem and define classes of problems solvable in a closed form.

Keywords: matrix function, linear conjugation problem, fractional linear conjugation problem.

S.N. Kiyasov

Associate Professor, Chair of Differential Equations,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Kiyasov@mi.ru