И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2003 МАТЕМАТИКА № 11 (498)

УДК 514.752

В.В. СИДОРЯКИНА

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ARG-ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ УСЛОВИИ ОБОБЩЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ

Обьектом исследования являются поверхности F положительной гауссовой кривизны с краем ∂F трехмерного евклидова пространства E^3, имеющие связность $(m+1)$, $m \geq 0$. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ поверхность F, располагаясь выпуклостью вниз, однозначно проектируется на плоскость Oxy в область D и задается уравнением $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, $f \in C^{3,\alpha}(\overline{D})$, $0 < \alpha < 1$, $\overline{D} = D + \partial D$, где ∂D — граница области D, $\partial D \in C^{2,\alpha}$. При сделанных предположениях будем говорить, что поверхность F удовлетворяет условиям регулярности.

Рассмотрим бесконечно малые ARG-деформации поверхности F: $\overline{r} = \overline{r}(x,y)$, $(x,y) \in D$, с заданным коэффициентом рекуррентности λ, характеризующиеся следующими свойствами:

1) сферический (или гауссов) образ поверхности поточечно стационарен, т. е. вариация $\delta\overline{n}$ единичного вектора нормали $\overline{n}$ поверхности F равна нулю;

2) вариация $\delta(d\sigma)$ элемента площади $d\sigma$ в любой точке поверхности удовлетворяет равенству

$$\delta(d\sigma) = 2\lambda H(\overline{U},\overline{n})d\sigma + g d\sigma, \tag{1}$$

где $\overline{U}$ — поле смещений точек поверхности при ее деформации, H — средняя кривизна поверхности F, g — заданная функция класса $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, λ — заданное число.

Из [1] известно, что ARG-деформации описываются уравнением

$$[\overline{r}_y, \overline{U}_x] + (2\lambda H(\overline{U},\overline{n}) + g)[\overline{r}_x, \overline{r}_y] = [\overline{r}_x, \overline{U}_y] \quad \text{на} \quad F. \tag{2}$$

Согласно [2] при описываемых выше условиях поверхность F допускает бесконечно малые ARG-деформации в (1) при $\lambda = 0$, $g = 0$ с большим произволом. Целью данной работы является выделение класса внешних связей, налагаемых на поведение поверхности при ее деформации, когда поверхность допускает единственную бесконечно малую деформацию (либо множество бесконечно малых деформаций, зависящих от конечного числа параметров), совместимую с заданной внешней связью.

Внешнюю связь определим как условие обобщенного скольжения, записываемое в виде

$$(\overline{U}, \overline{l}) = h \quad \text{на} \quad \partial F, \tag{3}$$

где $\overline{l}$ — заданное векторное поле, $|\overline{l}| \neq 0$, h — заданная функция вдоль ∂F класса $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Описание внешних связей в отношении поведения поверхности F при ARG-деформации проводится путем рассмотрения семейства внешних связей с заданным векторным полем вида $\overline{l} = \overline{\nu} + \gamma\overline{n}$, $\overline{l} \in C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, где $\overline{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали области D в плоскости Oxy, γ — заданная функция класса $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Как и в [3], внешнюю связь (3) будем называть корректной в отношении бесконечно малых ARG-деформаций с заданным коэффициентом рекуррентности λ в классе регулярности $C^{1,\alpha}$, если поверхность F всегда допускает единственную бесконечно малую ARG-деформацию с полем смещения $\overline{U}$, совместимую с внешней связью (3) для любой функции h, при этом малому изменению функции h в классе $C^{1,\alpha}$ соответствует малое изменение поля $\overline{U}$ в том же классе регулярности.

В этой работе будут даны некоторые критерии корректности внешней связи (3).

В [1], [4] было показано, что при $\overline{U} = \{\xi, \eta, \zeta\}$ относительно ξ, η, ζ уравнение (2) записывается в виде

$$\begin{aligned} &(\zeta_x + \eta_x f_y - \eta_y f_x)\sqrt{1+f_x^2+f_y^2} = 2\lambda H(\xi f_x + \eta f_y - \zeta) f_x - g f_x, \\ &(\zeta_y - \xi_x f_y + \xi_y f_x)\sqrt{1+f_x+f_y} + 2\lambda H(\xi f_x + \eta f_y - \zeta) f_y - g f_y, \quad \text{в} \ \ D, \\ &(\xi_x + \eta_y)\sqrt{1+f_x+f_y} = 2\lambda H(\xi f_x + \eta f_y - \zeta) - g \end{aligned} \tag{4}$$

а условие $(\overline{U}, \overline{l}) = h$ имеет вид

$$\xi l^1 + \eta l^2 + \zeta l^3 = h \ \ \text{на} \ \ \partial D, \tag{5}$$

где $\overline{l} = \{l^1, l^2, l^3\}$.

Введя функцию $\omega = \zeta - p\xi - q\eta$, задачу (4), (5) приведем к виду

$$\begin{gathered} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right) + \lambda b\omega = g \ \ \text{в} \ \ D, \\ a\frac{\partial \omega}{\partial \overline{\tau}} - \frac{\gamma\omega}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = h \ \ \text{на} \ \ \partial D, \end{gathered} \tag{6}$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, $p = f_x$, $q = f_y$, $b = 2H(1+p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}}$, $a_{11} = \frac{t}{rt-s^2}$, $a_{12} = a_{21} = \frac{-s}{rt-s^2}$, $a_{22} = \frac{r}{rt-s^2}$, $r = f_{xx}$, $s = f_{xy}$, $t = f_{yy}$, $a = \Big[\sum\limits_{i=1}^{2}(a_{i1}\alpha + a_{i2}\beta)\Big]^{\frac{1}{2}}$, $a > 0$, $\overline{\nu} = \{\alpha, \beta\}$, $\overline{\tau} = \{\frac{1}{a}(a_{11}\alpha + a_{12}\beta); \frac{1}{a}(a_{21}\alpha + a_{22}\beta)\}$ — конормаль в плоскости Oxy вдоль границы ∂D области D уравнения (2). При этом по известной функции $\omega \in C^{2,\alpha}(\overline{D})$, $0 < \alpha < 1$, поле $\overline{U}$ восстанавливается по формулам

$$\xi = \frac{t\omega_x - s\omega_y}{rt-s^2}, \quad \eta = \frac{s\omega_x - r\omega_y}{rt-s^2}, \quad \zeta = \omega + \frac{sq-tp}{rt-s^2}\omega_x + \frac{sp-rq}{rt-s^2}\omega_y. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть $(m+1)$-связная поверхность F положительной гауссовой кривизны, $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \mathrm{const}$, удовлетворяющая условиям регулярности, подвергнута бесконечно малым ARG-деформациям с заданным коэффициентом рекуррентности $\lambda < 0$, и на краю ∂F подчинена внешней связи обобщенного скольжения (3). Тогда если $\overline{l} = \overline{\nu} + \gamma\overline{n}$, γ — заданная функция класса $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$; $\gamma \leq 0$, то внешняя связь (3) в отношении бесконечно малых ARG-деформаций является корректной в классе $C^{1,\alpha}(\overline{D})$, $\overline{D} = D + \partial D$. Именно, если $\overline{U}_i$ $(i = 1, 2)$ суть поля смещений поверхности F, удовлетворяющие условиям обобщенного скольжения $(\overline{U}_i, \overline{l}) = h_i$, где h_i — заданная функция класса $C^{1,\alpha}(\partial D)$, то имеет место неравенство*

$$\|\overline{U}_1 - \overline{U}_2\|_{C^{1,\alpha}} \leq C\|h_1 - h_2\|_{C^{1,\alpha}}, \tag{8}$$

где $C = \mathrm{const}$.

Доказательство. Задачу (6) запишем в операторном виде

$$\begin{aligned} L\omega &= g \ \ \text{в} \ \ D, \\ B\omega &= h \ \ \text{на} \ \ \partial D, \end{aligned} \tag{9}$$

где $L\omega = \sum\limits_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}) + \lambda b\omega$, $B\omega = a\frac{\partial \omega}{\partial \overline{\tau}} - \frac{\gamma\omega}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$.

Для линейного дифференциального оператора L выполнены условия

1. $a_{11} > 0$;
2. $\left|\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right| = \frac{1}{rt-s^2} \geq a_0 > 0$, $a_0 = \mathrm{const}$;
3. $a_{12} = a_{21}$.

В силу условий 1–3 оператор L является дифференциальным оператором эллиптического типа. Тогда согласно [5] для задачи (9) с коэффициентами $a_{ij} \in C^{1,\alpha}(\overline{D})$, $b \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ и функциями $\gamma \in C^{1,\alpha}(\partial D)$, $\overline{\tau} \in C^{1,\alpha}(\partial D)$, $g \in C^{0,\alpha}(\overline{D})$, $h \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ имеет место теорема существования и единственности. Таким образом, для заданных функций g и h задача (9) имеет единственное решение $\omega \in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$; при этом справедлива оценка

$$\|\omega\|_{C^{2,\alpha}(\overline{D})} \leq C(\|g\|_{C^{0,\alpha}(\overline{D})} + \|h\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)}), \tag{10}$$

где C — константа, не зависящая от функции ω, а определяемая лишь ∂D и коэффициентами операторов L и B. В дальнейшем будут использованы различные постоянные, не влияющие на ход доказательства, и потому всегда обозначенные через С.

Покажем, что решение задачи (9) непрерывно изменяется при непрерывном изменении величины h из правой части краевого условия. Пусть при непрерывном изменении h величина $h = h_1$ преобразуется в величину h_2. Обозначив решение задачи (9) при $h = h_1$ через ω_1, а при $h = h_2$ — через ω_2, получим

$$\begin{aligned} &L\omega_1 = g \quad \text{в} \;\; D, \qquad && L\omega_2 = g \quad \text{в} \;\; D, \\ &B\omega_1 = h_1 \quad \text{на} \;\; \partial D; && B\omega_2 = h_2 \quad \text{на} \;\; \partial D. \end{aligned} \tag{11}$$

Тогда из (11) получаем

$$\begin{aligned} &L(\omega_1 - \omega_2) = 0 \quad \text{в} \;\; D, \\ &B(\omega_1 - \omega_2) = h_1 - h_2 \quad \text{на} \;\; \partial D. \end{aligned} \tag{12}$$

В силу априорной оценки Шаудера (10) для задачи (12) имеем

$$\|\omega_1 - \omega_2\|_{C^{2,\alpha}(\overline{D})} \leq C\|h_1 - h_2\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)}. \tag{13}$$

Оценка (13) будет использована для доказательства справедливости неравенства (8). Имеем

$$\|\overline{U}_1 - \overline{U}_2\|_{C^{2,\alpha}} \leq C(\|\xi_1 - \xi_2\|_{C^{1,\alpha}} + \|\eta_1 - \eta_2\|_{C^{1,\alpha}} + \|\zeta_1 - \zeta_2\|_{C^{1,\alpha}}). \tag{14}$$

Из формул (7) следует

$$\begin{aligned} &\|\xi_1 - \xi_2\|_{C^{1,\alpha}} \leq C(\|\omega_{1x} - \omega_{2x}\|_{C^{1,\alpha}} + \|\omega_{1y} - \omega_{2y}\|_{C^{1,\alpha}}) \leq C\|\omega_1 - \omega_2\|_{C^{2,\alpha}}, \\ &\|\eta_1 - \eta_2\|_{C^{1,\alpha}} \leq C(\|\omega_{1x} - \omega_{2x}\|_{C^{1,\alpha}} + \|\omega_{1y} - \omega_{2y}\|_{C^{1,\alpha}}) \leq C\|\omega_1 - \omega_2\|_{C^{2,\alpha}}, \\ &\|\zeta_1 - \zeta_2\|_{C^{1,\alpha}} \leq C(\|\omega_{1x} - \omega_{2x}\|_{C^{1,\alpha}} + \|\omega_{1y} + \omega_{2y}\|_{C^{1,\alpha}} + \|\omega_1 - \omega_2\|_{C^{1,\alpha}}) \leq \\ &\qquad\qquad \leq C\|\omega_1 - \omega_2\|_{C^{2,\alpha}}. \end{aligned}$$

Используя (13), неравенство (14) преобразуем к виду

$$\|\overline{U}_1 - \overline{U}_2\|_{C^{1,\alpha}} \leq C\|\omega_1 - \omega_2\|_{C^{2,\alpha}} \leq C\|h_1 - h_2\|_{C^{1,\alpha}}.$$

Таким образом, показано, что внешняя связь (3) относительно бесконечно малых ARG-деформаций при $\lambda < 0$ и $\gamma \leq 0$ является корректной связью. $\square$

Изучим поведение поверхности при ARG-деформации и налагаемом условии обобщенного скольжения вдоль края, освободившись от требования $\gamma \leq 0$. С этой целью рассмотрим семейство внешних связей, каждое из которых порождено векторным полем из семейства векторных полей $\overline{l}(\mu) = \overline{\nu} + \mu\gamma_0\overline{n}$, где γ_0 — заданная фиксированная функция класса $C^{1,\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$, $\gamma_0 > 0$, μ — числовой параметр, $\mu \in \Re$. Тогда если параметр μ и функция γ_0 выбраны так, что $\mu\gamma_0 \leq 0$, то для задачи (6) с $\gamma = \mu\gamma_0$ будет справедлив результат теоремы 1. Исследуем случай $\mu\gamma_0 > 0$.

Теорема 2. *Пусть F — поверхность положительной гауссовой кривизны, $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \mathrm{const}$, удовлетворяющая условиям регулярности, подвергнута бесконечно малым ARG-деформациям с заданным коэффициентом рекуррентности $\lambda < 0$. Пусть, далее, вдоль края ∂F задано семейство векторных полей $\overline{l}(\mu) = \overline{\nu} + \mu\gamma_0\overline{n}$, где γ_0 — заданная фиксированная функция класса $C^{1,\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$, μ — числовой параметр, $\mu \in \Re$, и поверхность F на краю ∂F подчинена условию обобщенного скольжения $(\overline{U}, \overline{l}(\mu)) = h$. Тогда если $\gamma_0 > 0$, то существует счетное множество значений $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_k \leq \cdots$, $\mu_k \to \infty$ при $k \to \infty$, таких, что при заданном $\mu \neq \mu_k$ поверхность F допускает единственную бесконечно малую ARG-деформацию класса $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, для любой функции h. При $\mu = \mu_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ однородная задача (2), (3) $(g \equiv 0,\ h \equiv 0)$ при $\overline{l} = \overline{l}(\mu_k)$ допускает конечное число линейно независимых бесконечно малых ARG-деформаций в классе $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, а неоднородная задача разрешима при выполнении конечного числа условий разрешимости, налагаемых на функции g и h.*

Исследуем разрешимость задачи (6) при $\lambda < 0$, $\gamma = \mu\gamma_0 > 0$. С этой целью запишем ее в виде

$$\begin{aligned} &L\omega = g \ \text{ в } \ D, \\ &B\omega = h^* \ \text{ на } \ \partial D, \end{aligned} \tag{15}$$

где $L\omega = \sum\limits_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial\omega}{\partial x_j}) + \lambda b\omega$, $B\omega = a\frac{\partial\omega}{\partial\overline{\tau}}$, $h^* = h + \frac{\mu\gamma_0\omega}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$. Задача (15) относительно искомой функции ω является самосопряженной в силу самосопряженности оператора L и вида краевого условия. Она эквивалентна интегральному уравнению

$$\omega(x,y) = \iint\limits_D G(x,y,\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi\, d\eta + \oint\limits_{\partial D} G(x,y,\varphi(\sigma),\psi(\sigma))\, h^*(\sigma)d\sigma, \tag{16}$$

где G — функция Грина задачи (15), $d\sigma$ — элемент длины дуги ∂D, переменные x, y принимают все значения из замкнутой области $\overline{D}$, $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $s \in [s_1, s_2]$ — уравнение границы ∂D. Преобразуем уравнение (16), используя явный вид функции h^*:

$$\omega(x,y) - \mu\oint\limits_{\partial D} G(x,y,\varphi(\sigma),\psi(\sigma))\chi(\delta)\omega(\sigma)d\sigma = g^*(x,y), \tag{17}$$

где $(x,y) \in \overline{D}$; $\omega(\sigma) \equiv \omega(\varphi(\sigma),\psi(\sigma))$; $g^*(x,y) = \iint\limits_D G(x,y,\xi,\eta)\, g(\xi,\eta)d\xi\, d\eta + \oint\limits_{\partial D} G(x,y,\varphi(\sigma),\psi(\sigma))\, h(\sigma)d\sigma$, $g^*(x,y)$ — известная функция в $\overline{D}$; $\chi(\sigma) = \frac{\gamma_0(\sigma)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $p = p(\varphi(\sigma),\psi(\sigma))$, $q = q(\varphi(\sigma),\psi(\sigma))$.

Однородное интегральное уравнение (17) эквивалентно краевой задаче

$$\begin{gathered} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right) + \lambda b\omega = 0 \ \text{ в } \ D; \\ a\frac{\partial\omega}{\partial\overline{\tau}} = \mu\chi\omega \ \text{ на } \ \partial D. \end{gathered} \tag{18}$$

Функцию Грина на контуре ∂D запишем в виде

$$G(s,\sigma) \equiv G(\varphi(s),\psi(s),\varphi(\sigma)\psi(\sigma)).$$

Тогда, переходя в уравнении (17) на контур ∂D, получим интегральное уравнение относительно искомой функции $\omega(s)$

$$\omega(s) - \mu\oint\limits_{\partial D} K(s,\sigma)\omega(\sigma)d\sigma = g^*(s), \tag{19}$$

где $K(s,\sigma) = G(s,\sigma)\chi(\sigma)$, $g^*(s)$ — известная функция на ∂D.

Нахождение функции $\omega(x,y)$ как решения уравнения (18) в области D по заданному значению $\omega(s) \equiv \omega_0(s)$ на границе ∂D требует решения первой краевой задачи

$$\begin{gathered} L\omega = g \ \text{ в } \ D, \\ \omega(s) \equiv \omega_0(s) \ \text{ на } \ \partial D. \end{gathered} \tag{20}$$

В силу условия $\lambda < 0$ задача Дирихле (20) всегда имеет единственное решение. Тогда интегральное уравнение (19) эквивалентно уравнению (16), и потому эквивалентно задаче (4). Изучим разрешимость уравнения (19).

Известно [5], что для самосопряженной задачи функция Грина является симметрической, а значит, функция $G(s,\sigma)$ является симметрической функцией.

Ядро $K(s,\sigma)$ уравнения (19) не является симметрическим, но оно симметризуемо. Действительно, умножим обе части уравнения (19) на $\sqrt{\chi(s)}$, где $\chi(s) > 0$, и введем новую искомую функцию $\widetilde{\omega}(s) = \sqrt{\chi(s)}\omega(s)$. Тогда уравнение (19) приводится к линейному интегральному уравнению вида

$$\widetilde{\omega}(s) - \mu \oint \widetilde{K}(s,\sigma)\widetilde{\omega}(\sigma)d\sigma = \widetilde{g}^*(s), \tag{21}$$

где ядро $\widetilde{K}(s,\sigma) = \sqrt{\chi(s)\chi(\sigma)}G(s,\sigma)$ является симметрическим ядром, $\widetilde{g}^*(s) = \sqrt{\chi(s)}g^*(s)$.

В силу того что его ядро $\widetilde{K}(s,\sigma)$ при $\sigma = s$ имеет логарифмическую особенность, к уравнению (21) применима общая теория интегральных уравнений. Известно [6], что интегральное уравнение с действительным симметрическим ядром имеет по крайней мере одно конечное собственное значение. Покажем, что существует счетное множество собственных значений $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ уравнения (21).

Занумеруем собственные значения μ_k $(k = 1, 2, \dots)$ так, чтобы их номера возрастали по мере увеличения соответствующих значений μ_k. Так как заданная функция γ_0 является положительной, то при $\mu \le 0$ задача (6) имеет единственное решение в силу теоремы 1. Поэтому собственные значения μ_k $(k = 1, 2, \dots)$ уравнения (21) будут положительны, т. е. можно считать, что $0 < \mu_1 \le \mu_2 \le \dots \le \mu_k \le \cdots$, причем $\mu_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Убедимся, что для уравнения (21) существует счетное множество собственных значений.

Прежде всего, как отмечено выше, собственные значения $\mu = \mu_k$ $(k = 1, 2, \dots)$ уравнения (21) положительны. Это означает, что $\widetilde{K}(s,\sigma)$ будет положительно определено.

Покажем, что оно полное, т. е. уравнение

$$Af \equiv \oint_{\partial D} \widetilde{K}(s,\sigma)f(\sigma)d\sigma = 0, \tag{22}$$

где $f(s)$ — искомая функция, имеет только нулевое решение. Пусть $f(s)$ — решение уравнения $Af = 0$. Обозначим

$$z(x,y) = \oint_{\partial D} G(x,y,\varphi(\sigma),\psi(\sigma))\sqrt{\chi(\sigma)}f(\sigma)d\sigma, \tag{23}$$

где $(x,y) \in \overline{D}$. Тогда $z(x,y)$ есть решение задачи

$$\begin{gathered} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right) + \lambda b z = 0 \ \text{ в } \ D, \\ \frac{\partial z}{\partial \overline{\tau}} = \sqrt{\chi(s)}f(s) \ \text{ на } \ \partial D. \end{gathered} \tag{24}$$

Перейдем в уравнении (23) на контур ∂D. Получим

$$z(s) = \oint\limits_{\partial D} G(s,\sigma)\sqrt{\chi(\sigma)}f(\sigma)d\sigma. \tag{25}$$

Умножим выражение (25) на $\sqrt{\chi(s)}$. Имеем

$$\sqrt{\chi(s)}z(s) = \oint\limits_{\partial D} G(s,\sigma)\sqrt{\chi(s)\chi(\sigma)}f(\sigma)d\sigma. \tag{26}$$

Так как в наших обозначениях $\widetilde{K}(s,\sigma) = \sqrt{\chi(s)\chi(\sigma)}G(s,\sigma)$, где $\widetilde{K}(s,\sigma)$ — ядро уравнения (21), то уравнение (26) можно записать в виде

$$\sqrt{\chi(s)}z(s) = \oint\limits_{\partial D} \widetilde{K}(s,\sigma)f(\sigma)d\sigma. \tag{27}$$

Функция $f(s)$ есть решение уравнения $Af = 0$, т. е.

$$\oint\limits_{\partial D} \widetilde{K}(s,\sigma)f(\sigma)d\sigma = 0. \tag{28}$$

Тогда из (27) следует, что $\sqrt{\chi(s)}z(s) = 0$, и потому $z(s) = 0$ на границе ∂D. Но тогда $z(x,y)$ в области D находится как решение задачи Дирихле

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right) + \lambda bz = 0 \ \text{ в } \ D,$$
$$z = 0 \ \text{ на } \ \partial D.$$

Так как $\lambda b < 0$, то задача (27) имеет единственное решение $z(z,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \overline{D}$. Тогда $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \equiv 0$ в $\overline{D}$, и потому $\frac{\partial z}{\partial \overline{\tau}} = 0$ на ∂D. В силу краевого условия задачи (24) имеем $\sqrt{\chi(s)}f(s) = 0$ на ∂D, т. е. $f(s) \equiv 0$ на ∂D. Мы показали, что уравнение (22) имеет только нулевое решение, а значит, ядро $\widetilde{K}(s,\sigma)$ полное. Отсюда следует, что система собственных функций ядра бесконечна.Таким образом, установлено, что существует счетное множество собственных значений уравнения (21), причем $\mu_k > 0$ и $\mu_k \to \infty$. $\square$

Следствие. Векторное поле $\overline{l} \equiv \overline{n}$ есть предельное для всех векторных полей $\overline{l}(\mu_k) = \overline{\gamma} + \mu_k\gamma_0\overline{n}$, $\mu_k\gamma_0 > 0$, при $k \to \infty$.

Замечание. В теоремах 1, 2 исключен случай, когда коэффициент рекуррентности $\lambda = 0$. Он сводится к исследованию бесконечно малых AG-деформаций поверхности F.

Теорема 3. *Пусть F — поверхность положительной гауссовой кривизны, $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, удовлетворяющая условиям регулярности, — подвергнута бесконечно малым AG-деформациям. Пусть вдоль края ∂F задано семейство векторных полей $\overline{l}(\mu) = \overline{\gamma} + \mu\gamma_0\overline{n}$, где γ_0 — заданная функция класса $C^{1,\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$, и поверхность F на краю ∂F подчинена условию обобщенного скольжения $(\overline{U}, \overline{l}(\mu)) = h$. Тогда если $\gamma_0 > 0$, то существует счетное множество значений $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_k \leq \cdots$, $\mu_k \to +\infty$ при $k \to \infty$, таких, что при заданном $\mu \neq \mu_k$ поверхность F допускает единственную бесконечно малую AG-деформацию класса $C^{1,\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$, при условии обобщенного скольжения для любой функции h. При $\mu = \mu_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ однородная задача (2), (3) при $\overline{l} = \overline{l}(\mu_k)$ допускает конечное число линейно независимых бесконечно малых AG-деформаций в классе $C^{1,\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$, а неоднородная задача разрешима при выполнении конечного числа условий разрешимости, налагаемых на функции g и h.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2. Существенным отличием в доказательстве будет выбор задачи (15), краевое условие в которой записывается в виде $B_1\omega = a\frac{\partial\omega}{\partial\tau} + \frac{\gamma_0\omega}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = h_1^*$, где $h_1^* = h + \frac{\widetilde{\mu}\gamma_0\omega}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$; $\widetilde{\mu} = 1 + \mu$.

Замечание. Отметим, что при $\mu = 0$ внешняя связь $(\overline{U}, \overline{l}(\mu)) = h$ в теории AG-деформаций не является корректной, в то время как в теории ARG-деформаций с коэффициентом рекуррентности $\lambda \neq 0$ внешняя связь всегда является корректной при $\mu = 0$.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В.Т. Фоменко за постановку задачи и научное руководство данной работой.

Литература

1. Сидорякина В. В. *Уравнения бесконечно малых ARG-деформаций поверхностей положительной кривизны* // Сб. тр. международн. научн. конф. “Математические модели физических процессов и их свойства”. – Таганрог: Таганрогск. пед. ин-т, 2002. – С. 132–136.
2. Fomenko V. T. *ARG-deformations of a hypersurface with a boundary in a Riemannian space* // Tensor. – 1993. – V. 54. – P. 28–34.
3. Векуа И. Н. *Обобщенные аналитические функции.* – М.: Наука, 1988. – 224 с.
4. Сидорякина В. В. *Бесконечно малые ARG-деформации поверхностей положительной кривизны при втулочной связи обобщенного скольжения* // Сб. тр. международн. научн. конф. “Математические модели физических процессов и их свойства”. – Таганрог: Таганрогск. пед. ин-т, 2002. – С. 136–140.
5. Миранда К. *Уравнения с частными производными эллиптического типа.* – М.: Ин. лит., 1957. – С. 10–28.
6. Петровский И. Г. *Лекции по теории интегральных уравнений.* – М.: Наука, 1965. – 127 с.

Таганрогский государственный
педагогический институт

Поступила
05.02.2003