И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

2000 МАТЕМАТИКА № 7 (458)

УДК 517.987

В.И. ЧИЛИН, И.Г. ГАНИЕВ

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СЖАТИЙ В РЕШЕТКЕ $L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ БАНАХА–КАНТОРОВИЧА

В работе получен аналог известной эргодической теоремы для положительных сжатий решеток $L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ Банаха–Канторовича, построенных по мере $\widehat{\mu}$ со значениями в кольце измеримых функций.

Пусть (Ω,Σ,λ) – пространство с конечной мерой, $L_0(\Omega)$ — кольцо измеримых функций на Ω (равные λ-почти всюду функции отождествляются), $\nabla(\Omega)$ — булева алгебра всех идемпотентов в $L_0(\Omega)$, $\widehat{\nabla}$ — произвольная полная булева алгебра, содержащая $\nabla(\Omega)$ как правильную подалгебру, $\widehat{\mu}:\widehat{\nabla}\to L_0(\Omega)$ — строго положительная $L_0(\Omega)$-значная мера на $\widehat{\nabla}$ [1], причем $\widehat{\mu}(g\widehat{e})=g\widehat{\mu}(\widehat{e})$ для всех $\widehat{e}\in\widehat{\nabla}$, $g\in\nabla(\Omega)$.

Обозначим через $X(\widehat{\nabla})$ экстремальный вполне несвязный компакт, отвечающий булевой алгебре $\widehat{\nabla}$, а через $L_0(\widehat{\nabla})$ — алгебру всех непрерывных действительных функций, заданных на $X(\widehat{\nabla})$, принимающих значения $\pm\infty$ на нигде неплотных множествах из $X(\widehat{\nabla})$ [2]. Ясно, что $L_0(\Omega)$ является подалгеброй в $L_0(\widehat{\nabla})$.

Следуя известной схеме построения L_p-пространств, определим пространство $L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ всех функций из $L_0(\widehat{\nabla})$, интегрируемых с p-й степенью по $L_0(\Omega)$-значной мере $\widehat{\mu}$ (см., напр., [3]).

Известно [4], что $L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ является решеткой Банаха–Канторовича относительно соответствующей $L_0(\Omega)$-значной нормы $|\cdot|_p$, при этом $L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ — модуль над $L_0(\Omega)$.

Естественно, что пространства $L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ должны обладать многими свойствами, которые аналогичны соответствующим свойствам классических функциональных L_p-пространств, построенных по числовым мерам. Доказательства таких свойств могут осуществляться с использованием одного из следующих трех методов.

1) Последовательное повторение всех шагов известных доказательств для классических L_p-пространств, учитывающее особенности $L_0(\Omega)$-значных мер.

2) Применение булевозначного анализа, дающего возможность в соответствующей модели теории множеств сводить $L_0(\Omega)$-модули $L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ к обычным банаховым L_p-пространствам.

3) Представление $L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ в виде измеримого расслоения классических L_p-пространств, опирающееся на существование соответствующих лифтингов.

Первый метод, разумеется, неэффективен, поскольку он вынуждает повторять известные этапы доказательств, модифицируя их для $L_0(\Omega)$-значных мер. Второй метод связан с привлечением достаточно трудоемкого аппарата булевозначного анализа, и его реализация потребует огромной подготовительной работы, связанной с установлением взаимосвязей для изучаемых объектов в обычной и булевозначной моделях теории множеств.

Наиболее "экономным" путем для исследования свойств пространств $L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ с нашей точки зрения является использование третьего метода. Это связано с тем, что уже имеется достаточно хорошо разработанная теория измеримых расслоений банаховых пространств (см., напр., [5]). Поэтому ее эффективное использование с привлечением уже известных результатов из общей теории банаховых пространств дает возможность получения различных свойств и для пространств Банаха–Канторовича.

В данной работе этот метод иллюстрируется на примере доказательства эргодической теоремы для положительных сжатий решеток $L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ Банаха–Канторовича.

Пусть $\widehat{\nabla}$, $\widehat{\mu}$ те же, что и выше. Рассмотрим измеримое расслоение булевых алгебр ∇_ω со строго положительной числовой мерой μ_ω, $\omega\in\Omega$, соответствующее $(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ [6], [7]. Пусть $L_0(\widehat{\nabla})=L_0(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ — топологическая векторная решетка функций с $L_0(\Omega)$-значной метрикой $\widehat{\rho}(\widehat{f},\widehat{g})=\int\limits_{\widehat{\nabla}}\frac{|\widehat{f-g}|}{1+|\widehat{f-g}|}d\widehat{\mu}$ и $L_0(\nabla_\omega,\mu_\omega)$ — измеримое расслоение топологических векторных решеток измеримых функций, соответствующее $L_0(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ с метрикой $\rho_\omega(f(\omega),g(\omega))=\int\limits_{\nabla_\omega}\frac{|f(\omega)-g(\omega)|}{1+|f(\omega)-g(\omega)|}d\mu_\omega$ (см. [8]); здесь и в дальнейшем $\widehat{f}$ означает класс эквивалентности из $L_0(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$, содержащий представитель $f(\omega)\in L_0(\nabla_\omega,\mu_\omega)$, $\omega\in\Omega$.

Теорема 1. *Для последовательности $\{\widehat{f_n}\}$ из $L_0(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ точная верхняя (соответственно нижняя) грань $\sup\limits_{n\geq1}\widehat{f}_n$ (соответственно $\inf\limits_{n\geq1}\widehat{f}_n$) существует в $L_0(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ в том и только том случае, когда существует $\sup\limits_{n\geq1}f_n(\omega)$ (соответственно $\inf\limits_{n\geq1}f_n(\omega)$) в $L_0(\nabla_\omega,\mu_\omega)$ для почти всех (п. в.) $\omega\in\Omega$. В этом случае $(\sup\limits_{n\geq1}\widehat{f}_n)(\omega)=\sup\limits_{n\geq1}f_n(\omega)$ $\big((\inf\limits_{n\geq1}\widehat{f}_n)(\omega)=\inf\limits_{n\geq1}f_n(\omega)\big)$ для п. в. $\omega\in\Omega$.*

Из этой теоремы вытекает

Следствие. Если последовательность $\widehat{f}_n$ элементов из решетки $L_0(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ (o)-сходится к $\widehat{f}\in L_0(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ (запись: $\widehat{f}_n\xrightarrow{(o)}\widehat{f}$), то $f_n(\omega)\xrightarrow{(o)}f(\omega)$ в $L_0(\nabla_\omega,\mu_\omega)$ для п. в. $\omega\in\Omega$. Обратно, если $f_n(\omega)\xrightarrow{(o)}g(\omega)$ для некоторого $g(\omega)\in L_0(\nabla_\omega,\mu_\omega)$ для п. в. $\omega\in\Omega$, то $\widehat{g}\in L_0(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ и $\widehat{f}_n\xrightarrow{(o)}\widehat{g}$ в $L_0(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$.

Пусть $T:L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})\to L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ — линейное отображение. Как обычно, T называют положительным, если $T\widehat{f}\geq0$ для всех $\widehat{f}\geq0$. Предположим, что $T-L_0(\Omega)$ — ограниченное отображение, т. е. существует такое $k\in L_0(\Omega)$, что $|T\widehat{f}|_p\leq k|\widehat{f}|_p$ при всех $\widehat{f}\in L_0(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$. В этом случае определен элемент $|T|=\sup\limits_{|\widehat{f}|_p\leq\mathbf{1}}|T\widehat{f}|_p$, который является элементом $L_0(\Omega)$, где $\mathbf{1}$ — единичный элемент $L_0(\Omega)$. Если $|T|\leq\mathbf{1}$, то отображение называют сжатием.

Пример. Пусть $(\Omega,\widehat{\nabla},\lambda)$ — измеримое пространство с конечной числовой мерой λ. Под $\widehat{\nabla}$ подразумеваем полную булеву алгебру всех классов эквивалентности равных λ-п. в. измеримых множеств из Ω. Пусть $\widehat{\nabla}_0$ — правильная булева подалгебра в $\widehat{\nabla}$, λ_0 — сужение λ на $\widehat{\nabla}_0$, $E(\cdot\mid\widehat{\nabla}_0)$ — условное математическое ожидание из $L_1(\Omega,\widehat{\nabla},\lambda)$ на $L_1(\Omega,\widehat{\nabla}_0,\lambda_0)$. Ясно, что $\widehat{\mu}(\widehat{e})=E(\widehat{e}\mid\widehat{\nabla}_0)$ является строго положительной $L_0(\Omega,\widehat{\nabla}_0,\lambda_0)$-значной мерой на $\widehat{\nabla}$.

Пусть $\widehat{\nabla}_1$ — другая произвольная правильная булева подалгебра в $\widehat{\nabla}$ и $\widehat{\nabla}_1\supset\widehat{\nabla}_0$. Обозначим через $\widehat{\mu}_1$ сужение $\widehat{\mu}$ на $\widehat{\nabla}_1$. Согласно теореме 4.2.9 ([4], с. 182) существует оператор условного математического ожидания $T:L_1(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})\to L_1(\widehat{\nabla}_1,\widehat{\mu}_1)$, который является положительным и отображает $L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ в $L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ для всех $p\geq1$, при этом $|T\widehat{f}|_p\leq|\widehat{f}|_p$ для любого $\widehat{f}\in L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ и $T\mathbf{1}=\mathbf{1}$.

Теорема 2. *Пусть $T:L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})\to L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ — положительное линейное сжатие и $T\mathbf{1}\leq\mathbf{1}$. Тогда для каждого $\omega\in\Omega$ существует такое положительное сжатие $T_\omega:L_p(\nabla_\omega,\mu_\omega)\to L_p(\nabla_\omega,\mu_\omega)$, что $T_\omega f(\omega)=(T\widehat{f})(\omega)$ для любого $\widehat{f}\in L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ и λ-п. в. ω.*

Следующая теорема является аналогом известной эргодической теоремы для положительных сжатий решеток $L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ Банаха–Канторовича, построенных по $L_0(\Omega)$-значным мерам.

Теорема 3. *Пусть $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $T:L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})\to L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ — положительное линейное сжатие, для которого $T\mathbf{1}\leq\mathbf{1}$. Тогда для каждого $\widehat{f}\in L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$*

1) *последовательность* $s_n(|\widehat{f}|)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}T^i(|\widehat{f}|)$ *ограничена в* $L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ *и* $|\sup\limits_{n\geq 1}s_n(|\widehat{f}|)|_p\leq q|\widehat{f}|_p$;

2) *существует такое* $\widetilde{f}\in L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$, *что последовательность* $s_n(\widehat{f})$ (o)*-сходится к* $\widetilde{f}$ *в* $L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$, *в частности,* $s_n(\widehat{f})$ $\widehat{\mu}$*-п. в. сходится к* $\widetilde{f}$.

Доказательство. Пусть $\widehat{f}\in L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ и $s_n(\widehat{f})=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}T^i\widehat{f}$. Согласно теореме 2 $s_n(\widehat{f})(\omega)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}T^i_\omega f(\omega)=s_n(f(\omega))$ для п. в. ω. Из известных теорем 5.25 и 5.26 ([9], с. 189–190) следует, что $\|\sup\limits_{n\geq 1}s_n(f(\omega))\|_p\leq q\|f(\omega)\|_p$ и существует такое $g(\omega)\in L_p(\nabla_\omega,\mu_\omega)$, что $s_n(f(\omega))\xrightarrow{(o)}g(\omega)$ в $L_p(\nabla_\omega,\mu_\omega)$ для п. в. $\omega\in\Omega$.

В силу теоремы 1 в $L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ существует $\sup\limits_{n\geq 1}s_n(|\widehat{f}|)$ и $|\sup\limits_{n\geq 1}s_n(|\widehat{f}|)|_p\leq q|\widehat{f}|_p$. Из следствия к теореме 1 вытекает, что $s_n(\widehat{f})=\widehat{s_n(f(\omega))}\xrightarrow{(o)}\widetilde{f}=\widehat{g(\omega)}$ в $L_0(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$. Поскольку последовательность $s_n(\widehat{f})$ ограничена в $L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$, то $s_n(\widehat{f})\xrightarrow{(o)}\widetilde{f}$ в $L_p(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$. Так же, как и в [10], доказывается, что из (o)-сходимости в $L_0(\widehat{\nabla},\widehat{\mu})$ следует сходимость $\widehat{\mu}$-п. в. Поэтому $s_n(\widehat{f})\to\widetilde{f}$ $\widehat{\mu}$-п. в. $\square$

Литература

1. Сарымсаков Т.А., Рубштейн Б.А., Чилин В.И. *Полные тензорные произведения топологических полуполей* // ДАН СССР. – 1974. – Т. 216. – № 6. – С. 1226–1228.
2. Сарымсаков Т.А., Аюпов Ш.А., Хаджиев Дж., Чилин В.И. *Упорядоченные алгебры.* – Ташкент: Фан, 1983. – 304 с.
3. Сарымсаков Т.А. *Топологические полуполя и их приложения.* – Ташкент: Фан, 1989. – 192 с.
4. Кусраев А.Г. *Векторная двойственность и ее приложения.* – Новосибирск: Наука, 1985. – 256 с.
5. Гутман А.Е. *Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств. Линейные операторы, согласованные с порядком* // Тр. РАН Сиб. отд. ин-та матем. – 1995. – Т. 29. – С. 63–211.
6. Ганиев И.Г. *О векторных мерах со значениями в пространствах Банаха–Канторовича* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 4. – С. 65–67.
7. Ганиев И.Г. *Измеримые булевы расслоения* // Тез. III Сиб. конгр. по прикл. и индустр. матем. – Новосибирск, 1998. – Ч. 1. – С. 65.
8. Ганиев И.Г. *Измеримые расслоения метризуемых топологических векторных решеток* // ДАН РУз. – 1999. – № 3. – С. 8–11.
9. Krendel U. *Ergodic Theorems.* – Walter de Gruywer. – Berlin–N. Y., 1985. – 357 p.
10. Сарымсаков Т.А. *Полуполя и теория вероятностей.* – Ташкент: Фан, 1980. – 94 с.

Ташкентский государственный университет
Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта

Поступила
19.11.1999