ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 8 (519)

УДК 517.521

А.В. АНТОНОВА

ДОПОЛНЕНИЕ К ПРИЗНАКУ ЖАМЭ

Целью данной работы является получение новых признаков сходимости для рядов с положительными членами, которые позволяют упростить исследование таких рядов.

Пусть на множестве натуральных чисел **N** заданы три функции $\varphi(n)$, $g(n)$, $f(n)$ такие, что

1) $\varphi(n)$, $f(n)$ являются возрастающими, положительно определенными, неограниченными функциями;
2) $g(n)$ положительно определена;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)g(n)}{f(n)\ln n} = q$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$.

Рассмотрим отдельно случаи, когда $q \neq 0$ — конечное число, $q = 0$ и $q = +\infty$.

Пусть $q \neq 0$ — конечное число. Тогда при выше перечисленных условиях справедлива

Теорема 1. *Если для элементов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, начиная с некоторого номера N, $\forall n \geq N$ выполняется неравенство*

1) $(1 - a_n^{1/\varphi(n)})f(n)/g(n) \geq p > 1/q$, *где p — некоторое постоянное число, то ряд сходится. Если же ($\forall n \geq N$) выполняется неравенство*

2) $(1-a_n^{1/\varphi(n)})f(n)/g(n) \leq p < 1/q$, *где p — некоторое постояннное число, то ряд расходится.*

Доказательство. Пусть, начиная с некоторого номера N, для любого $n \geq N$ выполняется неравенство 1) теоремы. Тогда

$$(1 - pg(n)/f(n))^{\varphi(n)} \geq a_n. \tag{1}$$

Докажем, что сходится ряд

$$\sum_{n=k}^{\infty}(1 - pg(n)/f(n))^{\varphi(n)}, \tag{2}$$

где k — номер, начиная с которого имеют смысл элементы ряда. Применим к этому ряду логарифмический признак [1]

$$\frac{\ln(1 - pg(n)/f(n))^{-\varphi(n)}}{\ln n} = \frac{\varphi(n)pg(n)}{f(n)\ln n}\ln B(n), \quad B(n) = (1 - pg(n)/f(n))^{\frac{f(n)}{-pg(n)}}. \tag{3}$$

В силу условия 4) получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \ln B(n) = 1$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется N_1 такое, что для всех $n \geq N_1$ выполняется неравенство

$$1 - \varepsilon < \ln B(n) < 1 + \varepsilon. \tag{4}$$

Из предположения 3) следует, что для любого $\varepsilon' > 0$ существует N_2 такое, что для всех $n \geq N_2$ выполняется неравенство

$$q - \varepsilon' < \frac{\varphi(n)g(n)}{f(n)\ln n} < q + \varepsilon'.$$

Тогда получаем

$$p\frac{\varphi(n)g(n)}{f(n)\ln n}\ln B(n) \ge p(q - \varepsilon q - \varepsilon' + \varepsilon'\varepsilon).$$

Так как $p \ge \frac{1}{q-\delta}$, где $0 < \delta < q$ — некоторое число, а числа ε и ε' могут быть любыми, то выбираем их таким образом, чтобы выполнялось неравенство $q - \varepsilon q - \varepsilon' + \varepsilon'\varepsilon \ge q - \beta$, где $0 < \beta < \delta$ — любое число. Тогда будем иметь неравенство

$$p(q - \varepsilon q - \varepsilon' + \varepsilon'\varepsilon) \ge \frac{q-\beta}{q-\delta} = \alpha > 1,$$

которое выполняется для всех $n \ge \max(N, N_1, N_2)$. В силу логарифмического признака [1] ряд (2) сходится, а значит, по признаку сравнения [2] сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пусть теперь для всех $n \ge N$ выполняется неравенство 2) теоремы. Тогда

$$(1 - pg(n)/f(n))^{\varphi(n)} \le a_n.$$

Докажем, что расходится ряд (2). Применяя к этому ряду логарифмический признак и рассуждая так же, как и при доказательстве первой части, получим

$$\frac{\ln(1 - pg(n)/f(n))^{-\varphi(n)}}{\ln n} = \frac{\varphi(n)pg(n)}{f(n)\ln n}\ln B(n) \le p(q + \varepsilon q + \varepsilon' + \varepsilon\varepsilon').$$

Так как $p \le \frac{1}{q+\gamma}$, где $\gamma > 0$ — некоторое число, то, выбрав числа ε и ε' так, что $q+\varepsilon q+\varepsilon'+\varepsilon'\varepsilon \le q+\beta$, где $0 < \beta < \gamma$ — любое число (такой выбор возможен в силу произвольности чисел ε и ε'), получим неравенство $p(q+\varepsilon q+\varepsilon'+\varepsilon'\varepsilon) \le \frac{q+\beta}{q+\gamma} = \alpha < 1$, которое выполняется для всех $n \ge M$, где $M \ge N$ — некоторый номер. В силу логарифмического признака ряд (2) расходится, а значит, расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Рассмотрим теперь случай, когда $q = +\infty$. Для него имеет место

Теорема 2. *Если для элементов ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *начиная с некоторого номера* N, $\forall n \ge N$ *выполняется неравенство*

1) $(1 - a_n^{1/\varphi(n)})f(n)/g(n) \ge p > 0$, *где* p *— некоторое постоянное число, то ряд сходится.*

Если же $(\forall n \ge N)$ *выполняется неравенство*

2) $(1 - a_n^{1/\varphi(n)})f(n)/g(n) < 0$, *то ряд расходится.*

Доказательство. Пусть, начиная с некоторого номера N, $\forall n \ge N$ выполняется неравенство 1) теоремы. Тогда имеет место (1). Докажем, что сходится ряд (2). Применяя к этому ряду логарифмический признак, получим равенство (3).

В силу условия 4) получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется N_1 такое, что для всех $n \ge N_1$ выполняется неравенство (4). По условию 3) имеем $\frac{\varphi(n)g(n)}{f(n)\ln n} \to +\infty$ при $n \to \infty$, следовательно, для каждого $A > 0$ найдется N_2 такое, что для всех $n \ge N_2$

$$\frac{\varphi(n)g(n)}{f(n)\ln n} \ge A.$$

Отсюда получаем $p\frac{\varphi(n)g(n)}{f(n)\ln n}\ln B(n) \ge pA(1-\varepsilon)$. Так как числа A и ε произвольны, то выберем их таким образом, что $A(1-\varepsilon) > \frac{1}{p-\delta}$, где $0 < \delta < p$ — любое число. Тогда будем иметь неравенство $pA(1-\varepsilon) \ge \frac{p}{p-\delta} = \alpha > 1$ для всех $n \ge \max(N, N_1, N_2)$. Следовательно, ряд (2) сходится, а значит, по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пусть теперь для всех $n \geq N$ выполняется неравенство 2) теоремы. Из условий 1) и 2) получаем $f(n)/g(n) > 0$ для всех $n \geq N$. Следовательно, $1 - a_n^{1/\varphi(n)} < 0 \quad \forall n \geq N$, а значит, $a_n > 1$, которое влечет расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Наконец, в случае, когда $q = 0$, имеет место

Теорема 3. *Если для элементов ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *начиная с некоторого номера* N, $\forall n \geq N$ *выполняется неравенство*

$$(1 - a_n^{1/\varphi(n)}) f(n)/g(n) \leq p, \tag{5}$$

где p *— некоторое число, то ряд расходится.*

Доказательство. Пусть, начиная с некоторого номера N, для всех $n \geq N$ выполнено неравенство (5). Тогда $(1 - pg(n)/f(n))^{\varphi(n)} \leq a_n$. Докажем, что расходится ряд (2). Применяя к нему логарифмический признак, получим равенство (3).

Поскольку последовательность $\{\frac{\varphi(n)g(n)}{f(n)\ln n}\} \to 0$ при $n \to \infty$, а последовательность $\{p \ln B(n)\}$ ограниченная, то последовательность $\{p\frac{\varphi(n)g(n)}{f(n)\ln n} \ln B(n)\} \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что расходится ряд (2), а значит, по признаку сравнения расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_0} \right)^{c_s n^s + c_{s-1} n^{s-1} + \cdots + c_0},$$

где $a_i, b_i \geq 0$, $i = \overline{1,k}$, $c_j \geq 0$, $j = \overline{1,s}$.

Рассмотрим случай, когда $s > k > 0$. Тогда, полагая

$$\varphi(n) = c_s n^s + c_{s-1} n^{s-1} + \cdots + c_0,$$
$$f(n) = b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_0,$$
$$g(n) = 1$$

и применяя теорему 2 в предельной форме, получаем, что

1) при $b_k > a_k$ ряд сходится;
2) при $b_k < a_k$ ряд расходится;
3) при $b_k = a_k$ и $b_{k-1} > a_{k-1}$ ряд сходится;
   при $b_k = a_k$ и $b_{k-1} < a_{k-1}$ ряд расходится;
   при $b_k = a_k$, $b_{k-1} = a_{k-1}$ и $b_{k-2} > a_{k-2}$ ряд сходится;
   при $b_k = a_k$, $b_{k-1} = a_{k-1}$ и $b_{k-2} < a_{k-2}$ ряд расходится;
   ....
   при $b_0 > a_0$ ряд сходится,
   при $b_0 \leq a_0$ ряд расходится.

Аналогично рассматриваются случаи, когда $s = k > 0$ и $0 < s < k$.

Литература

1. Шмелев П.А. *Теория рядов в задачах и упражнениях.* Уч. пособие для втузов. – М.: Высш. школа, 1983. – 176с.
2. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 2. – М.: Наука, 1969. – 800 с.

Казанский государственный энергетический университет

Поступила
04.04.2003