ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 1 (500)

УДК 517.977

С.Е. БУХТОЯРОВ, В.А. ЕМЕЛИЧЕВ

О КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ТРАЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ПРИНЦИПОМ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Под квазиустойчивостью векторной задачи дискретной оптимизации, как обычно [1]–[5], будем понимать дискретный аналог полунепрерывности снизу (по Хаусдорфу) многозначного отображения, которое набору параметров задачи ставит в соответствие искомое множество альтернатив (эффективных в том или ином смысле). Тем самым квазиустойчивость задачи есть свойство сохранения указанного множества при "малых" возмущениях параметров задачи, а радиусом квазиустойчивости называется предельный уровень таких возмущений.

В данной статье рассматривается n-критериальная линейная комбинаторная (на системе подмножеств конечного множества) задача оптимизации, принцип оптимальности которой задается с помощью целочисленного параметра s, изменяющегося в пределах от 1 до n. При этом крайним значениям параметра соответствуют паретовский и слейтеровский принципы оптимальности. Для каждого значения параметра s найдена формула радиуса квазиустойчивости задачи, а также указаны необходимые и достаточные условия устойчивости этого типа.

Класс векторных (n-критериальных) задач, рассматриваемых в данной работе, можно описать следующей комбинаторной моделью. Пусть задан векторный критерий

$$f(t,A) = (f_1(t,A_1), f_2(t,A_2), \ldots, f_n(t,A_n)) \to \min_{t\in T}$$

с частными критериями вида

$$f_i(t,A_i) = \sum_{j\in N(t)} a_{ij}, \quad i \in N_n,$$

где T — множество траекторий, $T \subseteq 2^E$, $|T| \geq 2$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $m \geq 2$, $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 1$, $N(t) = \{j \in N_n : e_j \in t\}$, A_i — i-я строка матрицы $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n\times m}$. Будем полагать, что $f_i(\emptyset, A_i) = 0$.

С помощью бинарного отношения, зависящего от целочисленного параметра, введем n принципов оптимальности (в иной терминологии — функций выбора). Для этого на множестве траекторий T при всяком индексе $s \in N_n$ введем бинарное отношение строгого предпочтения $\Omega_s^n(A)$ между траекториями согласно формуле

$$t\Omega_s^n(A)t' \Leftrightarrow [t,t',A]^+ > (s-1)[t,t',A]^0 + (n-1)[t,t',A]^-,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского государственного университета в рамках Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь "Математические структуры 29".

где

$$
\begin{gathered}
[t,t',A]^+ = |\{i \in N_n : g_i(t,t',A_i) > 0\}|,\\
[t,t',A]^0 = |\{i \in N_n : g_i(t,t',A_i) = 0\}|,\\
[t,t',A]^- = |\{i \in N_n : g_i(t,t',A_i) < 0\}|,\\
g_i(t,t',A_i) = f_i(t,A_i) - f_i(t',A_i).
\end{gathered}
$$

Это бинарное отношение порождает множество s-эффективных траекторий

$$T_s^n(A) = \{t \in T : T_s^n(t,A) = \emptyset\},$$

где

$$T_s^n(t,A) = \{t' \in T : t\Omega_s^n(A)t'\}.$$

Легко видеть, что множество $T_1^n(A)$ совпадает с множеством Парето

$$P^n(A) = \{t \in T : U^n(t,A) = \emptyset\},$$

где

$$U^n(t,A) = T_1^n(t,A) = \{t' \in T : [t,t',A]^+ > 0 \ \&\ [t,t',A]^- = 0\}.$$

Очевидно, множество $T_n^n(A)$ есть множество Слейтера (множество слабо эффективных траекторий)

$$S^n(A) = \{t \in T : V^n(t,A) = \emptyset\},$$

где

$$V^n(T,A) = T_n^n(t,A) = \{t' \in T : [t,t',A]^+ = n\}.$$

Отметим, что введенная здесь параметризация принципа оптимальности "от Парето до Слейтера" является частным случаем предложенного в [6] двупараметрического семейства n^2 принципов оптимальности в критериальном пространстве $\mathbf{R}^n$.

Векторную задачу поиска множества $T_s^n(A)$ s-эффективных траекторий будем обозначать через $Z_s^n(A)$. В дальнейшем запись $t\Omega_s^n(A)t'$ будем интерпретировать как утверждение о том, что траектория t' доминирует траекторию t в задаче $Z_s^n(A)$. Тем самым траектория t является s-эффективной тогда и только тогда, когда в множестве T не существует траекторий, которые доминируют ее в $Z_s^n(A)$.

Ясно, что $T_1^1(A)$ — множество оптимальных траекторий обычной (скалярной) линейной траекторной задачи, в схему которой вкладываются многие экстремальные комбинаторные задачи на графах, а также задачи булева программирования и ряд задач теории расписаний (см., напр., [7], [8]).

Следующие очевидные свойства вытекают из приведенных выше определений и обозначений.

A1. Для любой матрицы $A \in \mathbf{R}^{n\times m}$ верны соотношения

$$\emptyset \neq P^n(A) = T_1^n(A) \subseteq T_2^n(A) \subseteq \dots \subseteq T_n^n(A) = S^n(A).$$

A2. Если $1 \le s < k \le n$, то для любой матрицы $A \in \mathbf{R}^{n\times m}$ верна импликация $t\Omega_k^n(A)t' \Rightarrow t\Omega_s^n(A)t'$.

A3. $[t,t',A]^+ = n \ \Leftrightarrow\ t\Omega_n^n(A)t'$.

A4. $[t,t',A]^+ > 0 \Rightarrow t'\overline{\Omega_1^n}(A)t$.

A5. Если $1 \le k < s \le n$, то $t'\overline{\Omega_k^n}(A)t \Rightarrow t'\overline{\Omega_s^n}(A)t$.

Здесь и далее запись $t\overline{\Omega_s^n}(A)t'$ будет означать, что отношение $t\Omega_s^n(A)t'$ не выполняется, т. е. траектория t' не доминирует траекторию t в задаче $Z_s^n(A)$. Приведенные ниже очевидные свойства справедливы для любого индекса $s \in N_n$.

A6. $(\forall t \in T\ (t'\overline{\Omega_s^n}(A)\ t)) \Leftrightarrow t' \in T_s^n(A)$.

A7. $(t' \in T_s^n(A)\ \&\ t \in T \setminus \{t'\}) \ \Rightarrow\ [t,t',A]^+ + [t,t',A]^0 > 0$.

Кроме того, нетрудно доказать [6], что бинарное отношение $\Omega_s^n(A)$ при любом индексе $s \in N_n$ антирефлексивно, асимметрично, транзитивно и поэтому ациклично. Отметим, что отсюда следует непустота любого множества $T_s^n(A)$, $s \in N_n$.

Как обычно [1]–[5], возмущение параметров векторного критерия $f(t, A)$ будем осуществлять путем сложения матрицы $A \in \mathbf{R}^{n\times m}$ с матрицами множества

$$\mathcal{B}(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{n\times m} : \|B\| < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$ — предельный уровень возмущений, $\|\cdot\|$ — норма l_∞ в пространстве $\mathbf{R}^{n\times m}$, т. е.

$$\|B\| = \max\{|b_{ij}| : (i,j) \in N_n \times N_m\}, \quad B = [b_{ij}] \in \mathbf{R}^{n\times m}.$$

С учетом вышесказанного задача $Z_s^n(A)$ называется квазиустойчивой, если существует такое положительное число $\varepsilon > 0$, что для любой матрицы $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ справедливо включение

$$T_s^n(A) \subseteq T_s^n(A + B).$$

Таким образом, задача $Z_s^n(A)$ квазиустойчива лишь в том случае, когда при "малых" независимых возмущениях элементов матрицы A не исчезают (хотя могут появляться новые) s-эффективные траектории исходной задачи.

Следуя [1], [3], [5], радиусом квазиустойчивости задачи $Z_s^n(A)$, $s \in N_n$, назовем число

$$\rho_s^n(A) = \begin{cases} \sup K(A), & \text{если } K(A) \neq \emptyset; \\ 0, & \text{если } K(A) = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$K(A) = \{\varepsilon > 0 : \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon)\ (T_s^n(A) \subseteq T_s^n(A + B))\}.$$

Для траекторий $t, t' \in T$ положим

$$\Delta(t, t') = |(t \cup t') \setminus (t \cap t')|.$$

Очевидно, $\Delta(t, t') \geq 1$ при $t \neq t'$.

Лемма 1. *Если две различные траектории $t, t' \in T$ и матрица $B \in \mathbf{R}^{n\times m}$ таковы, что для некоторого индекса $k \in N_n$ выполняется неравенство*

$$g_k(t, t', A_k) > \|B_k\|\Delta(t, t'), \tag{1}$$

то для любого индекса $s \in N_n$ справедливо соотношение

$$t'\overline{\Omega_s^n}(A + B)t.$$

Доказательство. Поскольку очевидно неравенство

$$g_k(t, t', B_k) \geq -\|B_k\|\Delta(t, t'),$$

то с учетом (1) и линейности частных критериев выводим

$$g_k(t, t', A_k + B_k) = g_k(t, t', A_k) + g_k(t, t', B_k) \geq g_k(t, t', A_k) - \|B_k\|\Delta(t, t') > 0.$$

Это значит, что $[t, t', A+B]^+ > 0$. Поэтому согласно свойствам A4 и A5 справедливо утверждение леммы 1. $\square$

Пусть $0 < \alpha < \varepsilon$, $t, t' \in T$, $t \neq t'$. В дальнейшем будем использовать возмущающую $n \times m$-матрицу $B^*(\alpha) = [b^*_{ij}] \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, элементы которой для любого индекса $i \in N_n$ задаются по формуле

$$b^*_{ij} = \begin{cases} -\alpha, & \text{если } j \in N(t \setminus t'); \\ \alpha, & \text{если } j \in N(t' \setminus t); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2}$$

Очевидно, $\|B^*(\alpha)\| = \alpha$.

Лемма 2. *Пусть $t, t' \in T$, $t \neq t'$, $s \in N_n$, $\alpha > 0$. Если выполняются неравенства*

$$g_i(t, t', A_i) < \alpha\Delta(t, t'), \quad i \in N_n, \tag{3}$$

то

$$t'\Omega^n_s(A + B^*(\alpha))t.$$

Доказательство. С учетом (3) и структуры возмущающей матрицы $B^*(\alpha) \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, элементы которой задаются по формуле (2), легко убеждаемся в справедливости следующих соотношений для любого индекса $i \in N_n$:

$$g_i(t, t', A_i + B^*_i(\alpha)) = g_i(t, t', A_i) + g_i(t, t', B^*_i(\alpha)) = g_i(t, t', A_i) - \alpha\Delta(t, t') < 0.$$

Отсюда получаем равенство $[t', t, A + B^*(\alpha)]^+ = n$ и потому в силу свойств A2 и A3 выводим

$$t'\Omega^n_s(A + B^*(\alpha))t. \quad \square$$

Теорема. *При любых $n \geq 1$ и $s \in N_n$ радиус квазиустойчивости $\rho^n_s(A)$ векторной траекторной задачи $Z^n_s(A)$ имеет вид*

$$\rho^n_s(A) = \min_{t' \in T^n_s(A)} \min_{t \in T \setminus \{t'\}} \max_{i \in N_n} \frac{g_i(t, t', A_i)}{\Delta(t, t')}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим через φ правую часть формулы (4). Учитывая непустоту множества $T^n_s(A)$ и то, что для любой траектории $t' \in T^n_s(A)$ множество $T \setminus \{t'\}$ также непусто, из свойства A7 (ввиду $\Delta(t, t') > 0$) выводим, что число φ существует и неотрицательно.

Далее докажем неравенство

$$\rho^n_s(A) \geq \varphi. \tag{5}$$

Будем полагать, что число φ положительно (в случае, когда $\varphi = 0$, неравенство (5) очевидно). Пусть матрица $B \in \mathcal{B}(\varphi)$. Тогда согласно определению числа φ для любых траекторий $t' \in T^n_s(A)$ и $t \in T \setminus \{t'\}$ существует такой индекс $k \in N_n$, при котором выполняется неравенство

$$\|B_k\| \leq \|B\| < \varphi \leq \frac{g_k(t, t', A_k)}{\Delta(t, t')}.$$

Поэтому, применяя лемму 1, убеждаемся в справедливости для любого индекса $s \in N_n$ соотношения

$$t'\overline{\Omega^n_s}(A + B)t.$$

Отсюда, учитывая антирефлексивность отношения $\Omega^n_s(\cdot)$, получаем

$$\forall B \in \mathcal{B}(\varphi) \quad \forall t' \in T^n_s(A) \quad \forall t \in T \quad (t'\overline{\Omega^n_s}(A + B)t).$$

Поэтому согласно свойству A6 траектория t' является s-эффективной траекторией в любой возмущенной задаче $Z^n_s(A + B)$, $B \in \mathcal{B}(\varphi)$. Это значит, что для любой матрицы $B \in \mathcal{B}(\varphi)$ справедливо включение

$$T^n_s(A + B) \supseteq T^n_s(A).$$

Следовательно, верно неравенство (5).

Наконец, докажем неравенство

$$\rho_s^n(A) \leq \varphi. \tag{6}$$

Пусть $\varphi < \alpha < \varepsilon$. Тогда согласно определению числа φ существуют такие траектории $t' \in T_s^n(A)$ и $t \in T \setminus \{t'\}$, что для любого индекса $i \in N_n$ верны неравенства

$$g_i(t, t', A_i) \leq \varphi\Delta(t, t') < \alpha\Delta(t, t').$$

Отсюда, пользуясь леммой 2, получаем

$$t'\Omega_s^n(A + B^*(\alpha))t.$$

Из этого соотношения следует, что t' не является s-эффективной траекторией в возмущенной задаче $Z_s^n(A + B^*(\alpha))$. В результате выводим

$$\forall\varepsilon > \varphi \;\; \exists B^*(\alpha) \in \mathcal{B}(\varepsilon) \;\; (T_s^n(A + B^*(\alpha)) \not\supseteq T_s^n(A)).$$

Это свидетельствует о справедливости неравенства (6), которое вместе с неравенством (5) дает формулу (4). $\square$

В принятых обозначениях традиционное множество Смейла, т. е. множество строго эффективных траекторий, задается следующим образом:

$$Q^n(A) = \{t \in T : W(t, A) = \emptyset\},$$

где

$$W(t, A) = \{t' \in T \setminus \{t\} : [t, t', A]^- = 0\}.$$

Очевидно, что $Q^n(A) \subseteq P^n(A)$, при этом множество $Q^n(A)$ может быть пустым.

Следствие 1. Для любых индексов $s \in N_n$ и $n \geq 1$ эквивалентны утверждения

— задача $Z_s^n(A)$ квазиустойчива,

— $T_s^n(A) = Q^n(A)$,

— $\forall t' \in T_s^n(A), \forall t \in T \setminus \{t'\}$ $([t, t', A]^+ > 0)$.

Отсюда, в частности, вытекает известный результат [7]: скалярная задача $Z_1^1(A)$ квазиустойчива тогда и только тогда, когда имеет единственную оптимальную траекторию.

Ввиду свойства A1 из теоремы также вытекает

Следствие 2. Для любой матрицы $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $n, m \geq 2$, верны неравенства

$$\rho_1^n(A) \geq \rho_2^n(A) \geq \cdots \geq \rho_n^n(A).$$

Отсюда легко выводим

Следствие 3. Если $1 \leq s < k \leq n$, $n \geq 2$, то из квазиустойчивости задачи $Z_k^n(A)$ следует квазиустойчивость задачи $Z_s^n(A)$.

В заключение заметим, что при $s = 1$ теорема и следствие 1 переходят в результаты, полученные в [1] и касающиеся квазиустойчивости векторной траекторной задачи $Z_1^n(A)$ поиска множества Парето.

Литература

1. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Подкопаев Д.П. *О квазиустойчивости траекторных задач векторной оптимизации* // Матем. заметки. – 1998. – Т. 63. – Вып. 1. – С. 21–27.
2. Емеличев В.А., Степанишина Ю.В. *Квазиустойчивость векторной нелинейной траекторной задачи с паретовским принципом оптимальности* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 12. – С. 27–32.
3. Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. *Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования* // Дискрет. анализ и исследов. операций. Сер. 2. – 2001. – Т. 8. – № 1. – С. 47–69.
4. Емеличев В.А., Степанишина Ю.В. *О квазиустойчивости векторной траекторной задачи мажоритарной оптимизации* // Матем. заметки. – 2002. – Т. 72. – № 1. – С. 38–47.
5. Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.P. *Stability and regularization of vector problems of integer linear programming* // Optimization. – 2002. – V. 51. – № 4. – P. 645–676.
6. Емеличев В.А., Пашкевич А.В. *О параметризации принципа оптимальности в критериальном пространстве* // Дискрет. анализ и исследов. операций. Сер. 2. – 2002. – Т. 9. – № 1. – С. 21–32.
7. Леонтьев В.К. *Устойчивость в линейных дискретных задачах* // Пробл. кибернетики. – М.: Наука, 1979. – Вып. 35. – С. 169–184.
8. Sotskov Yu.N., Leontev V.K., Gordeev E.N. *Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization* // Discrete Appl. Math. – 1995. – V. 58. – № 2. – P. 169–190.

Белорусский государственный университет

Поступила
03.02.2003