ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 7 (494)

УДК 517.956

Г.А. СВИРИДЮК, С.А. ЗАГРЕБИНА

О ЗАДАЧЕ ВЕРИГИНА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ФИЛЬТРАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Фильтрационное уравнение Буссинеска моделирует эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [1]. Основной недостаток этой модели заключается в отсутствии вертикальной составляющей скорости. Для преодоления этого недостатка была предложена более совершенная модель [2]. Один из наиболее интересных частных случаев этой модели может быть записан в виде

$$(1-\varkappa\Delta)u_t = \Delta(|u|^{p-2}u) + f. \tag{0.1}$$

Здесь функция $u = u(x,t)$ характеризует свободную поверхность, функция $f = f(x)$ отвечает источникам и стокам жидкости, $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область. Вещественный параметр $\varkappa$ служит характеристикой среды и может принимать отрицательные значения. Отметим, что при $\varkappa = 0$ и $p = 3$ уравнение (0.1) совпадает с фильтрационным уравнением Буссинеска.

Задача Коши–Дирихле

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega; \quad u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{0.2}$$

для уравнения (0.1) изучалась в различных аспектах. Сначала [3], [4] методом Галёркина была установлена однозначная разрешимость задачи (0.1), (0.2) на отрезке $[0,T]$. Затем [5] этот результат был распространен на неоднородную задачу. И, наконец [6], на основе теории Комуры полученное решение было продолжено на полуось $\mathbb{R}_+$. Все это проводилось при предположении $\varkappa \geq \lambda_1^{-1}$, где λ_1 — первое собственное значение задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ в области Ω. Это ограничение вызвано контрпримером [4], в котором показано, что не существует решения задачи (0.1), (0.2) на отрезке $[0,T]$ при произвольных u_0 и $\varkappa$.

В [7] вместо задачи Коши предлагается рассматривать более общую задачу Веригина, при которой задаются не только начальные значения u_0, но и “конечные” $u_T(x) = u(x,T)$. Данный подход позволит нам снять ограничение $\varkappa \geq \lambda_1^{-1}$, что безусловно увеличит эвристическую ценность модели.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Следуя [6], положим $\mathcal{U}_L = L_2$, $\mathcal{F} = W_2^{-1}$ (все функциональные пространства определены на области Ω). Через $\mathcal{U}_L^*$ обозначим пространство, сопряженное к $\mathcal{U}_L$ относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ из $\mathcal{F}$. Отметим плотность и непрерывность вложений $\mathcal{U}_L \hookrightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{U}_L^*$. Оператор $L : \mathcal{U}_L \to \mathcal{U}_L^*$ зададим формулой

$$\langle Lu, v\rangle = \int_\Omega (\varkappa + (-\Delta)^{-1})uv\,dx,$$

где через $(-\Delta)^{-1}$ обозначен оператор Грина задачи Дирихле в области Ω для оператора $-\Delta$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования России, шифр РД02-1.1-82.

Лемма 1.1. *Оператор $L : \mathcal{U}_L \to \mathcal{U}_L^*$ линеен, непрерывен и самосопряжен. Его спектр $\sigma(L)$ дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$. Линейная оболочка собственных функций плотна в $\mathcal{U}_L$.*

Положим $\mathcal{U}_M = L_p$, а через $\mathcal{U}_M^*$ обозначим сопряженное к $\mathcal{U}_M$ пространство относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Отметим плотность и непрерывность вложений $\mathcal{U}_M \hookrightarrow \mathcal{U}_L \hookrightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{U}_L^* \hookrightarrow \mathcal{U}_M^*$ при $p \geq 2$. Фиксируем $f \in \mathcal{U}_L^*$ и определим оператор $M : \mathcal{U}_M \to \mathcal{U}_M^*$ формулой

$$\langle M(u), v\rangle = \int_\Omega (|u|^{p-2}u + (-\Delta)^{-1}f)v\,dx.$$

Лемма 1.2. *Пусть $p \geq 2$, тогда $M \in C^1(\mathcal{U}_M;\mathcal{U}_M^*)$.*

Действительно, фиксируем $u \in \mathcal{U}_M$. Тогда производная Фреше оператора M в точке u имеет вид

$$\langle M_u'v, w\rangle = \int_\Omega |u|^{p-2}vw\,dx.$$

Лемма 1.3 ([4]). *Пусть $p \geq 2$, тогда оператор M сильно коэрцитивен и s-монотонен.*

Напомним [4], [6], что сильно коэрцитивным называется такой оператор, что

$$\lim_{\|v\|_M \to +\infty} \langle M(u+v), v\rangle \setminus \|v\|_M = +\infty \quad \forall u \in \mathcal{U}_M,$$

а s-монотонным такой, что $\langle M_u'v, v\rangle > 0 \;\; \forall u, v \neq 0$ (здесь через $\|\cdot\|_M$ обозначена норма в пространстве $\mathcal{U}_M$).

Введем множество $\operatorname{dom} M = \{u \in \mathcal{U}_M : M(u) \in \mathcal{U}_L^*\}$ и запишем уравнение (0.1) в операторной форме

$$L\dot{u} + M(u) = 0. \tag{1.1}$$

Под решением уравнения (1.1) понимается сильно непрерывная и слабо дифференцируемая в $\mathcal{U}_L$ функция $u : (0,T) \to \operatorname{dom} M$, удовлетворяющая уравнению (1.1) и такая, что функция $M(u) : (0,T) \to \mathcal{U}_L^*$ слабо непрерывна.

Положим $\sigma(L) = \{\mu_k\}$, где собственные значения занумерованы по неубыванию с учетом их кратности. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ ортонормированную (в смысле $\mathcal{F}$) систему собственных функций. В силу гладкости границы линейная оболочка $\operatorname{span}\{\varphi_k\}$ плотна в $\mathcal{U}_M$ и, кроме того, $\operatorname{span}\{\varphi_k\} \subset \operatorname{dom} M$ при $p \geq 2$. Построим пространства $\mathcal{U}_L^- = \operatorname{span}\{\varphi_k : \mu_k < 0\}$, $\mathcal{U}_L^0 = \operatorname{span}\{\varphi_k : \mu_k = 0\}$, $\mathcal{U}_L^+$ — замыкание в норме $\mathcal{U}_L$ линеала $\operatorname{span}\{\varphi_k : \mu_k > 0\}$. Обозначим через P_-, P_0, P_+ проекторы на $\mathcal{U}_L^-, \mathcal{U}_L^0, \mathcal{U}_L^+$ вдоль $\mathcal{U}_L^0 \oplus \mathcal{U}_L^+, \mathcal{U}_L^- \oplus \mathcal{U}_L^+, \mathcal{U}_L^- \oplus \mathcal{U}_L^0$ соответственно. Будем обозначать расширения (и сужения) этих проекторов на пространства $\mathcal{U}_L^*$ и $\mathcal{U}_M^*$ $(\mathcal{U}_M)$ теми же символами. В силу конечномерности либо ядра, либо образа каждого из этих проекторов и плотности вложений это не приведет к потере общности.

Наконец, поставим задачу Веригина

$$P_+u(0) = u_0, \quad P_-u(T) = u_T. \tag{1.2}$$

Решение уравнения (1.1) назовем решением задачи (1.1), (1.2), если $\lim\limits_{t\to 0+} P_+u(t) = u_0$ и $\lim\limits_{t\to T-} P_-u(t) = u_T$ относительно нормы $\mathcal{U}_L$.

2. Множество решений уравнения

Подействуем на уравнение (1.1) последовательно проекторами P_-, P_0 и P_+. Получим эквивалентную систему уравнений

$$L_-\dot{u}^- + P_-M(u) = 0, \quad P_0M(u) = 0, \quad L_+\dot{u}^+ + P_+M(u) = 0, \tag{2.1}$$

где L_- и L_+ — сужения оператора L на пространства $\mathcal{U}_L^-$ и $\mathcal{U}_L^+$ соответственно, $u^- = P_-u$, $u^+ = P_+u$. Систему (2.1) удобно рассматривать как систему

$$L_-\dot{u}^- + P_-M(u) = 0, \quad L_+\dot{u}^+ + P_+M(u) = 0, \tag{2.2}$$

определенную на множестве $\mathcal{M} = \{u \in \operatorname{dom} M : P_0M(u) = 0\}$. Как нетрудно видеть, любое решение $u = u(t)$ уравнения (1.1) с необходимостью лежит в множестве $\mathcal{M}$, т. е. $u(t) \in \mathcal{M}$ $\forall t \in [0, T]$. Для изучения множества $\mathcal{M}$ введем множество $\mathcal{N} = \{u \in \mathcal{U}_M : P_0M(u) = 0\}$. Очевидно, $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$.

Положим $P_-[\mathcal{U}_M] = \mathcal{U}_M^-$, $P_+[\mathcal{U}_M] = \mathcal{U}_M^+$. В силу конечномерности либо ядра, либо образа этих проекторов имеем $\overline{\mathcal{U}_M^- \oplus \mathcal{U}_M^+} = \mathcal{U}_M^- \oplus \mathcal{U}_M^+$.

Теорема 2.1. *Пусть $p \geq 2$. Тогда для любого $f \in \mathcal{U}_L^* \setminus \{0\}$ множество $\mathcal{N}$ является простым банаховым C^1-многообразием, моделируемым подпространством $\mathcal{U}_M^- \oplus \mathcal{U}_M^+$.*

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{U}_M$. Представим u в виде $u = v + w$, где $v \in \mathcal{U}_M^- \oplus \mathcal{U}_M^+$, а $w \in \mathcal{U}_M^0$. Фиксируем $v \in \mathcal{U}_M^- \oplus \mathcal{U}_M^+$ и исследуем множество решений уравнения

$$m(w) = P_0M(v + w) = 0, \tag{2.3}$$

где по построению оператор m действует $\mathcal{U}_M^0 \to \mathcal{U}_M^{*0}$. Заметим прежде всего, что оператор m коэрцитивен. Действительно,

$$\lim_{\|w\|_M \to \infty} \langle m(w), w \rangle / \|w\|_M = \lim_{\|w\|_M \to \infty} \langle P_0M(v + w), w \rangle / \|w\|_M = \lim_{\|w\|_M \to \infty} \langle M(v + w), w \rangle / \|w\|_M = +\infty$$

в силу сильной коэрцитивности оператора M. Далее, в силу s-монотонности оператор M строго монотонен [4]. Отсюда вытекает строгая монотонность оператора m

$$\begin{aligned}\langle m(w) - m(w'), w - w' \rangle &= \langle M(v + w) - M(v + w'), w - w' \rangle = \\ &= \langle M(v + w) - M(v + w'), (v + w) - (v - w') \rangle > 0.\end{aligned}$$

Следовательно, в силу теоремы Вишика–Минти–Браудера [8] уравнение (2.3) имеет единственное решение. Другими словами, для любого $v \in \mathcal{U}_M^- \oplus \mathcal{U}_M^+$ существует единственный вектор $w \in \mathcal{U}_M^0$ такой, что $v + w \in \mathcal{N}$.

Далее, пусть $u \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$. Представим $u = v + w$ и вернемся к уравнению (2.3). В силу s-монотонности оператора M имеем

$$\langle m_w' h, h \rangle = \langle M_u' h, h \rangle > 0 \quad \forall h \in \mathcal{U}_M^0 \setminus \{0\}.$$

Отсюда в силу теоремы о неявной функции следует существование окрестностей $\mathcal{O}_v \subset \mathcal{U}_M^- \oplus \mathcal{U}_M^+$, $\mathcal{O}_w \subset \mathcal{U}_M^0$ точек v, w соответственно и оператора $d \in C^1(\mathcal{O}_v; \mathcal{O}_w)$ такого, что при любом $v' \in \mathcal{O}_v$ вектор $v' + d(v')$ является решением уравнения (2.3). Другими словами, любая точка $u \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$ обладает окрестностью $\mathcal{O}_u \subset \mathcal{N}$ C^1-диффеоморфной окрестности $\mathcal{O}_v \subset \mathcal{U}_M^- \oplus \mathcal{U}_M^+$. C^1 -диффеоморфизм $\delta : \mathcal{O}_v \to \mathcal{O}_u$ имеет вид $\delta(v') = v' + d(v')$ $\forall v' \in \mathcal{O}_v$. В силу доказанного выше этот диффеоморфизм может быть распространен на все пространство $\mathcal{U}_M^- \oplus \mathcal{U}_M^+$. $\square$

Замечание 2.1. В силу условия $f \in \mathcal{U}_L^* \setminus \{0\}$ и единственности решения уравнения (2.3) точка $0 \notin \mathcal{N}$. В случае $0 \in \mathcal{N}$ множество $\mathcal{M}$ имеет в нуле особенность, подобную той, которую имеет график функции $y = |x|$.

Следствие 2.1. При условиях теоремы 2.1 множество $\mathcal{M}$ плотно в множестве $\mathcal{N}$.

Доказательство. Ввиду включения $\mathrm{span}\{\varphi_k\} \subset \mathrm{dom}\, M$ множество $\mathrm{dom}\, M$ плотно в $\mathcal{U}_M$. Поскольку $\mathcal{U}_M^0 \subset \mathrm{span}\{\varphi_k\}$, то множество $\mathcal{A}{=}(I-P_0)[\mathrm{dom}\, M]$ плотно в $\mathcal{U}_M^- \oplus \mathcal{U}_M^+$. Пусть $u{\in}\mathcal{N}$, по теореме 2.1 существуют окрестности $\mathcal{O}_u$, $\mathcal{O}_v$ точек u и $v = (I - P_0)u$ соответственно и диффеоморфизм $\delta : \mathcal{O}_v \to \mathcal{O}_u$, имеющий вид $\delta(v') = v' + d(v')$, где $d(v') \in \mathcal{U}_M^0$. Пусть $\{v_k\} \subset \mathcal{O}_v \cap \mathcal{A}$ — последовательность, сходящаяся к v, тогда последовательность $\{u_k\} \subset \mathcal{O}_u$, $u_k = v_k + d(v_k)$ сходится к u. По построению $u_k \in \mathrm{dom}\, M \quad \forall k \in \mathbb{N}$. $\square$

3. Фазовое пространство уравнения

Определение 3.1. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathcal{U}_M$ называется *фазовым пространством уравнения* (2.1), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (2.1) лежит в $\mathfrak{P}$, т. е. $u(t) \in \mathfrak{P} \quad \forall t \in [0, T]$;
(ii) при любом $\varphi \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (2.1), (1.2), где $u_0 = P_+\varphi$, $u_T = P_-\varphi$.

По построению множество $\mathcal{M}$ содержит все решения уравнения (2.1) и поэтому является кандидатом на роль фазового пространства. Пусть $\varphi \in \mathcal{M}$, тогда в силу следствия 2.1 точка $v = (I - P_0)\varphi \in \mathcal{A}$. Положим $u_0 = P_+v$, $u_T = P_-v$. В функции $u^- = u^-(t)$ сделаем замену $t \to T - t$ и получившуюся при этом функцию обозначим старым символом. Тогда система (2.2) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} -L_-\dot{u}^- + P_-M(u^- + u^0 + u^+) = 0,\\ L_+\dot{u}^+ + P_+M(u^- + u^0 + u^+) = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

причем задача Коши

$$u^+(0) = u_0, \quad u^-(0) = u_T \tag{3.2}$$

для системы (3.1) будет эквивалентна задаче (1.1), (1.2).

Введем оператор $\overline{L} = -L_-P_- + 0 \cdot P_0 + L_+P_+$. По построению оператор $\overline{L} : \mathcal{U}_L \to \mathcal{U}_L$ линеен, непрерывен, самосопряжен и неотрицательно определен. Учитывая равенство $P_0M(u^- + u^0 + u^+) = 0$, систему (3.1) можно редуцировать к уравнению

$$\overline{L}\dot{u} + M(u) = 0, \tag{3.3}$$

для которого в силу (3.2) имеет место задача Коши

$$u(0) = \varphi. \tag{3.4}$$

Однозначная разрешимость задачи (3.3), (3.4) была получена ранее [6]. Таким образом, доказана

Теорема 3.1. *Пусть $p \geq 2$, тогда при любых $T \in \mathbb{R}_+$, $f \in \mathcal{U}_L^* \setminus \{0\}$, $u_0 \in \mathrm{dom}\, M \cap \mathcal{U}_M^+$, $u_T \in \mathcal{U}_M^-$ существует единственное решение задачи* (2.1), (1.2).

Другими словами, множество $\mathcal{M}$ — фазовое пространство уравнения (2.1).

Замечание 3.1. Теорема 3.1 остается верной при $f{=}0$, если либо $u_0 \neq 0$, либо $u_T \neq 0$. Случай $f = 0$, $u_0 = u_T = 0$ изучен только при условии положительной определенности оператора L.

Замечание 3.2. Если $\ker L \neq \{0\}$, то фазовым пространством уравнения (2.1) служит множество $\mathrm{dom}\, M$.

Литература

1. Полубаринова-Кочина П.Я. *Теория движения грунтовых вод.* – М.: Наука, 1977. – 546 с.
2. Дзекцер Е.С. *Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью* // ДАН СССР. – 1972. – Т. 202. – № 5. – С. 1031–1033.
3. Свиридюк Г.А. *Многообразие решений одного операторного сингулярного псевдопараболического уравнения* // ДАН СССР. – 1986. – Т. 289. – № 6. – С. 1315–1318.
4. Свиридюк Г.А. *Об одной задаче для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска* // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 2. – С. 55–61.
5. Свиридюк Г.А., Семенова И.Н. *Разрешимость неоднородной задачи для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 9. – С. 1607–1611.
6. Свиридюк Г.А., Климентьев М.В. *Фазовые пространства полулинейных динамических уравнений типа Соболева с s–монотонными и сильно коэрцитивными операторами* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 11. – С. 75–82.
7. Панков А.А., Панкова Т.Е. *Нелинейные эволюционные уравнения с необратимым операторным коэффициентом при производной* // Докл. Укр. АН. – 1993. – № 9. – С. 18–20.
8. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1978. – 381 с.

Челябинский государственный университет

Поступили
первый вариант 29.05.2000
окончательный вариант 19.03.2001