И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2004 МАТЕМАТИКА № 6 (505)

УДК 519.929

В.Б. ЧЕРЕПЕННИКОВ

ОБРАТНАЯ НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В числе наиболее исследованных систем функционально-дифференциальных уравнений находятся линейные системы дифференциально-разностных уравнений (ЛС ДРУ), когда запаздывание постоянно ([1]–[5]). Во многих работах в качестве основной рассматривалась начальная задача, когда на начальном множестве тем или иным способом задавалась начальная функция. Для ЛС ДРУ было показано, что задание начальной функции гарантировало существование единственного решения как в положительном направлении оси независимой переменной, так и в отрицательном. В ряде случаев возникала необходимость найти решение, удовлетворяющее некоторым дополнительным (напр., краевым) условиям. Изучению вопросов разрешимости краевых задач для различных типов функционально-дифференциальных уравнений посвящено значительное количество работ (см. библиографию в [5]).

В последнее время в некоторых прикладных областях науки сформировалась задача для ЛС ДРУ, связанная с исследованиями начальной функции [6]. Назовем ее обратной начальной задачей для ЛС ДРУ. Она формулируется следующим образом: найти условия существования начальной абсолютно непрерывной функции такой, что порождаемое ею решение начальной задачи удовлетворяет дополнительным известным условиям, наложенным на решение и (или) его производные. В ряде работ (напр., [7], [8], [5]) аналогичная задача для определенных краевых условий формулируется как задача управления.

Исследованию обратной начальной задачи для линейных систем дифференциально-разностных уравнений посвящена данная статья.

1. Постановка задачи

Рассмотрим начальную задачу для линейной системы дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t-1) + B(t)x(t) + f(t), \quad t \in J = [0, T]; \tag{1}$$

$$x(t) = g(t), \quad t \in J_0 = [-1, 0], \tag{2}$$

где $x(t) : J_0 \cup J \to R^n$; $A(t), B(t) : J \to R^{n\times n}$; $g(t) : J_0 \to R^n$; $f(t) : J \to R^n$.

Следуя [3], введем

Определение 1. Вещественная матрица $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, принадлежит классу C^k на $J^* = [t_1, t_2]$ (будем писать $A(t) \in C^k[J^*]$), если функции $\{a_{ij}(t)\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, принадлежат классу C^k на (t_1, t_2) и имеют в точках t_1 и t_2 соответственно левые и правые производные порядка k и если функции $a_{ij}^{(k)}(t)$, определенные таким образом на $t_1 \le t \le t_2$, непрерывны справа в точке t_1 и слева в точке t_2.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00203.

С учетом данного определения под решением задачи (1), (2) понимается функция $x(t) \in C^1[J]$, удовлетворяющая линейной системе дифференциально-разностных уравнений в (1) и совпадающая с начальной функцией $g(t) \in C^0[J_0]$ на J_0 [4].

Установление условий существования и способов нахождения единственного абсолютно непрерывного решения $x(t)$ по заданной начальной функции $g(t)$ составляет прямую начальную задачу для линейной системы дифференциально-разностных уравнений (1), (2).

Дадим теперь определение обратной начальной задачи для линейной системы дифференциально-разностных уравнений (1). Пусть известны значения функции $x(t)$ и (или) ее производных $x^{(n)}(t)$, $n = \overline{1,p}$, в некоторых фиксированных точках $t \in J_0 \cup J$.

$$\begin{aligned} &x(t_i^0) = x_i^0, \quad i = \overline{1,m}; \\ &\dot{x}(t_j^1) = x_j^1, \quad j = \overline{1,l}; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x^{(p)}(t_k^p) = x_k^p, \quad k = \overline{1,r}. \end{aligned} \tag{3}$$

Замечание 1. В дальнейшем будем считать, что в конечных последовательностях $\{t_i^0\}_{i=1}^m$, $\{t_j^1\}_{j=1}^l, \dots, \{t_k^p\}_{k=1}^r$ выполняются условия упорядоченности, т.е. $t_j^i < t_{j+1}^i$, $i = \overline{0,p}$. При этом случаи, когда $t_\gamma^\alpha = t_\delta^\beta$ $(\alpha \neq \beta)$, не исключаются.

Отметим, что в зависимости от конкретных значений точек t_s^k данные условия могут включать, в частности, начальные, начально-краевые или краевые условия.

Определение 2. Задачу нахождения условий существования и способов вычисления такой начальной функции $g(t)$, $t \in J_0$, что решение $x(t)$ начальной задачи (1), (2) удовлетворяет условиям (3), будем называть *обратной начальной задачей* для данной линейной системы дифференциально-разностных уравнений.

В связи с определением 2 следует выяснить: при каких условиях существует такая начальная функция и какими свойствами она обладает?

2. Основные результаты

Перепишем задачу (1), (2) с учетом (3) в виде обратной начальной задачи

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t-1) + B(t)x(t) + f(t), \quad t \in J = [0,T]; \tag{4}$$

$$x(t) = g(t), \quad t \in J_0 = [-1,0], \tag{5}$$

$$x(t_i^0) = x_i^0, \quad i = \overline{1,m}; \quad \dot{x}(t_j^1) = x_j^1, \quad j = \overline{1,l}; \dots; \quad x^{(p)}(t_k^p) = x_i^p, \quad k = \overline{1,r}; \tag{6}$$

$$t_j^i \in J_0 \cup J : i = 0, \quad j = \overline{1,m}; \quad i = 1, \quad j = \overline{1,m}; \dots; \quad i = p, \; j = \overline{1,r};$$

$$T = \max\{1, t_m^0, t_l^1, \dots, t_r^p\}. \tag{7}$$

Представим промежуток J в (4) следующим образом:

$$J = \bigcup_{n=1}^{]T[+1} J_n, \quad J_n = \begin{cases} [n-1,\ n], & n = \overline{1,]T[}; \\ [\ ]T[,\ T], & n =]T[+1. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь $]\cdot[$ — целая часть числа.

Определение 3. Решение $x(t)$ задачи (4)–(6) на отрезке J_n будем обозначать $x_n(t)$.

Далее, из всей совокупности фиксированных точек, заданных на оси t согласно (6), выделим те, которые принадлежат некоторому отрезку J_m, и пусть α_m — наибольший из верхних индексов, который встречается среди обозначений, принятых для выделенных точек.

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда на решение $x(t)$ накладываются дополнительные условия

$$x_m(t) \in C^{s_m}[J_m], \quad s_m \geq \alpha_m. \tag{9}$$

Пусть в (6) χ — наибольший порядок производной функции $x(t)$ в точках $t \in J$, т. е.

$$\chi = \max\{i \mid t_j^i \in J\}, \tag{10}$$

и

$$\chi_0 = \max\{i \mid t_j^i \in J_0\}. \tag{11}$$

Лемма 1. *Пусть для задачи* (4)–(6)

1. *матрицы* $A(t)$, $B(t)$ *и вектор* $f(t)$ *принадлежат с учетом* (10) *классу* $C^0[J]$, *если* $\chi = 0, 1$, *и* $C^{\chi-1}[J]$, *если* $\chi \geq 2$;
2. $\overline{\sigma} = \max\limits_{s}\{0, (s-1-]t_1^s[)\}$, $s = \overline{0, \chi}$.

Тогда каждая начальная функция $g(t)$, *принадлежащая классу* $C^\sigma[J_0]$, *где* $\sigma \geq \max\{\chi_0, \overline{\sigma}\}$, *порождает решение* $x(t)$ *такое, что на всех промежутках* J_n, $n = \overline{1,]T[+1}$, *оно удовлетворяет требуемым в силу* (6) *условиям дифференцируемости.*

Доказательство. Рассмотрим начальную задачу (4), (5) и пусть некоторая начальная функция $g(t)$ принадлежит классу $C^k[J_0]$. С учетом условия 1 леммы из известной теоремы о сглаживаемости решений начальной задачи при возрастании аргумента ([1], с. 53) вытекает

$$x(t) \in C^{k+1}[J_1], x(t) \in C^{k+2}[J_2], \ldots, x(t) \in C^{k+]T[+1}[J_{]T[+1}].$$

Пусть для одного из условий в (6) требуется существование производной $x^{(s)}(t_1^s)$, где точка $t_1^s \in J_{]t_1^s[+1}$. Поскольку $x^{(s)}(t_1^s)$ принадлежит отрезку $]t_1^s[+1$, то начальная функция $g(t) \in C^k[J_0]$ на этом отрезке будет порождать решение $\widetilde{x}(t)$, принадлежащее не ниже, чем классу $C^{k+]t_1^s[+1}[J_{]t_1^s[+1}]$. Тогда если $k \geq \max\{0, s-]t_1^s[-1\}$, то начальная функция $g(t) \in C^k[J_0]$ порождает решение $\widetilde{x}(t) \in C^s[J_{]t_1^s[+1}]$. А так как $t_i^s < t_{i+1}^s$, это означает, что данное условие будет выполняться при всех $t_i^s \in J$, $i = 1, 2, \ldots$ Проводя аналогичные выкладки для $s = 1, 2, \ldots, \chi$ и принимая согласно (11) и условию 2 леммы $k \geq \max\{\chi_0, \overline{\sigma}\}$, приходим к утверждению леммы.

Следствие 1. Поскольку в силу определения 1 производные функции $x(t)$ при целочисленных значениях аргумента t односторонние, если в начальной точке $t = 0$ имеют место соотношения

$$g^{(s)}(t)|_{t\to 0_-} = x^{(s)}(t)|_{t \to 0_+}, \quad s = \overline{0, m},$$

то при целочисленных значениях аргумента в силу упомянутой выше теоремы о сглаживании решений и условия 1 леммы вытекает, что решение $x(t)$ при $t_* =]t[, t \in J$, имеет $k = \min\{m+]t[, \chi\}$ непрерывных производных.

На некотором промежутке $J' = [a, b]$ рассмотрим совокупность вещественных матриц $H_i(t) : J' \to R^{n\times n}$, $i = \overline{1, k}$.

Определение 4. Вещественные матрицы $H_i(t)$, $i = \overline{1, k}$, будем называть *линейно независимыми*, если соотношение

$$\sum_{i=1}^{k} H_i(t) c_i = \Theta \quad \forall t \in J',$$

где $\Theta \in R^{n\times n}$ — нулевая матрица, а $c_i \in R^1$ — некоторые постоянные, справедливо тогда и только тогда, когда $c_i = 0$, $i = \overline{1, k}$.

Зададим функцию

$$x_0(t) = \sum_{u=1}^{G} \Psi_0^u(t) g_u, \quad t \in J_0. \tag{12}$$

Здесь $\Psi_0^u(t) : J_0 \to R^{n\times n}$ — некоторые известные вещественные матрицы, g_u — неизвестные постоянные векторы.

Определение 5. Линейно независимые матрицы $\Psi_0^u(t)$, $u = \overline{1, G}$, которые для исследуемой задачи (4)–(6) с учетом леммы 1 выбираются из класса $C^\sigma[J_0]$, будем называть *опорными матрицами* решения $x(t)$.

Рассматривая функцию $x_0(t)$ в виде (12) как начальную функцию для задачи (4)–(6), найдем решение этой задачи на $J_1 = [0, 1]$.

Перепишем (4)–(6) следующим образом:

$$\dot{x}(t) = B(t)x(t) + A(t)g(t-1) + f(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in J_1.$$

Поскольку эти соотношения представляют собой задачу Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение данной задачи на J_1 представляется формулой [3]

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t C(t,s)[A(s)g(s-1) + f(s)]ds, \tag{13}$$

где $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x}(t) = B(t)x(t)$, а $C(t,s) = X(t)X^{-1}(s)$ — матрица Коши.

Учитывая (12), преобразуем слагаемые в формуле (13)

$$X(t)x(0) = X(t) \sum_{u=1}^{G} \Psi_0^u(0) g_u;$$

$$\int_0^t C(t,s)[A(s)g(s-1) + f(s)]ds = \int_0^t C(t,s)A(s) \sum_{u=1}^{G} \Psi_0^u(s-1) g_u ds + \int_0^t C(t,s)f(s)ds =$$

$$= \sum_{u=1}^{G} \left[\int_0^t C(t,s)A(s)\Psi_0^u(s-1)ds \right] g_u + \int_0^t C(t,s)f(s)ds.$$

Тогда в силу определения 3 и этих соотношений представим (13) в виде

$$x_1(t) = x(t) = \sum_{u=1}^{G} \Psi_1^u(t) g_u + f_1(t), \quad t \in J_1,$$

где

$$\Psi_1^u(t) = X(t)\Psi_0^u(0) + \int_0^t C(t,s)A(s)\Psi_0^u(s-1)ds;$$

$$f_1(t) = \int_0^t C(t,s)f(s)ds.$$

Продолжая теперь решение аналогичным образом на J_2, J_3 и т. д., для $J_M = [M-1, M]$ имеем

$$x_M(t) = \sum_{u=1}^{G} \Psi_M^u(t) g_u + f_M(t), \quad t \in J_M. \tag{14}$$

Здесь

$$\Psi_M^u(t) = X(t)\Psi_{M-1}^u(M-1) + \int_{M-1}^{t} C(t,s)A(s)\Psi_{M-1}^u(s-1)ds;$$

$$f_M(t) = \int_{M-1}^{t} C(t,s)[f_{M-1}(s) + f(s)]ds.$$

Замечание 2. В соответствии с определением 5 решение $x_M(t)$ дифференцируемо на J_M согласованное с условиями (6) число раз, т.е.

$$x_M^{(s)}(t) = \sum_{u=1}^{G} \frac{d^s}{dt^s}\Psi_M^u(t)g_u + f_M^{(s)}(t).$$

Переходим к нахождению начальной функции $g(t)$. С учетом определения 1 и (12) один из подходов к решению обратной задачи (4)–(6) может быть сформулирован следующим образом: при каких условиях существует представление $g(t)$ в виде (12) и как определить неизвестные коэффициенты g_u?

Для этой цели воспользуемся условиями (6). Введем функцию

$$\delta(t) = 0 \ \text{ при } \ t \le 0; \quad \delta(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t =]t[; \\ ]t[+1, & \text{если } t \ne]t[, \end{cases} \ \text{ при } \ t > 0.$$

Поскольку каждая точка $t_s^k \in J_{\delta(t_s^k)}$, согласно (14) и замечанию 2 из (6) получаем

$$x_{\delta(t_i^0)}(t_i^0) = \sum_{n=1}^{G} \Psi_{\delta(t_i^0)}^n(t_i^0)g_n + f_{\delta(t_i^0)}(t_i^0) = x_i^0, \quad i = \overline{1,m};$$

$$\dot{x}_{\delta(t_j^1)}(t_j^1) = \sum_{n=1}^{G} \frac{d}{dt}\Psi_{\delta(t_j^1)}^n(t_j^1)g_n + \dot{f}_{\delta(t_j^1)}(t_j^1) = x_j^1, \quad j = \overline{1,l};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{\delta(t_k^p)}^{(p)}(t_k^p) = \sum_{n=1}^{G} \frac{d^p}{dt^p}\Psi_{\delta(t_k^p)}^n(t_k^p)g_n + f_{\delta(t_k^p)}^{(p)}(t_k^p) = x_k^p, \quad k = \overline{1,r}. \tag{15}$$

Замечание 3. Здесь и далее при $t < 0$ функцию $f_0(t)$ полагаем равной нулю.

Обозначая

$$A_{i\,s} = \Psi_{\delta(t_i^0)}^s(t_i^0), \quad i = \overline{1,m}, \quad s = \overline{1,G};$$

$$A_{(m+j)s} = \frac{d}{dt}\Psi_{\delta(t_j^1)}^s(t_j^1), \quad j = \overline{1,l}, \quad s = \overline{1,G};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_{(m+l+\dots+k)s} = \frac{d^p}{dt^p}\Psi_{\delta(t_k^p)}^s(t_k^p), \quad k = \overline{1,r}, \quad s = \overline{1,G}; \tag{16}$$

$$B_i = x_i^0 - f_{\delta(t_i^0)}(t_i^0), \quad i = \overline{1,m};$$

$$B_{m+j} = x_i^1 - \dot{f}_{\delta(t_j^1)}(t_j^1), \quad j = \overline{1,l};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$B_{m+j+\dots+k} = x_k^p - f_{\delta(t_k^p)}^{(p)}(t_k^p), \quad k = \overline{1,r}, \tag{17}$$

перепишем соотношение (15) в виде блочной линейной системы алгебраических уравнений относительно неизвестных векторов g_n:

$$Ag = B, \tag{18}$$

где $A = \{A_{ij}\}$, $i = \overline{1, m+l+\cdots+r}$, $j = \overline{1,G}$, — блочная матрица; $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_G\}^T$ и $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_{m+l+\cdots+r}\}^T$ — векторы, индекс T означает транспонирование. Таким образом, решение обратной начальной задачи (4)–(6) свелось к неоднородной линейной системе алгебраических уравнений.

Обозначим

$$Q = m + l + \cdots + r. \tag{19}$$

Тогда, поскольку матрицы $A_{ij} \in R^{n\times n}$, а $g_n \in R^n$, матрица A будет прямоугольной размера $nQ \times nG$ (квадратной, если $Q = G$), а векторы g и B будут иметь соответственно размеры nG и nQ.

Анализ линейной системы (18) начнем с выяснения вопроса о совместности системы. Пусть

$$\overline{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1G} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2G} & B_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{Q1} & A_{Q2} & \cdots & A_{QG} & B_Q \end{vmatrix}$$

будет расширенной матрицей линейной системы (18). Тогда на основании теоремы Кронекера–Капели система линейных уравнений (18) тогда и только тогда совместна, когда ранг расширенной матрицы $\overline{A}$ равен рангу матрицы A.

Следствие 2. Если $\operatorname{rank} \overline{A} > \operatorname{rank} A$, то обратная начальная задача для линейной системы дифференциально-разностных уравнений (4)–(6) с выбранными в (12) опорными матрицами $\Psi_0^n(t)$, $n = \overline{1,G}$, неразрешима.

Такой случай может иметь место, когда число линейно независимых опорных матриц $\Psi_0^n(t)$, $t \in J_0$, меньше числа заданных согласно (6) условий. С другой стороны, несовместность линейной системы может быть вызвана некорректными условиями (6), например, если в одной и той же точке заданы два или более значений решения $x(t)$ или его производных.

Рассмотрим теперь случай, когда линейная система (18) совместна.

Теорема 1. *Пусть для задачи* (4)–(6) *справедливы следующие условия*:

1. *матрицы $A(t)$, $B(t)$ и вектор $f(t)$ удовлетворяют условию* 1 *леммы* 1;
2. *опорные матрицы $\Psi_0^n(t)$, $n = \overline{1,G}$, в* (9) *с учетом леммы* 1 *принадлежат классу $C^\sigma[J_0]$*;
3. *линейная система* (18), *порожденная в силу условий* (6) *решением $x(t)$, совместна и, следовательно, число опорных матриц удовлетворяет неравенству $G \geq \frac{1}{n}\operatorname{rank} A$.*

Тогда обратная начальная задача (4)–(6) *разрешима и имеет решение в виде начальной функции*

$$g(t) = \sum_{u=1}^{G} \Psi_0^u(t) g_u, \quad g(t) \in C^\sigma[J_0]. \tag{20}$$

При этом число решений бесконечно, если $G > \frac{1}{n}\operatorname{rank} A$, и представление решения в виде (20) *единственно, если $G = \frac{1}{n}\operatorname{rank} A$.*

Доказательство. Принимая во внимание (19), рассмотрим конечное множество линейно независимых опорных матриц $\{\Psi_0^n(t)\}_{n=1}^G$, где $G \geq Q$. На основании условий 1–3 теоремы, леммы 1 и замечания 1 в силу условий (6) получаем совместную линейную систему алгебраических уравнений (18) размера $nQ \times nG$ относительно неизвестных векторов g_n.

Раскрывая блоки A_{ij} матрицы A, а также векторы g и B, перепишем (18) в виде

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\overline{G}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\overline{G}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\overline{Q}1} & a_{\overline{Q}2} & \cdots & a_{\overline{Q}\overline{G}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{g}_1 \\ \overline{g}_2 \\ \vdots \\ \overline{g}_{\overline{G}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{\overline{G}} \end{vmatrix}.$$

Здесь $\overline{G} = nG$, $\overline{Q} = nQ$.

Обозначим ранг матрицы A через R. Известно, что если $R < \overline{Q}$, то в системе $\overline{Q}-R$ строк являются линейно зависимыми. Тогда выбираем R линейно независимых строк, оставляем в системе уравнения, коэффициенты которых вошли в выбранные строки, и в левой части этих уравнений оставляем такие R неизвестных коэффициентов $\overline{g}_n$ (пусть это $\overline{g}_1, \overline{g}_2, \ldots, \overline{g}_R$), что определитель коэффициентов при них отличен от нуля, а остальные неизвестные коэффициенты объявляем свободными и переносим в правые части уравнений,

$$\begin{cases} a_{11}\overline{g}_1 + a_{12}\overline{g}_2 + \cdots + a_{1R}\overline{g}_R = b_1 - a_{1(R+1)}\overline{g}_{R+1} - \cdots - a_{1\overline{G}}\overline{g}_{\overline{G}}, \\ a_{21}\overline{g}_1 + a_{22}\overline{g}_2 + \cdots + a_{2R}\overline{g}_R = b_2 - a_{2(R+1)}\overline{g}_{R+1} - \cdots - a_{2\overline{G}}\overline{g}_{\overline{G}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{R1}\overline{g}_1 + a_{R2}\overline{g}_2 + \cdots + a_{RR}\overline{g}_R = b_R - a_{R(R+1)}\overline{g}_{R+1} - \cdots - a_{R\overline{G}}\overline{g}_{\overline{G}}. \end{cases} \tag{21}$$

Так как в этой системе ранг матрицы равен R, то, придавая для каждого i неизвестным коэффициентам $\overline{g}^i_{R+j}$, $j = \overline{1, \overline{G} - R}$, произвольные числовые значения и разрешая систему (21) относительно коэффициентов $\overline{g}^i_k$, $k = \overline{1, R}$, получаем согласно (20) соответствующее решение $g^i(t)$. Отсюда вытекает, что множество решений обратной начальной задачи (4)–(6) бесконечно. С другой стороны, если в (18) число линейно независимых матриц $\Psi^n_0(t)$ таково, что $G = \frac{1}{n}\operatorname{rank} A$, то линейная система (18) имеет единственное решение. Тогда представление решения $g(t)$ обратной начальной задачи (4)–(6) в виде (20) будет единственным. □

3. Приложения

Рассмотрим обратную начальную задачу для скалярного дифференциально-разностного уравнения запаздывающего типа с линейным коэффициентом

$$\dot{x}(t) = (a_0 + a_1 t)x(t-1), \quad t \in J = [0, T]; \quad x(t) = g(t), \quad t \in J_0 = [-1, 0], \tag{22}$$

и условиями

$$x(0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2, \quad x(t_3) = x_3. \tag{23}$$

Согласно условиям теоремы 1 выбираем линейно независимые опорные функции[1] $\psi^i_0(t) = t^i$, $i = \overline{0, 3}$, и ищем решение обратной задачи (22), (23) в виде

$$g(t) = \sum_{i=0}^{3} \psi^i_0(t) g_i = \sum_{i=0}^{3} g_i t^i, \quad t \in J_0. \tag{24}$$

Найдем теперь решение $x(t)$, порождаемое этой начальной функцией. В силу определения 3, формул (8) и (14) для $t \in J_m$ имеем

$$x_m(t) = \sum_{i=0}^{3} \psi^i_m(t) g_i, \tag{25}$$

[1]В скалярном случае опорные матрицы представляют собой скалярные функции. Поэтому здесь вместо термина “опорные матрицы” будем использовать термин “опорные функции”.

где

$$\psi_m^i(t) = \psi_{m-1}^i(m-1) + \int_{m-1}^t (a_0 + a_1 t)\psi_{m-1}^i(t-1)dt. \tag{26}$$

Из последней формулы вытекает, что $\psi_m^i(t)$ будет полиномом степени $2m+i$. Представим его в виде

$$\psi_m^i(t) = \sum_{n=0}^{2m+i} \psi_{mn}^i t^n. \tag{27}$$

Тогда

$$\psi_m^i(t-1) = \sum_{n=0}^{2m+i} \psi_{mn}^i (t-1)^n = \sum_{n=0}^{2m+i} b_{mn}^i t^n. \tag{28}$$

Здесь

$$b_{mn}^i = \sum_{j=0}^{2m+i-n} (-1)^j C_{n+j}^n \psi_{mn+j}^i,$$

а C_{n+j}^n — биномиальные коэффициенты.

Учитывая (28), преобразуем интеграл в (26)

$$\int_{m-1}^t (a_0 + a_1 t)\psi_{m-1}^i(t-1)dt = \int_{m-1}^t (a_0 + a_1 t) \sum_{n=0}^{2(m-1)+i} b_{(m-1)n}^i t^n dt = \int_{m-1}^t \left(\sum_{n=0}^{2m+i-1} D_{mn}^i t^n \right) dt. \tag{29}$$

В этом выражении при $i = 0$

$$D_{10}^0 = a_0, \quad D_{11}^0 = a_1, \tag{30}$$

а при $i \geq 1$

$$D_{mn}^i = \begin{cases} a_0 b_{(m-1)0}^i, & n = 0; \\ a_0 b_{(m-1)n}^i + a_1 b_{(m-1)(n-1)}^i, & n = \overline{1, 2(m-1)+i}; \\ a_1 b_{(m-1)(2(m-1)+i)}^i, & n = 2m+i-1. \end{cases} \tag{31}$$

Значение интеграла (29) определяется формулой

$$\int_{m-1}^t \left(\sum_{n=0}^{2m+i-1} D_{mn}^i t^n \right) dt = -\sum_{n=1}^{2m+i} \frac{(m-1)^n}{n} D_{m(n-1)}^i + \sum_{n=1}^{2m+i} \frac{1}{n} D_{m(n-1)}^i t^n, \quad m \geq 1.$$

Подставляя полученное выражение в (26), имеем

$$\psi_m^i(t) = \psi_{m-1}^i(m-1) - \sum_{n=1}^{2m+i} \frac{(m-1)^n}{n} D_{m(n-1)}^i + \sum_{n=1}^{2m+i} \frac{1}{n} D_{m(n-1)}^i t^n.$$

Сравнивая это соотношение с (27), получаем, что в последней формуле коэффициенты ψ_{mn}^i представляются в виде

$$\psi_{mn}^i = \begin{cases} \psi_{m-1}^i(m-1) - \sum\limits_{n=1}^{2m+i} \frac{(m-1)^n}{n} D_{m(n-1)}^i, & n = 0; \\ \frac{1}{n} D_{m(n-1)}^i, & n = \overline{1, 2m+i}. \end{cases} \tag{32}$$

Итак, с учетом (7), (8) и (25) данная формула позволяет последовательно вычислять порождаемое решение $x(t)$ на $J = \bigcup\limits_{n=1}^{]T[+1} J_n$. Действительно, для $J_1 = [0, 1]$ согласно (32) имеем

$$\psi_{10}^i = \psi_0^i(0); \quad \psi_{1n}^i = \frac{1}{n} D_{1(n-1)}^i, \quad n = \overline{1, 2+i}; \quad i = \overline{0, 3},$$

где значение $D_{1(n-1)}^i$, $i = \overline{0, 3}$, определяется по (30) и (31). Тогда в соответствии с (32) вычисляются функции $\psi_1^i(t)$, $i = \overline{0, 3}$, и на основании (25) находится порождаемое решение

$$x_1(t) = \sum_{i=0}^{3} \psi_1^i(t) g_i, \quad t \in J_1.$$

Отсюда для $t = 1$ получаем $x_1(1) = \sum\limits_{i=0}^{3} \psi_1^i(1) g_i$. Переходим на следующий отрезок $J_2 = [1, 2]$. Здесь в соответствии с (32)

$$\psi_{2n}^i = \begin{cases} \psi_1^i(1) - \sum\limits_{n=1}^{4+i} \frac{1}{n} D_{2(n-1)}^i, & n = 0; \\ \frac{1}{n} D_{2(n-1)}^i, & n = \overline{1, 4+i}. \end{cases}$$

Далее подобно выше описанному вычисляются функции $\psi_2^i(t)$, $i = \overline{0, 3}$, и порождаемое решение $x_2(t)$ для $t \in J_2$. Таким же образом получаем решения $x_n(t)$ на всех отрезках J_n, $n = \overline{3,]T[+1}$.

Переходим к определению неизвестных коэффициентов g_n. Отметим, что в силу (24) и первого из условий в (23) $g_0 = x(0) = x_0$. Для точек t_1, t_2 и t_3 согласно (23) и (15) имеем

$$x_{\delta(t_s)}(t_s) = \sum_{i=0}^{3} \psi_{\delta(t_s)}^i(t_s) g_i = x_s, \quad s = \overline{1, 3}.$$

Поскольку коэффициент g_0 известен, перепишем данное соотношение в виде линейной системы (18)

$$\begin{cases} a_{11} g_1 + a_{12} g_2 + a_{13} g_3 = b_1, \\ a_{21} g_1 + a_{22} g_2 + a_{23} g_3 = b_2, \\ a_{31} g_1 + a_{32} g_2 + a_{33} g_3 = b_3, \end{cases} \tag{33}$$

где в соответствии с (16) и (17)

$$a_{ij} = \psi_{\delta(t_i)}^j(t_i), \quad i, j = \overline{1, 3}; \tag{34}$$

$$b_i = x_i - \psi_{\delta(t_i)}^0(t_i) x_0, \quad i = \overline{1, 3}. \tag{35}$$

Если система (33) совместна, то, разрешая ее относительно коэффициентов g_1, g_2 и g_3, находим решение обратной задачи (22), (23).

Пример 1. Рассмотрим сначала известное дифференциально-разностное уравнение, когда в (22) $a_0 = 1$, а $a_1 = 0$, т. е.

$$\dot{x}(t) = x(t-1), \quad t \in J = [0, 3]; \quad x(t) = g(t), \quad t \in J_0 = [-1, 0], \tag{36}$$

с условиями

$$x(0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2, \quad x(t_3) = x_3. \tag{37}$$

Согласно (32) и (27) определим функции $\psi_n^i(t)$ и их значения в граничных точках. Результаты вычислений приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

i	$\psi_1^i(t)$	$\psi_1^i(1)$	$\psi_2^i(t)$	$\psi_2^i(2)$
0	$1+t$	2	$\frac{3}{2}+\frac{t^2}{2}$	$\frac{7}{2}$
1	$-t+\frac{t^2}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{6}+\frac{3}{2}t-t^2+\frac{t^3}{6}$	$-\frac{5}{6}$
2	$t-t^2+\frac{t^3}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{4}-\frac{7}{3}t+2t^2-\frac{2}{3}t^3+\frac{t^4}{12}$	$\frac{7}{12}$
3	$-t+\frac{3}{2}t^2-t^3+\frac{t^4}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{31}{20}+\frac{15}{4}t-4t^2+2t^3-\frac{t^4}{2}+\frac{t^5}{20}$	$-\frac{9}{20}$

Таблица 2

i	$\psi_3^i(t)$	$\psi_3^i(3)$
0	$\frac{1}{6}+2t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}$	$\frac{37}{6}$
1	$\frac{13}{6}-\frac{23}{6}t+2t^2-\frac{t^3}{2}+\frac{t^4}{24}$	$-\frac{35}{24}$
2	$-\frac{197}{60}+\frac{19}{3}t-\frac{13}{3}t^2+\frac{3}{2}t^3-\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{60}$	$\frac{61}{60}$
3	$\frac{331}{60}-\frac{237}{20}t+10t^2-\frac{9}{2}t^3+\frac{9}{8}t^4-\frac{3}{20}t^5+\frac{t^6}{120}$	$-\frac{47}{60}$

Пусть известны значения решения $x(t)$ в точках $t_i = i$, $i=\overline{1,3}$. Тогда с учетом (34) и (35) перепишем (33) в виде

$$\begin{cases} \psi_1^1(1)g_1+\psi_1^2(1)g_2+\psi_1^3(1)g_3 = x_1-\psi_1^0(1)x_0, \\ \psi_2^1(2)g_1+\psi_2^2(2)g_2+\psi_2^3(2)g_3 = x_2-\psi_2^0(2)x_0, \\ \psi_3^1(3)g_1+\psi_3^2(3)g_2+\psi_3^3(3)g_3 = x_3-\psi_3^0(3)x_0. \end{cases} \tag{38}$$

Подставляя сюда данные из табл. 1 и 2, приходим к линейной системе

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}g_1+\frac{1}{3}g_2-\frac{1}{4}g_3 = C_1, \\ -\frac{5}{6}g_1+\frac{7}{12}g_2-\frac{9}{20}g_3 = C_2, \\ -\frac{35}{24}g_1+\frac{61}{60}g_2-\frac{47}{60}g_3 = C_3, \end{cases} \tag{39}$$

где $C_1 = x_1-2x_0$, $C_2 = x_2-\frac{7}{2}x_0$, $C_3 = x_3-\frac{37}{6}x_0$.

Поскольку определитель этой системы $\det A = 1$ отличен от нуля, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\overline{A} = 3$ и число линейно независимых опорных функций $\psi_n^0(t)$ равно трем, задача (36), (37) удовлетворяет условиям теоремы 1 и, следовательно, имеет единственное решение. Разрешая (39) относительно неизвестных коэффициентов g_n, получаем

$$\begin{aligned} g_1 &= 48x_1+600x_2-360x_3+24x_0, \\ g_2 &= 300x_1+2340x_2-1440x_3+90x_0, \\ g_3 &= 300x_1+1920x_2-1200x_3+80x_0. \end{aligned}$$

Так как согласно (23) и (24) $g_0 = x_0$, данные соотношения однозначно определяют начальную функцию $g(t) = \sum\limits_{n=0}^{3} g_n t^n$, порождающую решение $x(t)$ задачи (36), (37).

Случай 1. Вернемся к линейной системе (39) и рассмотрим случай, когда в (37)

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{7}{2}, \quad x_3 = \frac{37}{6}.$$

При этом $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Из (39) вытекает, что единственным решением здесь будет тривиальное решение, т. е. $g_1 = g_2 = g_3 = 0$. Тогда $g(t) = g_0 = x_0 = 1$. Эта начальная функция порождает известное решение начальной задачи (36), (37)

$$x_1(t) = 1 + t, \qquad t \in J_1 = [0, 1];$$

$$x_2(t) = 1 + t + \frac{(t-1)^2}{2}, \qquad t \in J_2 = [1, 2];$$

$$x_3(t) = 1 + t + \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{(t-2)^3}{6}, \quad t \in J_3 = [2, 3].$$

Графики начальной функции $g(t)$ и этого решения приведены на рис. 1 и обозначены сплошной линией.

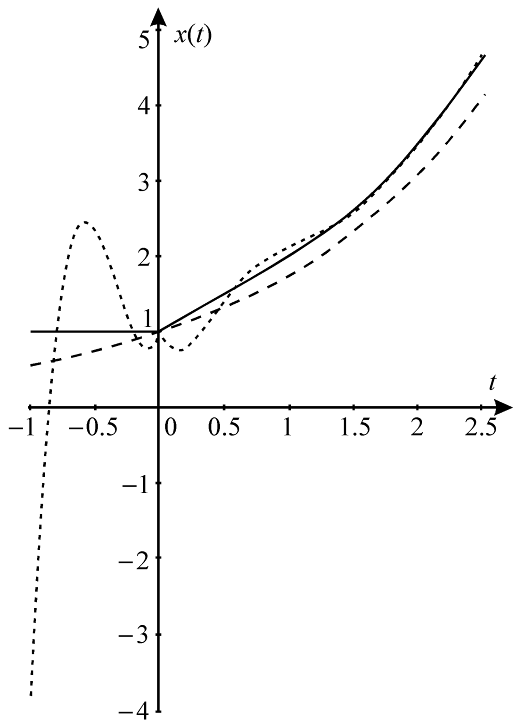

Рис. 1

Исследуем зависимость начальной функции от изменения одного из данных, например, x_1.

Случай 2. Положим в (37)

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 2{,}1, \quad x_2 = 3{,}5, \quad x_3 = 6{,}16666.$$

Согласно (38) $g_1 = 4{,}8$, $g_2 = g_3 = 30$ и

$$g(t) = 1 + 4{,}8t + 30t^2 + 30t^3.$$

Соответственно, для $x(t)$ на J имеем

$$x_1(t) = 1 - 3{,}8t + 17{,}4t^2 - 20t^3 + 7{,}5t^4,$$

$$x_2(t) = -13{,}1 + 49{,}7t - 64{,}3t^2 + 40{,}8t^3 - 12{,}5t^4 + 1{,}5t^5,$$

$$x_3(t) = 77{,}5666 - 181{,}9t + 179{,}1t^2 - 92{,}2333t^3 + 26{,}45t^4 - 4t^5 + 0{,}25t^6.$$

Графики $g(t)$ и $x(t)$ обозначены на рис. 1 коротким пунктиром.

Исследуем обратную начальную задачу с условиями, наложенными не только на решение, но и на его производную.

Пример 2. Рассмотрим задачу (36) с условиями равенства производных в точке $t = 0$ у начальной функции и порождаемого решения $x(t)$. Для этого перепишем (36) в виде

$$\dot{x}(t) = x(t-1), \quad t \in J = [0,1]; \quad x(t) = g(t), \quad t \in J_0 = [-1,0]; \tag{40}$$

$$x(0) = x_0 = 1; \quad x^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) \;\text{ при }\; t = 0, \quad n = \overline{1,3}. \tag{41}$$

Так же, как в предыдущем случае, отметим, что здесь функции $x(t)$ и $g(t)$ имеют производные до третьего порядка включительно. При этом с учетом (24) $g(0) = x_0 = 1$, $g^{(n)}(0) = n!g_n$, $n = \overline{1,3}$, а производные $x_1^{(n)}(0)$ вычисляются согласно формуле (15) и табл. 1. Значения для данной задачи производных функций $\psi_1^i(t)$, $i = \overline{0,3}$, при $t = 0$, определяющих $x_1^{(n)}(0)$, приведены в табл. 3.

Таблица 3

i	$\frac{d}{dt}\psi_1^i(0)$	$\frac{d^2}{dt^2}\psi_1^i(0)$	$\frac{d^3}{dt^3}\psi_1^i(0)$
0	1	0	0
1	-1	1	0
2	1	-2	2
3	-1	3	-6

Далее из условий (41) получаем

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}(\psi_1^1(0)g_1 + \psi_1^2(0)g_2 + \psi_1^3(0)g_3) = g_1 - \frac{d}{dt}\psi_1^0(0),\\
\frac{d^2}{dt^2}(\psi_1^1(0)g_1 + \psi_1^2(0)g_2 + \psi_1^3(0)g_3) = 2g_2 - \frac{d^2}{dt^2}\psi_1^0(0),\\
\frac{d^3}{dt^3}(\psi_1^1(0)g_1 + \psi_1^2(0)g_2 + \psi_1^3(0)g_3) = 6g_3 - \frac{d^3}{dt^3}\psi_1^0(0).
\end{gathered}$$

Подставляя данные из табл. 3, приходим к следующей линейной системе относительно неизвестных коэффициентов g_n:

$$\begin{cases} -2g_1 + \;\; g_2 - \;\; g_3 = -1,\\ g_1 - 4g_2 + 3g_3 = 0,\\ g_2 - 6g_3 = 0. \end{cases}$$

Так как определитель этой системы $\det A = -45$, она однозначно разрешима:

$$g_1 = 0{,}567567, \quad g_2 = 0{,}162162, \quad g_3 = 0{,}027027.$$

Тогда в силу теоремы 1 обратная начальная задача (40), (41) имеет единственное решение в виде полинома третьей степени

$$g(t) = 1 + 0{,}567567t + 0{,}162162t^2 + 0{,}027027t^3, \tag{42}$$

а порождаемое этой начальной функцией решение на основании (25) и табл. 1 представляется формулой

$$x_1(t) = \sum_{n=0}^{4} x_n^1 t^n = 1 + 0{,}567567t + 0{,}162162t^2 + 0{,}027027t^3 + 0{,}006757t^4. \tag{43}$$

Отметим, что $x_n^1 = g_n$, $n = \overline{0,3}$.

Графики функций $x_1(t)$ и $g(t)$ приведены на рис. 1 (длинный пунктир).

Остановимся подробнее на результатах этого примера. Как известно, начальная задача

$$\dot{x}(t) = x(t-1), \quad x(0) = x_0 = 1, \quad t \in J_\infty = (-\infty, \infty),$$

имеет частное аналитическое решение, соответствующее вещественному корню характеристического квазиполинома $k = e^{-k}$, который получается при подстановке $x(t) = x_0 e^{kt}$ в исходное уравнение. В данном случае $k_1 \approx 0{,}567143$. Представим это приближенное частное решение в виде ряда Маклорена

$$\overline{x}(t) = e^{0{,}567143t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0{,}567143)^n}{n!} t^n =$$
$$= 1 + 0{,}567143t + 0{,}16082t^2 + 0{,}03040t^3 + 0{,}00431t^4 + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(0{,}567143)^n}{n!} t^n.$$

Сравнение коэффициентов данного ряда с коэффициентами в формулах (42) и (43) позволяет сделать

Вывод. Функции $g(t)$ и $x_1(t)$, определенные соответственно формулами (42), (43) и продолженные на $J_T = [-a, b]$, можно рассматривать как приближения к частному аналитическому решению задачи (41) на J_T.

Литература

1. Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1951. – 256 с.
2. Пинни Э. *Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Ин. лит., 1961. – 248 с.
3. Беллман Р., Кук К.Л. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Мир, 1967. – 548 с.
4. Хейл Д. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 411 с.
5. Азбелев Н.В., Максимов В.П, Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
6. Baker C.T.H., Bocharov G.A., Paul C.A.H., Rihan F.A. *Modelling and analysis of time-lags in some basic patterns of cell proliferation* // J. Math. Biol. – 1998. – V. 37. – P. 341–371.
7. Габасов З., Кириллова Ф.М. *Качественная теория оптимальных процессов.* – М.: Наука, 1971. – 507 с.
8. Забелло Л.Е., Копейкина Т.Б. *Управляемость по начальной функции систем с запаздыванием* // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12. – № 12. – С. 2267–2268.

Институт динамики систем
и теории управления Сибирского
отделения Российской академии наук

Поступила
28.11.2002