ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 8 (531)

УДК 510.57:512.565

А.Н. ФРОЛОВ

SET-1-СВОДИМОСТЬ НА КЛАССЕ ВЫЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ

1. Введение

В данной работе изучается теоретико-множественная структура класса вычислимых множеств относительно SET-1-сводимости по алгебрам полиномиально вычислимых и примитивно рекурсивных множеств. Известны различные сводимости, например, тьюринговая сводимость, 1-сводимость, m-сводимость и другие (напр., [1]). Изучение этих сводимостей направлено на изучение алгоритмической сложности различных структур. SET-1-сводимость отображает теоретико-множественную сложность.

Все изучаемые и используемые далее множества будут подмножествами из $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$. Под решеткой множеств понимается класс множеств $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\omega) = \{A \mid A \subseteq \omega\}$, замкнутый относительно операций объединения и пересечения (т. е. $A \cup B$, $A \cap B \in \mathcal{D}$ для любых множеств $A, B \in \mathcal{D}$). Под алгеброй множеств понимается решетка множеств $\mathcal{D}$, замкнутая относительно операции теоретико-множественной разности (т. е. $A - B \in \mathcal{D}$ для любых $A, B \in \mathcal{D}$) и содержащая пустое множество и ω (т. е. $\emptyset, \omega \in \mathcal{D}$). Дополнение множества A будем обозначать $\overline{A} = \omega - A$. Автоморфизмом алгебры множеств $\mathcal{A}$ называем такую биекцию $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, что для любых $A, B \in \mathcal{A}$ $\varphi(A) \cup \varphi(B) = \varphi(A \cup B)$ и $\varphi(A) \cap \varphi(B) = \varphi(A \cap B)$.

Понятия полиномиально вычислимых (напр., [2]), примитивно рекурсивных и вычислимых множеств (напр., [1]) являются базовыми понятиями теории вычислимости. Под этими множествами понимаем множества, характеристическая функция которых полиномиально вычислимая, примитивно рекурсивная или вычислимая соответственно. Характеристической функцией множества A является функция $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\chi_A(x) = 0$, если $x \notin A$.

Обозначим классы полиномиально вычислимых, примитивно рекурсивных и вычислимых множеств через $\mathcal{P}$, $\mathcal{PR}$ и $\mathcal{R}$ соответственно. Легко видеть, что перечисленные классы являются алгебрами множеств.

Обозначение $A \subseteq^* B$ означает, что $A - B$ конечно. Если $A \subseteq^* B$ и $B \subseteq^* A$, то пишем $A =^* B$. Пишем $A \subset_\infty B$, если $A \subseteq^* B$ и $\neg(B \subseteq^* A)$ (т. е. $A - B$ конечно, но $B - A$ бесконечно).

2. Верхние грани

SET-1-сводимость по произвольной решетке множеств $\mathcal{D}$ вводилась и изучалась в [3]. Приведем необходимые определения и результаты в случае, когда $\mathcal{D}$=$\mathcal{P}$ или $\mathcal{PR}$. Назовем функцию $\Phi : \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$ теоретико-множественной по классу множеств $\mathcal{D}$, если она либо совпадает с одной из следующих: $\Phi_1(X, Y) = X \cup Y$, $\Phi_2(X, Y) = X \cap Y$ или $\Phi_3^{n,m}(X_1, \dots, X_n) = X_m$ $(1 \le m \le n)$; либо может быть получена из них применением конечного числа раз операции суперпозиции.

Определение 1. Пусть $\mathcal{D}$ — решетка множеств, тогда будем говорить, что множество B SET-1-сводится к множеству A по классу множеств $\mathcal{D}$ и будем писать $A \le^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$, если существуют такие множества $R_1, \dots, R_n \in \mathcal{D}$ и такая теоретико-множественная формула $\Phi : \mathcal{D}^{n+1} \to \mathcal{D}$, что $A = \Phi(B, R_1, \dots, R_n)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00169, и Министерства образования Российской Федерации, грант № Е02-1.0-177.

Если выше описанное условие не верно, то говорим, что B не SET-1-сводится к A, и пишем $A \not\leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$. Введем обозначение $A <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$, если $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$ и $B \not\leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$. Будем также писать $A \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$, если $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$ и $B \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$.

Легко видеть, что бинарное отношение $\equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}$ является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности будем обозначать $[A]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} = \{B \subseteq \omega \mid B \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A\}$. Пусть $R \in \mathcal{D}$, тогда класс $[R]^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} = \mathcal{D}$ — наименьший элемент по SET-1-сводимости. Следующие два утверждения очевидны.

Лемма 1. *Если $A =^* B$, то $A \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$, где $\mathcal{D} = \mathcal{P}$ или $\mathcal{D} = \mathcal{PR}$.*

Лемма 2. *Если $\mathcal{D}$=$\mathcal{P}$ или $\mathcal{PR}$, то $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$ тогда и только тогда, когда $\overline{A} \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} \overline{B}$.*

Для изучения теоретико-множественной структуры вычислимых множеств в [4] вводится классификация всех вычислимых множеств относительно классов $\mathcal{P}$ и $\mathcal{PR}$. Нам будет необходимо одно определение из этой классификации, а также результаты из [4] и [3].

Теорема 1 ([3], теорема 1). *Для любых множеств A и B имеем $A \leq^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} B$ (или $A \leq^{\mathcal{P}}_{\text{SET-1}} B$) тогда и только тогда, когда существуют такие примитивно рекурсивные (или полиномиально вычислимые соответственно) множества R_1 и R_2, что $R_1 \subseteq R_2$ и $A = (B \cup R_1) \cap R_2 = (B \cap R_2) \cup R_1$.*

Во всех следующих определениях и результатах предполагаем, что $\mathcal{D} = \mathcal{PR}$ или $\mathcal{P}$. В последнем разделе приводится достаточное условие существования изоморфизма частичных порядков $\mathcal{R}/_{\equiv^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}}}$ и $\mathcal{R}/_{\equiv^{\mathcal{P}}_{\text{SET-1}}}$.

Определение 2. Пусть $T_1, T_2 \in \mathcal{D}$, тогда назовем вычислимое множество A $\mathcal{D}$-биммунным в $T_1 \subset_\infty T_2$, если $T_1 \subset_\infty A \subset_\infty T_2$ и не существует таких $P_1, P_2 \in \mathcal{D}$, что $T_1 \subset_\infty P_1 \subset_\infty A \subset_\infty P_2 \subset_\infty T_2$.

Замечание 1. В [4] (следствие 1) было показано, что для любых множеств $R_1, R_2 \in \mathcal{D}$, $R_1 \subset_\infty R_2$, существует $\mathcal{D}$-биммунное в $R_1 \subset_\infty R_2$ множество.

В следствии 3 докажем, что ни $\mathcal{R}/_{\equiv^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}}}$, ни $\mathcal{R}/_{\equiv^{\mathcal{P}}_{\text{SET-1}}}$ не являются верхней полурешеткой, что существенно отличает SET-1-сводимость от таких классических сводимостей теории вычислимости, как тьюринговая сводимость, 1-сводимость, m-сводимость и другие, т. к. все выше перечисленные сводимости порождают верхние полурешетки [1].

Определение 3. Вычислимое множество A называется $\mathcal{D}$-максимальным, если для любого множества B из $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$ следует $A \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$.

Предложение 1. *Пусть P_1 и P_2 — примитивно рекурсивные множества, а множество B $\mathcal{D}$-биммунно в $P_1 \subset_\infty P_2$. Тогда если множество A такое, что $P_1 \subseteq A \subseteq P_2$ и $B \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$, то $A =^* B$.*

Доказательство. Здесь и далее $\mathcal{D} = \mathcal{PR}$, для случая $\mathcal{D} = \mathcal{P}$ все доказательства проводятся аналогично. Пусть множество A такое, что $P_1 \subseteq A \subseteq P_2$ и $B \leq^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} A$, тогда по теореме 1 существуют такие примитивно рекурсивные множества R_1 и R_2, что $R_1 \subseteq R_2$ и $B = (A \cup R_1) \cap R_2$. Имеем $R_1 \subseteq B \subseteq R_2$.

Так как $P_1 \subseteq B \subseteq P_2$, то $P_1 \subseteq (P_1 \cup R_1) \subseteq B \subseteq (P_2 \cap R_2) \subseteq R_2$. Из того, что B $\mathcal{PR}$-биммунно в $P_1 \subset_\infty P_2$, следует $R_1 \subseteq^* P_1$ и $P_2 \subseteq^* R_2$, поэтому $R_1 \subseteq^* A \subseteq^* R_2$. Таким образом, $B = (A \cup R_1) \cap R_2 =^* A$. □

Следствие 1. Если множество B является $\mathcal{D}$-биммунным в $\emptyset \subset_\infty \omega$, тогда B является $\mathcal{D}$-максимальным.

Доказательство. Пусть $P_1 = \emptyset$ и $P_2 = \omega$, тогда по предложению 1 для любого такого множества A, что $B \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$, имеем $A =^* B$ и, следовательно, по лемме 1 $A \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$. □

Следствие 2. $\mathcal{D}$-максимальное множество существует.

Доказательство. Зафиксируем $\mathcal{D}$-бииммунное в $\emptyset \subset_\infty \omega$ множество (как было отмечено, такое множество существует). Из следствия 1 получим, что оно $\mathcal{D}$-максимально. $\square$

Следствие 3. Ни $\mathcal{R}/_{\equiv^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}}}$, ни $\mathcal{R}/_{\equiv^{\mathcal{P}}_{\text{SET-1}}}$ не являются верхней полурешеткой.

Доказательство. Зафиксируем $\mathcal{PR}$-бииммунное в $\emptyset \subset_\infty \omega$ множество B. Тогда $\overline{B}$ также $\mathcal{PR}$-бииммунно в $\emptyset \subset_\infty \omega$. Очевидно, что оба они не являются примитивно рекурсивными множествами. Тогда из следствия 1 имеем, что B и $\overline{B}$ являются $\mathcal{PR}$-максимальными.

Если вычислимое множество A является точной верхней гранью для B и $\overline{B}$, то $B \leq^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} A$ и $\overline{B} \leq^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} A$. А так как B и $\overline{B}$ являются $\mathcal{PR}$-максимальными, то $A \equiv^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} B \equiv^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} \overline{B}$.

Имеем $B \cap \overline{B} = \emptyset$ – примитивно рекурсивное множество. В [3] (предложение 1) для любых множеств A' и B' было показано , что если $A' \cap B' \in \mathcal{D}$ и $A' \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B'$, то $A' \in \mathcal{D}$. Отсюда следует, что множество B является примитивно рекурсивным. Получили противоречие. $\square$

Заметим, что в доказательстве следствия 3 построена пара множеств, не имеющая верхней грани. В следующей теореме дадим описание всех $\mathcal{D}$-максимальных множеств.

Теорема 2. *Множество $\mathcal{D}$-бииммунно в $\emptyset \subset_\infty \omega$, тогда и только тогда, когда оно $\mathcal{D}$-максимально.*

Доказательство. ($\Rightarrow$). Доказано в следствии 1.

($\Leftarrow$). Пусть множество B является $\mathcal{PR}$-максимальным, но не является $\mathcal{PR}$-бииммунным в $\emptyset \subset_\infty \omega$, тогда существует такое примитивно рекурсивное множество R, что либо R бесконечно и $R \subseteq B$, либо R кобесконечно (т. е. $\overline{R}$ бесконечно) и $B \subseteq R$. Пусть для определенности выполнено первое, тогда построим такое вычислимое множество A, что $B = A \cup R$ и не существует такого примитивно рекурсивного множества R', что $A = B \cap R'$. В [3] (предложение 2) было показано, что если $A \subseteq B$, то следующие условия эквивалентны:

1) $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$,

2) существует такое $R \in \mathcal{D}$, что $A = B \cap R$,

3) существует такое $R' \in \mathcal{D}$, что $B = A \cup R'$.

Отсюда будет следовать, что $B <^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$. Это противоречит $\mathcal{PR}$-максимальности множества B.

Аналогично, если выполнен второй случай, достаточно построить такое вычислимое множество A, что $B = A \cap R$ и не существует такого примитивно рекурсивного множества R', что $A = B \cup R'$. Далее обосновывается только первый случай, второй изучается аналогично.

Надо построить такое вычислимое множество $A \subseteq B$, что $B = A \cup R$ и $A \neq B \cap R'$ для любого примитивно рекурсивного множества R'. Воспользуемся бесконечностью множества R. Пусть $n(0) = 0$ и $n(x+1) = n(x) + \chi_R(x)$, тогда функция $n(x)$ вычислима (даже примитивно рекурсивна). Так как R бесконечно, то область значения функции n есть ω, т. е. $\operatorname{rang}(n) = \omega$.

Положим $\chi_A(x) = \chi_B(x)$, если $\chi_R(x) = 0$ (таким образом, выполняется условие $B = A \cup R$). Если $\chi_R(x) = 1$, то $\chi_A(x) = \overline{sg}(\chi_B(x) \cdot p_{n(x)}(x))$. То есть, если $\chi_B(x) = 1$ и $p_{n(x)}(x) \neq 0$, то $\chi_A(x) = 0$, иначе $\chi_A(x) = 1$. Таким образом, обеспечиваем $A \neq B \cap R'$, где $\chi_{R'} = p_{n(x)}$. Легко видеть, что $A \neq B \cap R'$ для любого примитивно рекурсивного множества R' (т. к. $\operatorname{rang}(n) = \omega$), за исключением, возможно, примитивно рекурсивного множества, характеристическая функция которого имеет в эффективной нумерации номер 0, т. е. является функцией p_0. Однако каждая примитивно рекурсивная функция в эффективной нумерации встречается бесконечное число раз, поэтому существует такое число $k > 0$, что $p_0 = p_k$. Таким образом, $A \neq B \cap R'$ для любого примитивно рекурсивного множества R'. $\square$

В следующей теореме 3 опишем все множества, над которыми можно найти $\mathcal{D}$-максимальные множества (в смысле отношения $\leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}$).

Теорема 3. *Если B — $\mathcal{D}$-максимальное множество, то для любого вычислимого множества $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$ либо $A \in \mathcal{D}$, либо A $\mathcal{D}$-бииммунно в $R_1 \subset_\infty R_2$, где $A = (B \cup R_1) \cap R_2$, $R_1 \subset_\infty R_2$ и $R_1, R_2 \in \mathcal{D}$ по теореме 1.*

Обратно, если $A \in \mathcal{D}$ или A $\mathcal{D}$-бииммунно в $R_1 \subset_\infty R_2$ для некоторых $R_1, R_2 \in \mathcal{D}$, $R_1 \subset_\infty R_2$, то существует такое $\mathcal{D}$-максимальное множество B, что $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$.

Доказательство. $(\Rightarrow)$. Пусть B – $\mathcal{PR}$-максимальное множество и $A \leq^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} B$, тогда по теореме 1 существуют такие примитивно рекурсивные множества $R_1 \subseteq R_2$, что $A = (B \cup R_1) \cap R_2$. Так как B $\mathcal{PR}$-максимально, то из теоремы 2 следует, что B $\mathcal{PR}$-бииммунное в $\emptyset \subset_\infty \omega$.

Используем следующее предложение, доказанное в [4]. Если множество A' $\mathcal{D}$-бииммунно в $P_1 \subset_\infty P_2$, где $P_1, P_2 \in \mathcal{D}$, то для любого такого $R \in \mathcal{D}$, что $P_1 \subset_\infty R \subset_\infty P_2$, множество $A' \cap R$ является $\mathcal{D}$-бииммунным в $P_1 \subset_\infty R$, а множество $A' \cup R$ — $\mathcal{D}$-бииммунным в $R \subset_\infty P_2$.

Рассмотрим следующие случаи.

1) $R_1 =^* \omega$, тогда $A =^* (B \cup \omega) \cap R_2 = R_2$, т. е. A — примитивно рекурсивное множество;

2) $R_1 =^* \emptyset$, тогда $A =^* (B \cup \emptyset) \cap R_2 = B \cap R_2$,

- 2a) $R_2 =^* \omega$, тогда $A =^* B$ и, следовательно, A $\mathcal{PR}$-бииммунно в $\emptyset \subset_\infty \omega$,
- 2b) $R_2 =^* \emptyset$, тогда $A =^* \emptyset$ — примитивно рекурсивное множество,
- 2c) $\emptyset \subset_\infty R_2 \subset_\infty \omega$, тогда множество $A = B \cap R_2$ $\mathcal{PR}$-бииммунно в $\emptyset =^* R_1 \subset_\infty R_2$.

3) $\emptyset \subset_\infty R_1 \subset_\infty \omega$, тогда $B \cup R_1$ $\mathcal{PR}$-бииммунно в $R_1 \subset_\infty \omega$. Так как $R_1 \subseteq R_2$, то возможны следующие подслучаи:

- 3a) $R_2 =^* R_1$, тогда $A = (B \cup R_1) \cap R_2 =^* (B \cup R_1) \cap R_1 = R_1$ примитивно рекурсивно,
- 3b) $R_2 =^* \omega$, тогда $A =^* B \cup R_1$ и, следовательно, $\mathcal{PR}$-бииммунно в $R_1 \subset_\infty \omega =^* R_2$,
- 3c) $R_1 \subset_\infty R_2 \subset_\infty \omega$, тогда $A = (B \cup R_1) \cap R_2$ $\mathcal{PR}$-бииммунно в $R_1 \subset_\infty R_2$.

$(\Leftarrow)$. Если A — примитивно рекурсивное множество, то теорема очевидна. Пусть множество A $\mathcal{PR}$-бииммунно в $P_1 \subset_\infty P_2$, где P_1 и P_2 являются примитивно рекурсивными множествами, тогда, во-первых, в (I) построим такое $\mathcal{PR}$-бииммунное в $\emptyset \subset_\infty P_2$ множество A', что $A \leq^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} A'$. Во-вторых, в (II) построим такое $\mathcal{PR}$-бииммунное в $\emptyset \subset_\infty \omega$ множество B, что $A' \leq^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} B$. Тогда $A \leq^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} B$, где B $\mathcal{PR}$-максимально (по предложению 1).

I) Если P_1 конечно, то $P_1 =^* \emptyset$ и множество A является $\mathcal{PR}$-бииммунным в $\emptyset \subset_\infty P_2$. В этом случае в качестве A' можем взять множество A.

Если P_1 бесконечно, то $\emptyset \subset_\infty P_1$. Тогда существует $\mathcal{PR}$-бииммунное в $\emptyset \subset_\infty P_1$ множество A''. Пусть $A' = A'' \cup (A - P_1)$, тогда $A = A' \cup P_1$, т. е. $A \leq^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} A'$. Осталось показать, что A' $\mathcal{PR}$-бииммунно в $\emptyset \subset_\infty P_2$.

Для любых таких примитивно рекурсивных множеств P и P', что $\emptyset \subseteq P \subset_\infty A' \subset_\infty P' \subseteq P_2$, имеем $\emptyset \subseteq P \cap P_1 \subseteq A' \cap P_1 = A'' \subseteq P' \cap P_1 \subseteq P_1$.

Так как A'' $\mathcal{PR}$-бииммунно в $\emptyset \subset_\infty P_1$, то $P \cap P_1 =^* \emptyset$ и $P' \cap P_1 =^* P_1$ (следовательно, $P_1 \subseteq^* P'$).

Аналогично, т. к. $P_1 \subseteq (P \cap \overline{P_1}) \cup P_1 \subseteq A' \cup P_1 = A \subseteq P' \cup P_1 \subseteq P_2$ и A $\mathcal{PR}$-бииммунно в $P_1 \subset_\infty P_2$, то $(P \cap \overline{P_1}) \cup P_1 =^* P_1$ (следовательно, $P \cap \overline{P_1} =^* \emptyset$) и $P' \cup P_1 =^* P_2$.

Таким образом, $P = (P \cap P_1) \cup (P \cap \overline{P_1}) =^* \emptyset$ (т. к. $P \cap P_1 =^* \emptyset$ и $P \cap \overline{P_1} =^* \emptyset$) и $P' =^* P_2$ ($P_1 \subseteq^* P'$ и $P' \cup P_1 =^* P_2$). Следовательно, множество A' $\mathcal{PR}$-бииммунно в $\emptyset \subset_\infty P_2$.

II) Пусть A' $\mathcal{PR}$-бииммунно в $\emptyset \subset_\infty P_2$, тогда аналогично пункту (I) строится такое множество B, что $A' \leq^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} B$ и B $\mathcal{PR}$-бииммунно в $\emptyset \subset_\infty \omega$. $\square$

Лемма 3. *Для $R_1, R_2, R'_1, R'_2 \in \mathcal{D}$, $R_1 \subset_\infty R_2$, $R'_1 \subseteq R'_2$ $\mathcal{D}$-бииммунного в $R_1 \subset_\infty R_2$ множества A, если $A = (B \cup R'_1) \cap R'_2$, то $A =^* (B \cup R_1) \cap R_2$.*

Доказательство. Имеем $R'_1 \subseteq A \subseteq R'_2$. Так как A $\mathcal{PR}$-бииммунно в $R_1 \subset_\infty R_2$ и $R_1 \subseteq R_1 \cup R'_1 \subseteq A \subseteq R_2 \cap R'_2 \subseteq R_2$, то $R_1 =^* R_1 \cup R'_1$ и $R_2 =^* R_2 \cap R'_2$. Таким образом, $A =^* (A \cap R_2) \cup R_1 =^* (B \cup R_1) \cap R_2$. $\square$

3. Плотность

В этом разделе докажем, что $\mathcal{R}/_{\equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}}$ является плотным частично-упорядоченным множеством, и как следствие, что Σ_1-теория $\mathcal{R}/_{\equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}}$ разрешима и для $\mathcal{D} = \mathcal{PR}$, и для $\mathcal{D} = \mathcal{P}$ (см. следствия 4 и 5). Для этого будет необходим критерий плотности, полученный в ([3], теорема 6): $\mathcal{R}/_{\equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}}$ является плотным частично-упорядоченным множеством тогда и только тогда, когда для любого вычислимого множества $A \notin \mathcal{D}$ существует такое $R \in \mathcal{D}$, что $A \cap R \notin \mathcal{D}$ и $A \cap \overline{R} \notin \mathcal{D}$.

Теорема 4. *Для любого вычислимого множества $A \notin \mathcal{D}$ существует такое $R \in \mathcal{D}$, что $A \cap R \notin \mathcal{D}$ и $A \cap \overline{R} \notin \mathcal{D}$.*

Доказательство. По теореме о нормальной форме Клини (напр., [1]) для частично вычислимой функции φ существуют такие примитивно рекурсивные функции $U(s)$ и $T(x, s) \in \{0, 1\}$, что $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = U(\mu s(T(x_1, \ldots, x_n, s) = 1))$. В частности, для вычислимых функций $\chi_A(x)$ и $p(n, x) = p_n(x)$ существуют такие примитивно рекурсивные функции $U_A(s)$ и $U_p(s)$, $T_A(x, s)$ и $T_p(x, s)$ соответственно. По нумерации всех примитивно рекурсивных функций $p(n, x)$ построим нумерацию всех примитивно рекурсивных множеств P_e, где P_e — множество, характеристической функцией которого является функция $sg(p(e, x))$.

Будем строить характеристическую функцию χ_R примитивно рекурсивного множества R по шагам. Требуется, чтобы для любого $n \in \omega$ $A \cap R \neq P_n$ и $A \cap \overline{R} \neq P_n$. Разобьем это требование на бесконечное число требований, для каждого n будем пытаться удовлетворить требование $A \cap R \neq P_n$ и $A \cap \overline{R} \neq P_n$. Для каждого $n \in \omega$ будем иметь свидетеля x_n для требования с номером n. Опишем сначала стратегию построения множества R, чтобы выполнялось $A \cap R \neq P_0$ и $A \cap \overline{R} \neq P_0$, т. е. удовлетворим требование с номером $n = 0$. На шаге $s = 0$ положим $x_0 = 0$ и $\chi_R(0) = 0$.

Шаг $s + 1$.

1) Если $T_A(x_s, s + 1) = 0$ или $T_p(0, x_s, s + 1) = 0$, то определим $\chi_R(s + 1) = \chi_R(s)$ и переходим к шагу $s + 2$, не меняя свидетеля, т. е. $x_{s+1} = x_s$.

2) Если $T_A(x_s, s + 1) = 1$ и $T_p(0, x_s, s + 1) = 1$, то $U_A(s + 1) = \chi_A(x_s)$, и $U_p(s + 1) = p_0(x_s)$ (т. к. до этого шага свидетель не менялся). В этом случае свидетель должен измениться независимо от следующих подслучаев, т. е. $x_{s+1} = x_s + 1$.

2а) Если $U_A(s+1) = U_p(s+1)$ и $\chi_R(s) = 0$, то элемент x_s не является свидетелем нарушения равенства $A \cap \overline{R} = P_0$ (поэтому переходим к другому свидетелю). Определим $\chi_R(s + 1) = \chi_R(s) = 0$. Таким образом, ждем подтверждения (свидетеля) того, что $A \cap \overline{R} \neq P_0$.

Заметим, что обязательно найдем такого свидетеля, т. к. в силу не примитивно рекурсивности множества A имеем, что для любого k существует бесконечно много таких x и y, что $x \in A$ и $p(k, x) = 0$, $y \notin A$ и $p(k, y) = 1$.

2б) Если $U_A(s + 1) \neq U_p(s + 1)$ и $\chi_R(s) = 0$, то элемент x_s является свидетелем неравенства $A \cap \overline{R} \neq P_0$. Теперь можно перейти к удовлетворению требования $A \cap R \neq P_0$. Для этого положим $\chi_R(s + 1) = \overline{sg}(\chi_R(s)) = 1$.

2в) Если $U_A(s+1) = U_p(s+1)$ и $\chi_R(s) = 1$, то элемент x_s не является свидетелем нарушения равенства $A \cap R = P_0$. Определяем $\chi_R(s + 1) = \chi_R(s) = 1$. В силу замечания в п. 2а) обязательно найдем свидетеля неравенства $A \cap R \neq P_0$.

2г) Если $U_A(s + 1) \neq U_p(s + 1)$ и $\chi_R(s) = 1$, то элемент x_s является свидетелем неравенства $A \cap R \neq P_0$. Таким образом, требование с номером $n = 0$ полностью удовлетворено. Можно перейти к удовлетворению требования с номером $n = 1$. Для этого положим $\chi_R(s + 1) = \overline{sg}(\chi_R(s)) = 0$.

Теперь приведем полную конструкцию. Будем строить одновременно три примитивно рекурсивные функции $x(s)$, $\chi_R(s)$ и $n(s)$, где $x(s) = x_s$ — свидетель на шаге s, χ_R — характеристическая функция искомого множества R и $n(s)$ — номер требования для свидетеля $x(s)$.

Шаг $s = 0$. $x(0) = 0$, $\chi_R(0) = 0$ и $n(0) = 0$.

Шаг $s+1$. Если $T_A(x(s), s+1) = 0$ или $T_p(n(s), x(s), s+1) = 0$, то $x(s+1) = x(s)$. В противном случае, $x(s+1) = x(s) + 1$.

Если либо $T_A(x(s), s+1) = 0$, либо $T_p(n(s), x(s), s+1) = 0$, либо $T_A(x(s), s+1) = 1$, $T_p(n(s), x(s), s+1) = 1$ и $U_A(s+1) = U_p(s+1)$, то положим $\chi_R(s+1) = \chi_R(s)$. В противном случае, $\chi_R(s+1) = \overline{sg}(\chi_R(s))$.

Если $\chi_R(s) = 1$ и $\chi_R(s+1) = 0$, то $n(s+1) = n(s) + 1$. В противном случае $n(s+1) = n(s)$.

Конструкция завершена. Очевидно, построенное таким образом множество R является примитивно рекурсивным. В силу рассуждений, проведенных выше для удовлетворения требования с номером $n = 0$, все требования удовлетворяются. Таким образом, $A \cap R$ и $A \cap \overline{R}$ не примитивно рекурсивные множества. $\square$

Следствие 4. $\mathcal{R}/_{\equiv^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}}}$ и $\mathcal{R}/_{\equiv^{\mathcal{P}}_{\text{SET-1}}}$ являются плотными частично-упорядоченными множествами.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 4 и теоремы 6 из [3]. $\square$

Следствие 5. Σ_1-теория $\mathcal{R}/_{\equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}}}$ разрешима.

Доказательство следует из теоремы 4 и следствия 7 из [3]. $\square$

4. Заключение

В силу аналогичности результатов для $\mathcal{D} = \mathcal{PR}$ и $\mathcal{D} = \mathcal{P}$ получим, что $\mathcal{R}/_{\equiv^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}}}$ может быть изоморфен $\mathcal{R}/_{\equiv^{\mathcal{P}}_{\text{SET-1}}}$. Далее в предложении 2, дадим достаточное условие существования этого изоморфизма.

Лемма 4. *Если автоморфизм φ алгебры множеств $\mathcal{R}$ такой, что $\varphi(\mathcal{PR}) = \mathcal{P}$, то $A \leq^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} B$ тогда и только тогда, когда $\varphi(A) \leq^{\mathcal{P}}_{\text{SET-1}} \varphi(B)$. Следовательно, $A \equiv^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} B$ тогда и только тогда, когда $\varphi(A) \equiv^{\mathcal{P}}_{\text{SET-1}} \varphi(B)$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$). Если $A \leq^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} B$, то по теореме 1 существуют такие примитивно рекурсивные множества R_1 и R_2, что $A = (B \cup R_1) \cap R_2$. Следовательно, $\varphi(A) = (\varphi(B) \cup \varphi(R_1)) \cap \varphi(R_2)$, где $\varphi(R_1)$ и $\varphi(R_2)$ — полиномиально вычислимые множества, т. к. $\varphi(\mathcal{PR}) = \mathcal{P}$. Таким образом, $\varphi(A) \leq^{\mathcal{P}}_{\text{SET-1}} \varphi(B)$.

($\Leftarrow$). Обратно, если $\varphi(A) \leq^{\mathcal{P}}_{\text{SET-1}} \varphi(B)$, то по теореме 1 существуют такие полиномиально вычислимые множества R_1 и R_2, что $\varphi(A) = (\varphi(B) \cup R_1) \cap R_2$. Следовательно, $A = (B \cup \varphi^{-1}(R_1)) \cap \varphi^{-1}(R_2)$, где $\varphi^{-1}(R_1)$ и $\varphi^{-1}(R_2)$ — примитивно рекурсивные множества, т. к. $\varphi^{-1}(\mathcal{P}) = \mathcal{PR}$. Таким образом, $A \leq^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} B$ (φ^{-1} существует, т. к. φ — автоморфизм.)

Вторая часть леммы очевидным образом следует из того, что $A \equiv^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$ тогда и только тогда, когда $A \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} B$ и $B \leq^{\mathcal{D}}_{\text{SET-1}} A$, где $\mathcal{D} = \mathcal{P}$ или $= \mathcal{PR}$. $\square$

Предложение 2. *Если существует такой автоморфизм φ алгебры множеств $\mathcal{R}$, что $\varphi(\mathcal{PR}) = \mathcal{P}$, то $\mathcal{R}/_{\equiv^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}}} \cong \mathcal{R}/_{\equiv^{\mathcal{P}}_{\text{SET-1}}}$.*

Доказательство. Пусть существует такой автоморфизм φ алгебры множеств $\mathcal{R}$, что $\varphi(\mathcal{PR}) = \mathcal{P}$, тогда определим функцию $\varphi'([A]^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}}) = [\varphi(A)]^{\mathcal{P}}_{\text{SET-1}}$.

Докажем, что определение корректно, т. е. если $[A]^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} = [B]^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}}$, то $\varphi'([A]^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}}) = \varphi'([B]^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}})$. Так как $[A]^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} = [B]^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}}$, то $A \equiv^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} B$. Тогда по лемме 4 $\varphi(A) \equiv^{\mathcal{P}}_{\text{SET-1}} \varphi(B)$ и, следовательно, $\varphi'([A]^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}}) = \varphi'([B]^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}})$. Таким образом, корректность проверена.

Докажем теперь, что φ' — инъективная функция, т. е. если $\varphi'([A]^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}}) = \varphi'([B]^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}})$, то $[A]^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} = [B]^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}}$.

Если $\varphi'([A]^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}}) = \varphi'([B]^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}})$, то $\varphi(A) \equiv^{\mathcal{P}}_{\text{SET-1}} \varphi(B)$. По лемме 4 имеем $A \equiv^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} B$ и, следовательно, $[A]^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}} = [B]^{\mathcal{PR}}_{\text{SET-1}}$. Таким образом, инъективность φ' доказана.

Аналогично, из леммы 4 и того, что φ — автоморфизм, легко видеть, во-первых, что φ' является сюръекцией и, следовательно, биекцией, а во-вторых, что φ' является изоморфизмом. $\square$

Литература

1. Соар Р.И. *Вычислимо перечислимые множества и степени.* – Казань: Казанское матем. об-во, 2000. – 576 с.
2. Cook S.A. *The complexity of theorem proving procedures* // Proc. 3-rd Ann. ACM Symp. on Thery of Comp. – 1971. – P. 151–158.
3. Фролов А.Н. *Теоретико-множественные сводимости по решетке множеств* // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 1. – С. 57–67.
4. Фролов А.Н. *Теоретико-множественная структура вычислимых множеств* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 10. – С. 70–76.

Казанский государственный университет

Поступила 16.01.2004