ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 3 (502)

УДК 512.554

Ю.Б. ЕРМОЛАЕВ

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ БАЗИСЫ КЛАССИЧЕСКИХ АЛГЕБР ЛИ

1. Постановка задачи и основные соглашения. Пусть L — полупростая алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел ранга r, H — ее картановская подалгебра с корневой системой R и $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ — система простых корней в R ($R^{\pm}$ — множества положительных и отрицательных корней относительно Π). Фиксируем H и Π. Базис B алгебры L будем называть целочисленным, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) все структурные константы относительно B — целые числа;

2) базис B согласован с разложением на одномерные подпространства

$$L = \bigoplus_{i=1}^{r} H_i \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} L_\alpha, \quad \text{где } L_\alpha \text{ корневое, а } H_i = [L_{-\alpha_i}, L_{\alpha_i}],$$

т. е. имеет вид $B = \{x_\alpha, h_i \mid \alpha \in R,\ i = 1, \dots, r\}$, где $x_\alpha \in L_\alpha$, а $h_i \in H_i$;

3) для элементов h_i выполняются равенства

$$[x_{-\alpha_i}, h_j] = -c_{ij} x_{-\alpha_i}, \quad [x_{\alpha_i}, h_j] = c_{ij} x_{\alpha_i}, \quad [x_{-\alpha_i}, x_{\alpha_j}] = -\delta_{ij} h_j, \quad i, j = 1, \dots, r,$$

где $C = (c_{ij})$ — $(r \times r)$-матрица либо Картана системы R, либо приведенная матрица Картана.

Под *приведенной матрицей Картана* [1] понимаем матрицу $C' = (c'_{ij})$, $c'_{ij} = c_{ij}/\delta_j$, где $\delta_j = (c_{1j}, \dots, c_{rj})$ — наибольший общий делитель всех элементов j-го столбца в обычной матрице Картана $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = \frac{2(\alpha_i|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)}$. При этом если R неприводима, то $\delta_j \neq 1$ только в случае, когда $R = B_r$ и $j = r$ (при $(\alpha_i|\alpha_i) > (\alpha_r|\alpha_r)$ для $i < r$).

Обозначим через $\mathcal{B}$ семейство целочисленных базисов такое, что любые два базиса $B = \{x_\alpha,\ h_i \mid \alpha \in R,\ i = 1, \dots, r\}$ и $B' = \{x'_\alpha,\ h'_i \mid \alpha \in R,\ i = 1, \dots, r\}$ из $\mathcal{B}$ связаны преобразованием

$$x'_\alpha = \lambda(\alpha) x_\alpha; \quad x_\alpha = \mu(\alpha) x'_\alpha; \quad \lambda(\alpha)\mu(\alpha) = 1, \quad \alpha \in R,$$

где предполагается, что $h'_i = h_i$, $\lambda(-\alpha_i) = \lambda(\alpha_i) = 1$, $i = 1, \dots, r$, и $\lambda(\alpha) > 0$ для всех $\alpha \in R$. Базис B будем обычно называть исходным, B' — новым, а коэффициенты $\lambda(\alpha)$ — переходными от B к B'. Заметим, что условие $\lambda(-\alpha_i) = \lambda(\alpha_i) = 1$, $i = 1, \dots, r$, не является существенным для описания целочисленных базисов (см. замечание после леммы 4).

Очевидно, целочисленный базис порождает порядок в L. Эти порядки являются обобщением порядков Шевалле (см. [2], с. 229–232) в следующем смысле. Порядок Шевалле состоит из системы Шевалле и дозволенной решетки в H. Первое определяется как семейство $\{x_\alpha \mid \alpha \in R\}$, для которого выполнены условия: (i) $x_\alpha \in L_\alpha$ для всех $\alpha \in R$; (ii) $[x_{-\alpha}, x_\alpha] = h_\alpha$ для всех $\alpha \in R$; (iii) $\sigma : x_\alpha \to x_{-\alpha}$, где σ — специальный автоморфизм, а элементы h_α определяются равенствами $[x_\beta, h_\alpha] = -\frac{2(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} x_\beta$ ($\alpha, \beta \in R$). В данной статье рассматриваются порядки, в которых для системы $\{x_\alpha \mid \alpha \in R\}$ условия (i), (ii) заменены более слабыми, по существу, теми же, но справедливыми для корневых векторов, соответствующих только корням из $\pm\Pi$. При этом отметим, что если $h_\alpha = [x_{-\alpha}, x_\alpha]$, $\alpha \in R^+$, то решетка $\langle h_\alpha \mid \alpha \in R^+ \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle h_i \mid i = 1, \dots, r \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathcal{H}$, где $h_i = h_{\alpha_i}$ (т. к. множество $\{h_\alpha,\ -h_\alpha \mid \alpha \in R^+\}$ является корневой системой (дуальной к R), а $\{h_1, \dots, h_r\}$ — подсистемой простых корней в ней). Дозволенность этой решетки в нашем случае означает, что она сохраняет решетку, порожденную системой $\{x_\alpha \mid \alpha \in R\}$.

Два базиса, согласованных с корневым разложением, будем называть эквивалентными, если абсолютные значения их соответствующих структурных констант совпадают. Специальный автоморфизм будем называть симметрией.

Наша цель — описать с точностью до симметрии относительно специального автоморфизма базисы в $\mathcal{B}$ для простой алгебры Ли каждого типа. Это даст описание всех целочисленных базисов любой полупростой алгебры Ли над $\mathbb{C}$ с точностью до эквивалентности.

2. Формулировка основного результата. Основной результат сформулируем в виде следующих теорем, каждая из которых относится к соответствующему типу простой классической алгебры Ли. Для корней используем обозначения, приведенные в ([3], с. 302–319, табл. I–IX). В качестве исходного берем базис Шевалле.

Теорема A. *Если семейство $\mathcal{B}$ содержит базис $B = \{x_\alpha,\ h_i \mid \alpha \in R,\ i = 1, \dots, r\}$ такой, что $[x_\alpha, x_\beta] = \pm x_{\alpha+\beta}$ для любых $\alpha, \beta \in R$ с $\alpha + \beta \in R$, то он единственный в $\mathcal{B}$.*

Базисами, удовлетворяющими условиям теоремы A, являются все целочисленные базисы простых алгебр Ли типов $R = A_r,\ D_r$ и E_r, а также целочисленный базис алгебры типа B_r с приведенной матрицей Картана C' (напр., стандартный базис $\mathfrak{o}_{2r+1}$). В случаях алгебр Ли типов $R = A_r,\ D_r$ и E_r каждый целочисленный базис является базисом Шевалле.

Теорема B. *Если семейство $\mathcal{B}$ алгебры Ли типа B_r содержит базис Шевалле, то оно состоит из 4 базисов (из 3 с точностью до симметрии), из которых 2 самосимметричны. Коэффициентами перехода от базиса Шевалле к остальным являются*

$$\begin{aligned} \lambda(\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j)) &= 1 \quad \text{для всех} \quad 1 \le i < j \le r; \\ \lambda(\pm\varepsilon_i) &= 1 \quad \text{для всех} \quad 1 \le i \le r; \\ \lambda(-\varepsilon_i - \varepsilon_j) &= \xi \quad \text{для всех} \quad 1 \le i < j \le r; \\ \lambda(\varepsilon_i + \varepsilon_j) &= \eta \quad \text{для всех} \quad 1 \le i < j \le r, \end{aligned} \tag{b}$$

где ξ и η независимо друг от друга равны либо 1, либо 2.

Теорема C. *Алгебра Ли типа C_r с точностью до симметрии и эквивалентности имеет $2^{r-2}(2^{r-1}+1)$ различных целочисленных базиса (каждое $\mathcal{B}$ состоит из 2^{2r-2} элементов), из которых 2^{r-1} самосимметричны и которые определяются коэффициентами перехода от базиса Шевалле*

$$\begin{aligned} \lambda(\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j)) &= 1 \qquad \text{для всех} \quad 1 \le i < j \le r; \\ \lambda(\pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j)) &= 1 \qquad \text{для всех} \quad 1 \le i < j \le r; \\ \lambda(-2\varepsilon_i) &= \xi_i \qquad \text{для всех} \quad 1 \le i < r; \\ \lambda(2\varepsilon_i) &= -\eta_i \quad \text{для всех} \quad 1 \le i < r, \end{aligned} \tag{c}$$

где все параметры ξ_i и η_i независимо друг от друга равны либо 1, либо 2.

Теорема F. *Алгебра Ли типа F_4 с точностью до симметрии и эквивалентности имеет 22 (из них 6 самосимметричных, для каждого $|\mathcal{B}| = 38$) различных целочисленных базиса, которые определяются коэффициентами перехода от базиса Шевалле*

$$\begin{aligned} \lambda(\pm\varepsilon_i) &= 1 \qquad \text{для} \quad i = 1, 2, 3, 4; \\ \lambda(\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j)) &= 1 \qquad \text{для} \quad 2 \le i < j \le 4; \\ \lambda(\tfrac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)) &= 1; \\ \lambda(-\varepsilon_i - \varepsilon_j) = \xi_1,\ \lambda(\varepsilon_i + \varepsilon_j) &= \eta_1 \quad \text{для} \quad 2 \le i < j \le 4; \\ \lambda(-\varepsilon_1 + \varepsilon_j) = \xi_2,\ \lambda(\varepsilon_1 - \varepsilon_j) &= \eta_2 \quad \text{для} \quad j = 2, 3, 4; \\ \lambda(-\varepsilon_1 - \varepsilon_j) = \eta_3,\ \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_j) &= \eta_3 \quad \text{для} \quad j = 2, 3, 4, \end{aligned} \tag{f}$$

где параметры ξ_i, η_i, $i = 1,2,3$, *равны каждый либо* 1, *либо* 2 *при выполнении условий*

$$\frac{\xi_1\xi_2}{\xi_3}, \quad \frac{\xi_1\eta_3}{\eta_2}, \quad \frac{\eta_1\eta_2}{\eta_3}, \quad \frac{\eta_1\xi_3}{\xi_2} \quad \text{суть целые числа.} \tag{1}$$

Теорема G. *Алгебра Ли типа* G_2 *с точностью до симметрии и эквивалентности имеет* 14 (*из них* 4 *самосимметричных, для каждого* $|\mathcal{B}| = 24$) *различных целочисленных базисов, которые определяются коэффициентами перехода* (*от базиса Шевалле*):

$$\begin{aligned}
&\lambda(\pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)) = \lambda(\pm(-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)) = \lambda(\pm(-\varepsilon_1 + \varepsilon_3)) = 1;\\
&\lambda(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = \xi_1, \quad \lambda(-\varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \eta_1;\\
&\lambda(2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3) = \xi_1\xi_2, \quad \lambda(-2\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_3) = \eta_1\eta_2;\\
&\lambda(-2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \xi_1\xi_2, \quad \lambda(2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \eta_1\eta_2,
\end{aligned} \tag{g}$$

где ξ_1, η_1 *равны либо* $\frac{1}{2}$, *либо* 1, *либо* 2 *и связаны только условием*

$$\xi_1\eta_1 \ \text{ — целое число, а } \xi_2,\ \eta_2 \text{ равны независимо друг от друга либо } 1, \text{ либо } 3. \tag{2}$$

Таким образом, в каждой простой алгебре за исключением типа B_r все $\mathcal{B}$ с точностью до эквивалентности “изоморфны” в понятном смысле. В случае B_r имеется две возможности.

3. Вспомогательные предложения. Введем обозначения для структурных констант, полагая $[x_\alpha, x_\beta] = C(\alpha,\beta)x_{\alpha+\beta}$, $[x'_\alpha, x'_\beta] = C'(\alpha,\beta)x'_{\alpha+\beta}$ и $N(\alpha,\beta) = |C(\alpha,\beta)|$, $N'(\alpha,\beta) = |C'(\alpha,\beta)|$. Кроме того, для корней $\alpha,\beta \in R$ таких, что $\alpha+\beta$ тоже принадлежит R, введем обозначение $Q(\alpha,\beta) = \frac{N(\alpha,\beta)}{N'(\alpha,\beta)} = \frac{C(\alpha,\beta)}{C'(\alpha,\beta)}$ (при $\lambda(\alpha) > 0$ для всех $\alpha \in R$).

Лемма 1. *Если* $\alpha,\beta \in R$ *такие, что и* $\alpha+\beta \in R$, *то имеет место равенство*

$$N'(\alpha,\beta) = \frac{\lambda(\alpha)\lambda(\beta)}{\lambda(\alpha+\beta)}N(\alpha,\beta). \tag{3}$$

$$\lambda(\alpha+\beta) = Q(\alpha,\beta)\lambda(\alpha)\lambda(\beta). \tag{4}$$

Последовательность индексов $(i_1,\dots,i_m)$, $1 \le i_t \le r$, $t = 1,\dots,m$, назовем правильным путем корня $\alpha \in R$, если $\varphi_t = \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_t} \in R$ для всех $t = 1,\dots,m$ и $\varphi_m = \alpha$ (здесь и всюду в дальнейшем $\alpha_i \in \Pi$).

Следствие 1. Пусть $\alpha = k_1\alpha_1 + \dots + k_r\alpha_r \in R^+$ и $(i_1,\dots,i_m)$ — правильный путь для $\alpha \in R$. Тогда имеем

$$\lambda(-\alpha) = \prod_{t=1}^{m-1} Q(-\varphi_t, -\alpha_{i_{t+1}})\lambda(-\alpha_1)^{k_1}\cdots\lambda(-\alpha_r)^{k_r}, \tag{5}$$

$$\lambda(\alpha) = \prod_{t=1}^{m-1} Q(\varphi_t, \alpha_{i_{t+1}})\lambda(\alpha_1)^{k_1}\cdots\lambda(\alpha_r)^{k_r}, \tag{6}$$

где $\varphi_t = \alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_t}$, $t = 1,\dots,m$ $(m = \sum k_i)$.

Доказательство. Так как $\varphi_t = \varphi_{t-1} + \alpha_{i_t}$, $t = 2,\dots,m$, то повторное применение (4) дает (6). Аналогично получаем (5). $\square$

Лемма 2. *Пусть* φ, α, β — *корни такие, что все* $\varphi+\alpha$, $\varphi+\beta$, $\varphi+\alpha+\beta$ *тоже лежат в* R. *Тогда имеет место равенство*

$$Q(\varphi,\alpha)Q(\varphi+\alpha,\beta) = Q(\varphi,\beta)Q(\varphi+\beta,\alpha). \tag{7}$$

Доказательство. Применяя дважды (4), найдем

$$\lambda(\varphi+\alpha+\beta)=Q(\varphi+\alpha,\beta)Q(\varphi,\alpha)\lambda(\varphi)\lambda(\alpha)\lambda(\beta).$$

Меняя ролями α и β, аналогично получим

$$\lambda(\varphi+\alpha+\beta)=Q(\varphi+\beta,\alpha)Q(\varphi,\beta)\lambda(\varphi)\lambda(\alpha)\lambda(\beta).$$

Из этих двух равенств следует (7). $\square$

Лемма 3. *Для любых $\alpha,\beta\in R^+$ таких, что $\alpha+\beta\in R$, имеет место*

$$\lambda(-\alpha)\lambda(\alpha)=Q^{-1}(-\alpha,\alpha+\beta)Q^{-1}(\alpha,\beta). \tag{8}$$

Доказательство. В силу (3), (4), имеем

$$\begin{aligned}N'(-\alpha,\alpha+\beta)&=(\lambda(-\alpha)\lambda(\alpha+\beta)/\lambda(\beta))N(-\alpha,\alpha+\beta)=\\&=(\lambda(-\alpha)\lambda(\alpha)\lambda(\beta)/\lambda(\beta))Q(\alpha,\beta)N(-\alpha,\alpha+\beta)=\\&=\lambda(-\alpha)\lambda(\alpha)Q(\alpha,\beta)N(-\alpha,\alpha+\beta),\end{aligned}$$

что равносильно (8). $\square$

Лемма 4. *Пусть λ_i, μ_i — ненулевые числа такие, что $\lambda_i\mu_i=1$, $i=1,\dots,r$, и B — некоторый базис. Построим новый базис B' с коэффициентами перехода от B, определенными формулами*

$$\lambda(-\alpha)=\mu_1^{k_1}\cdots\mu_r^{k_r},\quad \lambda(\alpha)=\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_r^{k_r} \tag{9}$$

для $\alpha=k_1\alpha_1+\dots+k_r\alpha_r\in R$. Тогда соответствующие структурные константы базисов B и B' совпадают.

Доказательство проводится непосредственной проверкой. $\square$

Лемма 4 позволяет ограничиться рассмотрением новых базисов, для которых

$$\lambda(-\alpha_i)=\lambda(\alpha_i)=1,\quad i=1,\dots,r. \tag{10}$$

Действительно, если B и B' — целочисленные базисы и $\lambda(\alpha)$ — коэффициенты перехода от B к B', то в силу третьего условия целочисленности имеем $\lambda(-\alpha_i)\lambda(\alpha_i)=1$ (т. к. $[x'_{-\alpha_i},x'_{\alpha_i}]=\lambda(-\alpha_i)\lambda(\alpha_i)[x_{-\alpha_i},x_{\alpha_i}]=\lambda(-\alpha_i)\lambda(\alpha_i)h_i=h_i$), $i=1,\dots,r$. Если $\lambda(-\alpha_i)$, $\lambda(\alpha_i)$ не равны все 1, то перейдем от B сначала к базису B'' с коэффициентами перехода, определенными формулами (7) (для $\mu_i=\lambda(-\alpha_i)$, $\lambda_i=\lambda(\alpha_i)$, $i=1,\dots,r$). Поэтому, принимая базис B'' за исходный, будем иметь у него, с одной стороны, структурные константы, те же, что и у B, а с другой стороны, $x''_{-\alpha_i}=x'_{-\alpha_i}$, $x''_{\alpha_i}=x'_{\alpha_i}$ для всех $i=1,\dots,r$.

Как уже говорилось, в качестве исходного базиса B будем всегда рассматривать какой-либо базис Шевалле. Все базисы Шевалле одной и той же алгебры эквивалентны в определенном выше смысле, и для абсолютных значений структурных констант имеем

$$N(\alpha,\beta)=p(\alpha,\beta)+1, \tag{11}$$

где $\alpha,\beta\in R$ такие, что $\alpha+\beta\in R$, и $p=p(\alpha,\beta)$ — максимальное целое неотрицательное число такое, что $\alpha-p\beta\in R$. Будем также писать $q=q(\alpha,\beta)$ — максимальное целое неотрицательное число такое, что $\alpha+q\beta\in R$ и $r(\alpha,\beta)=(p(\alpha,\beta)+1)q(\alpha,\beta)$. Далее в основном будут использоваться числа $p_i(\alpha)=p(\alpha,\alpha_i)$, $q_i(\alpha)=q(\alpha,\alpha_i)$ и $r_i(\alpha)=r(\alpha,\alpha_i)$ для любых $\alpha\in R$ и $\alpha_i\in\Pi$.

Лемма 5. *Пусть B' — произвольный целочисленный базис алгебры L и $\beta\in R^+$, $\alpha_i\in\Pi$ — корни такие, что $\beta+\alpha_i\in R$. Тогда имеет место равенство*

$$N'(\beta+\alpha_i,-\alpha_i)N'(\beta,\alpha_i)=(p(\beta,\alpha_i)+1)q(\beta,\alpha_i)=r_i(\beta). \tag{12}$$

Доказательство. Возьмем в качестве исходного базис Шевалле B, для которого коэффициенты перехода от B к B' удовлетворяют условию (10). Тогда $N(\beta,\alpha) = p(\beta,\alpha)+1$ и $N(\beta+\alpha,-\alpha) = p(\beta+\alpha,-\alpha)+1 = q(\beta,\alpha)$ и равенство (8) принимает вид

$$\lambda(-\alpha)\lambda(\alpha) = N'(\beta+\alpha,-\alpha)N'(\beta,\alpha)/(p(\beta,\alpha)+1)q(\beta,\alpha).$$

Если в этом равенстве в качестве α взять любой простой корень α_i, $i = 1,\dots,r$, то в силу (10) оно приобретет вид

$$N'(\beta+\alpha_i,-\alpha_i)N'(\beta,\alpha_i)/(p(\beta,\alpha_i)+1)q(\beta,\alpha_i) = 1,$$

т.е. совпадает с (12). $\square$

Лемма 6. *Пусть B — базис Шевалле и B' — целочисленный базис, для коэффициентов перехода от B которого выполнены* (10). *Если $\alpha = \beta+\alpha_i \in R$, где $\beta \in R^+$, $\alpha_i \in \Pi$, и $r_i(\beta) = 1$, то $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta)$. В частности, если $\lambda(\beta) = 1$, то и $\lambda(\alpha) = 1$.*

Доказательство. Из (4) имеем $\lambda(\alpha) = Q(\beta,\alpha_i)\lambda(\beta)$. Так как B — базис Шевалле, то $N(\beta,\alpha_i) = p_i(\beta)+1 = 1$ по предположению ($p_i(\beta)+1$ есть делитель $r_i(\beta)$), т. е. $\lambda(\alpha) = \frac{1}{N'(\beta,\alpha_i)}\lambda(\beta)$. Кроме того, в силу (12) имеем $N'(\beta+\alpha_i,-\alpha_i)N'(\beta,\alpha_i) = (p(\beta,\alpha_i)+1)q(\beta,\alpha_i) = 1$. Откуда $N'(\beta,\alpha_i) = 1$. В результате имеем $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta)$. $\square$

Следствие 2. Если $\lambda(\alpha)$, $\alpha \in R$, — коэффициенты перехода от базиса Шевалле к некоторому новому базису, для которых выполняются равенства (10), то $\lambda(\pm(\alpha_i+\dots+\alpha_j)) = 1$ для любых $1 \le i < j \le r$.

Доказательство. Ограничимся положительными корнями и воспользуемся индукцией по $j-i$. В случае $j-i = 0$ имеем $\lambda(\alpha_i) = 1$ по условию. При $j-i > 0$ в силу леммы 6 имеем $\lambda(\alpha_i+\dots+\alpha_j) = \lambda(\alpha_i+\dots+\alpha_{j-1}) = 1$ по предположению индукции. $\square$

Лемма 7. *Если корень $\alpha \in R^+$ имеет правильный путь $(i_1,\dots,i_m)$ такой, что $r_{i_{k+1}}(\varphi_k) = 1$ для всех $k = 1,\dots,m-1$, то $\lambda(\alpha) = \lambda(-\alpha) = 1$.*

Доказательство. Если в условиях леммы 5 $r_i(\beta) = 1$, то в силу (12) $N'(\beta,\alpha_i) = 1$ (и $N'(\beta+\alpha_i,-\alpha_i) = 1$) для любого целочисленного базиса, а отсюда и $Q(\beta,\alpha_i) = 1$ для любых целочисленных базисов B и B'. Поэтому утверждение леммы следует из (5) и (6) (следствие 1). $\square$

Лемма 8. *Пусть $\alpha \in R^+$, $\alpha_i \in \Pi$ такие, что $\beta = \alpha+\alpha_i \in R$, $p_i(\alpha) = q_i(\alpha) = 1$ ($\Rightarrow$ $r_i(\alpha) = 2$) и $\lambda(\alpha) = \lambda(\alpha_i) = 1$. Тогда $\lambda(\beta)$ равно либо 1, либо 2.*

Доказательство. Согласно (4) имеем $\lambda(\beta) = \frac{N(\alpha,\alpha_i)}{N'(\alpha,\alpha_i)} = \frac{2}{N'(\alpha,\alpha_i)}$, т. к. $\lambda(\alpha) = \lambda_i = 1$ и $N(\alpha,\alpha_i) = 2$. С другой стороны, $N'(\beta,-\alpha_i)N'(\alpha,\alpha_i) = 2$ ввиду (12), т. е. $N'(\alpha,\alpha_i)$ есть делитель 2. Следовательно, $\lambda(\beta)$ равно либо 1, либо 2. $\square$

Лемма 9. *Пусть $\alpha \in R^+$, $\alpha_i \in \Pi$ такие, что $\beta = \alpha+\alpha_i \in R$, $p = p_i(\alpha) = 1$, $q_i(\alpha) = 2$ ($\Rightarrow$ $r = r_i(\alpha) = 4$) и $\lambda(\alpha) = \lambda(\alpha_i) = 1$. Тогда $\lambda(\beta)$ равно либо $\frac{1}{2}$, либо 1, либо 2.*

Доказательство. Согласно (4) имеем $\lambda(\beta) = \frac{N(\alpha,\alpha_i)}{N'(\alpha,\alpha_i)} = \frac{2}{N'(\alpha,\alpha_i)}$, т. к. $\lambda(\alpha) = \lambda_i = 1$ и $N(\alpha,\alpha_i) = p+1 = 2$. С другой стороны, по (12) имеем $N'(\beta,-\alpha_i)N'(\alpha,\alpha_i) = r = 4$, т. е. $N'(\alpha,\alpha_i)$ есть делитель 4 (т. к. по предположению базис B' целочисленный). Следовательно, $\lambda(\beta)$ равно либо $\frac{1}{2}$, либо 1, либо 2. $\square$

Лемма 10. *Пусть $\alpha \in R^+$, $\alpha_i \in \Pi$ такие, что $\beta = \alpha+\alpha_i \in R$, $p = p_i(\alpha) = 2$, $q_i(\alpha) = 1$ ($\Rightarrow$ $r = r_i(\alpha) = 3$) и $\lambda(\alpha) = m$, $\lambda(\alpha_i) = 1$. Тогда $\lambda(\beta)$ равно либо m, либо $3m$.*

Доказательство. Согласно (4) имеем $\lambda(\beta) = \frac{N(\alpha,\alpha_i)}{N'(\alpha,\alpha_i)}\lambda(\alpha) = \frac{3m}{N'(\alpha,\alpha_i)}$, т. к. $\lambda(\alpha) = m$, $\lambda_i = 1$ и $N(\alpha,\alpha_i) = p + 1 = 3$. С другой стороны, по (12) имеем $N'(\beta,-\alpha_i)N'(\alpha,\alpha_i) = r = 3$, т. е. $N'(\alpha,\alpha_i)$ есть делитель 3 (т. к. по предположению базис B' целочисленный). Следовательно, $\lambda(\beta)$ равно либо m, либо $3m$. $\square$

Доказательство теоремы А. Пусть $B \in \mathcal{B}$ — базис, удовлетворяющий условию теоремы А, и B' — любой другой базис из $\mathcal{B}$. Так как коэффициенты перехода от B к B' удовлетворяют условию (10), то в силу (8) имеем $N'(-\alpha_i,\alpha_i+\beta)N'(\alpha_i,\beta) = N(-\alpha_i,\alpha_i+\beta)N(\alpha_i,\beta) = 1$. Отсюда $N'(\alpha_i,\beta) = 1$, а следовательно, и соответствующее $Q(\alpha_i,\beta) = 1$. Теперь ввиду (6) имеем $\lambda(\alpha) = \prod\limits_{t=1}^{m-1} Q(\varphi_t,\alpha_{i_{t+1}})\lambda(\alpha_1)^{k_1}\cdots\lambda(\alpha_r)^{k_r} = 1$ для любого $\alpha \in R^+$. Аналогично все $\lambda(-\alpha)$ равны 1. $\square$

Ниже мы рассматриваем каждый из не охваченных теоремой А тип простой классический алгебры Ли отдельно. План исследования этих случаев следующий. Сначала для каждого $\alpha \in R$ находим необходимые значения, которым должен равняться $\lambda(\alpha)$, чтобы быть коэффициентом перехода к новому целочисленному базису. Для этого двигаемся по некоторому правильному пути корня α. Начало пути — простой корень, коэффициент по предположению равен 1. Далее на каждом шаге применяем одну из лемм 6–10. После вычисления всех коэффициентов производим проверку того, что базис, полученный с их помощью, имеет целые структурные константы.

При этом достаточно проверить только константы $N(\alpha,\beta)$ для $\alpha,\beta \in R$ с $\alpha+\beta \in R$. Действительно, $[x'_{-\alpha},x'_\alpha] = \lambda(-\alpha)\lambda(\alpha)h_\alpha$, где $h_\alpha = [x_{-\alpha},x_\alpha]$. Во всех случаях коэффициент $\lambda(-\alpha)\lambda(\alpha)$ оказывается числом целым и, т. к. исходный базис целочисленный, а значит, все коэффициенты разложения h_α через h_i — числа целые, то же будет верно и для h'_α.

Что касается второго и третьего условий целочисленности, то они при переходе к новому базису выполняются автоматически, если справедливы для исходного.

4. Случай алгебры типа B_r. Введем обозначения для корней. Для простых корней положим $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, $i = 1,\dots,r-1$; $\alpha_r = \varepsilon_r$, а для положительных корней системы типа $R = B_r$ положим (см. [1], с. 306, табл. II)

$$\alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j, \quad \beta_{ij} = \varepsilon_i + \varepsilon_j, \quad 1 \le i < j \le r, \quad \beta_i = \varepsilon_i, \quad i = 1,\dots,r.$$

Доказательство теоремы В. Необходимость равенств (b). Если базис B' целочисленный, $\lambda(\alpha)$ — коэффициент перехода от базиса Шевалле B к B', то при соблюдении (10) имеют место следующие утверждения:

1) $\lambda(\alpha_{ij}) = 1$ для $1 \le i < j \le r$ в силу следствия 2;

2) $\lambda(\beta_i) = 1$ для всех $i = 1,\dots,r$.

Индукция по i "сверху вниз", основание которой дает условие $\lambda(\beta_r) = \lambda(\alpha_r) = 1$. Так как $\alpha_i + \beta_{i+1} = \beta_i$ и $r_i(\beta_{i+1}) = 1$, то по лемме 6 имеем $\lambda(\beta_i) = 1$, если $\lambda(\beta_{i+1}) = 1$ для $1 \le i < r$.

3) $\lambda(\beta_{ij}) = \lambda(\beta_{ir})$ для $1 \le i < j < r$.

Так как $\alpha_j + \beta_{i,j+1} = \beta_{ij}$ и $r_j(\beta_{i,j+1}) = 1$ для $1 \le i < j < r$, то в силу леммы 6 имеем $\lambda(\beta_{ij}) = \lambda(\beta_{i,j+1})$. Остается применить индукцию ("сверху вниз") по j.

4) $\lambda(\beta_{ir}) = \lambda(\beta_{r-1,r})$ для $1 \le i < r$.

Так как $\alpha_i + \beta_{i+1,r} = \beta_{ir}$ и $r_i(\beta_{i+1,r}) = 1$ для $1 \le i < j-1 \le r-1$, то $\lambda(\beta_{ir}) = \lambda(\beta_{i+1,r})$. Отсюда индукцией по i ("сверху вниз") имеем 4).

Таким образом, $\lambda(\beta_{ij}) = \lambda(\beta_{r-1,r})$ для всех $1 \le i < j \le r$.

5) $\lambda(\beta_{r-1,r})$ равно либо 1, либо 2.

Так как $\alpha_r + \beta_i = \beta_{ir}$ и $p_r(\beta_i) = q_r(\beta_i) = 1$ ($\Rightarrow$ $r_r(\beta_i) = 2$) при $1 \le i < r$, то по (4) имеем $\lambda(\beta_{r-1,r}) = Q(\alpha_r,\beta_{r-1}) = \frac{2}{N'(\alpha_r,\beta_{r-1})}$ (т. к. $\lambda(\alpha_r) = \lambda(\beta_i) = 1$ и $N(\alpha_r,\beta_{r-1}) = p_r(\beta_{r-1}) + 1 = 2$). С другой стороны, по (12) имеем $N'(\beta_{r-1,r},-\alpha_r)N'(\alpha_r,\beta_{r-1}) = 2$, т. е. $N'(\alpha_r,\beta_{r-1})$ есть делитель 2. Следовательно, $\lambda(\beta_{r-1,r})$ равно либо 1, либо 2.

Коэффициенты для отрицательных корней определяются аналогично.

Достаточность. Пусть B' — базис, полученный из базиса Шевалле B с помощью коэффициентов (b). Убедимся, что все его структурные константы — числа целые. Для этого рассмотрим выражения абсолютных значений структурных констант нового базиса через такие же значения старого. Из формулы (3) видно, что константа $N'(\alpha,\beta)$ может быть дробной только в случае, когда $\lambda(\alpha+\beta)=2$, а $\lambda(\alpha)\lambda(\beta)N(\alpha,\beta)$ не делится на 2. В частности, если хотя бы один из коэффициентов $\lambda(\alpha)$ или $\lambda(\beta)$ равен 2, то $N'(\alpha,\beta)$ — число целое при любом $N(\alpha,\beta)$. Поэтому дробное значение может получиться только в случае $\alpha,\beta\in\{\pm\alpha_{ij},\pm\beta_i\}$, а $\alpha+\beta=\pm\beta_{ij}$ и $N(\alpha,\beta)=1$ (т. к. для любых $\alpha,\beta\in R$ при $q(\alpha,\beta)>0$ число $N(\alpha,\beta)=p(\alpha,\beta)+1$ равно либо 1, либо 2). Такой пары корней в B_r нет.

Таким образом, все четыре возможности приводят к новому целочисленному базису, два из которых самосимметричны (когда $\varepsilon=\eta$) и два симметричны друг другу. Следовательно, с точностью до симметрии имеем три различных целочисленных базиса. □

5. Случай алгебры типа C_r. Обозначим простые корни $\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}$, $i=1,\dots,r-1$; $\alpha_r=2\varepsilon_r$ и

$$\alpha_{ij}=\varepsilon_i-\varepsilon_j,\quad \beta_{ij}=\varepsilon_i+\varepsilon_j,\quad 1\le i<j\le r,\quad \gamma_i=2\varepsilon_i,\quad i=1,\dots,r,$$

— множество всех положительных корней системы типа $R=C_r$ (см. [3], с. 306, табл. III).

Доказательство теоремы C. Необходимость равенств (c) для целочисленности нового базиса вытекает из следующих утверждений. Если $\lambda(\alpha)$ — коэффициент перехода от базиса Шевалле B к новому целочисленному базису B' и выполнено (10), то

1) $\lambda(\alpha_{ij})=1$ для $1\le i<j\le r$ по следствию 2,

2) $\lambda(\beta_{ir})=1$ для всех $i=1,\dots,r-1$.

Так как $\alpha_{ir}+\alpha_r=\beta_{ir}$, $r_r(\alpha_{ir})=1$ и $\lambda(\alpha_{ir})=1$, то по лемме 6 имеем $\lambda(\beta_{ir})=1$ для $1\le i<r$.

3) $\lambda(\beta_{ij})=1$ для $1\le i<j\le r$.

Индукция по j ("сверху вниз"), основание которой доказано в 2). Так как $\beta_{i,j+1}+\alpha_j=\beta_{ij}$ и $r=1$ для $1\le i<j<r$, то в силу леммы 6 имеем $\lambda(\beta_{ij})=\lambda(\beta_{i,j+1})=1$ по предположению индукции.

4) $\lambda(\gamma_i)$ равно либо 1, либо 2 при $1\le i<r$.

По (4) имеем $\lambda(\gamma_i)=\lambda(\beta_{i,i+1}+\alpha_i)=\frac{2}{N'(\beta_{i,i+1},\alpha_i)}$ (т. к. $p_i(\beta_{i,i+1})+1=2$, $\lambda(\alpha_i)=1$ для $1\le i<r$ по условию и $\lambda(\beta_{i,i+1})=1$ по 3)). С другой стороны, по (12) имеем $N'(\gamma_i,-\alpha_i)N'(\beta_{i,i+1},\alpha_i)=r_i(\beta_{i,i+1})=2$, откуда $N'(\beta_{i,i+1},\alpha_i)$ есть делитель числа 2. Следовательно, и $\lambda(\gamma_i)$ есть делитель числа 2.

Аналогичные заключения справедливы и для $\lambda(-\alpha)$, $\alpha\in R^+$.

Достаточность. Пусть B' — базис, полученный из базиса Шевалле B с помощью коэффициентов (c). Из формулы (3) видно, что константа $N'(\alpha,\beta)$ может быть дробной только в случае, когда $\lambda(\alpha+\beta)=2$, а $\lambda(\alpha)\lambda(\beta)N(\alpha,\beta)$ не делится на 2. Поэтому дробное значение может получиться только в случае $\alpha,\beta\in\{\pm\alpha_{ij},\pm\beta_{ij}\}$, а $\alpha+\beta=\pm\gamma_k$ (для $k=1,\dots,r-1$) и $N(\alpha,\beta)=1$ (т. к. для любых $\alpha,\beta\in R$ при $q(\alpha,\beta)>0$ имеем $N(\alpha,\beta)=p(\alpha,\beta)+1$ равно либо 1, либо 2). Такой пары корней в C_r нет. Действительно, $\alpha+\beta$ может равняться $\pm\gamma_k$ только в случаях $\alpha=\pm\alpha_{ij}$, $\beta=\pm\beta_{ij}$, но при этом $p(\alpha,\beta)=1$, т. е. $N(\alpha,\beta)=p(\alpha,\beta)+1=2$.

Таким образом, все 2^{2r-2} возможностей приводят к новому целочисленному базису, из которых 2^{r-1} самосимметричны (при $\xi_k=\eta_k$, $k=1,\dots,r-1$), а остальные $2^{2r-2}-2^{r-1}$ разбиваются на пары ($2^{r-2}(2^{r-1}-1)$ пар), симметричных друг другу. Поэтому с точностью до симметрии имеем $2^{r-1}+2^{r-2}(2^{r-1}-1)=2^{r-2}(2^{r-1}+1)$ различных базисов. □

6. Случай алгебры типа F_4. Положим для простых корней системы типа F_4

$$\alpha_1=\varepsilon_2-\varepsilon_3,\quad \alpha_2=\varepsilon_3-\varepsilon_4,\quad \alpha_3=\varepsilon_4,\quad \alpha_4=\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)$$

и для следующих положительных корней:

$$\delta_1=\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4),\quad \delta_2=\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4),\quad \delta_3=\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4),$$
$$\delta_4=\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4),\quad \delta_5=\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4),\quad \delta_6=\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4),$$
$$\delta_7=\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4),\quad \delta_8=\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4).$$

Для остальных положительных корней ε_i $(1\le i\le 4)$; $\varepsilon_i-\varepsilon_j$, $\varepsilon_i+\varepsilon_j$ $(1\le i<j\le 4)$ специальных обозначений вводить не будем (см. [3], с. 317, табл. VIII).

Доказательство теоремы F. Необходимость равенств (f). Если $\lambda(\alpha)$ — коэффициент перехода от базиса Шевалле B к новому базису B' и имеют место (10), то справедливы следующие утверждения.

1) Имеем $\lambda(\pm(\varepsilon_i-\varepsilon_j))=1$ при $2\le i<j\le 4$, $\lambda(\pm\varepsilon_j)=1$ при $j=2,3,4$ и $\lambda(\pm\delta_i)=1$ при $i=1,2,3,4$.

Это непосредственно вытекает из следствия 2, т. к. множество положительных корней, для которых выписаны здесь коэффициенты, совпадает с множеством $\{\alpha_i+\cdots+\alpha_j\mid 1\le i<j\le 4\}$.

2) Имеем $\lambda(\pm\delta_i)=1$ при $i=5,6,7,8$ и $\lambda(\pm\varepsilon_1)=1$.

Действительно, $\delta_5=\delta_3+\alpha_3$ и $\delta_{5+i}=\delta_{4+i}+\alpha_i$ для $i=1,2,3$. Так как $\lambda(\delta_3)=1$ и $r(\delta_3,\alpha_3)=1$, то по лемме 6 имеем $\lambda(\delta_5)=1$. Точно так же последовательно для $i=1,2,3$ имеем $\lambda(\delta_{5+i})=1$. Наконец, т. к. $\varepsilon_1=\delta_8+\alpha_4$, причем опять $r(\delta_8,\alpha_4)=1$, то по лемме 6 и $\lambda(\varepsilon_1)=1$. Аналогично рассматриваются и отрицательные корни.

3) Имеем $\lambda(-\varepsilon_3-\varepsilon_4)=\xi_1$, $\lambda(-\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\xi_2$, $\lambda(-\varepsilon_1-\varepsilon_3)=\xi_3$, $\lambda(\varepsilon_3+\varepsilon_4)=\eta_1$, $\lambda(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=\eta_2$, $\lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=\eta_3$, где каждое ξ_i,η_i независимо друг от друга принимает одно из двух значений 1 или 2.

В самом деле, опять ограничиваясь рассмотрением только положительных корней, имеем $\varepsilon_3+\varepsilon_4=\varepsilon_3+\alpha_3$, $\lambda(\varepsilon_3)=1$ и $p(\varepsilon_3,\alpha_3)=q(\varepsilon_3,\alpha_3)=1$. Поэтому по лемме 8 $\lambda(\varepsilon_3+\varepsilon_4)$ равно либо 1, либо 2. Тем же условиям удовлетворяют разложения $\varepsilon_1-\varepsilon_2=\delta_5+\alpha_4$ и $\varepsilon_1+\varepsilon_3=\varepsilon_1+\alpha_3$, а потому по лемме 8 каждое из $\lambda(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$ и $\lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_3)$ равно либо 1, либо 2.

4) Имеем $\lambda(-\varepsilon_i-\varepsilon_j)=\xi_1$ для $2\le i<j\le 4$, $\lambda(-\varepsilon_1+\varepsilon_j)=\xi_2$ для $j=2,3,4$, $\lambda(-\varepsilon_1-\varepsilon_j)=\xi_3$ для $j=2,3,4$, $\lambda(\varepsilon_i+\varepsilon_j)=\eta_1$ для $2\le i<j\le 4$, $\lambda(\varepsilon_1-\varepsilon_j)=\eta_2$ для $j=2,3,4$, $\lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_j)=\eta_3$ для $j=2,3,4$.

Утверждение справедливо в силу леммы 6 относительно разложений $\varepsilon_2+\varepsilon_4=\varepsilon_3+\varepsilon_4+\alpha_1$, $\varepsilon_2+\varepsilon_3=\varepsilon_2+\varepsilon_4+\alpha_2$, $\varepsilon_1-\varepsilon_3=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\alpha_1$, $\varepsilon_1-\varepsilon_4=\varepsilon_1-\varepsilon_3+\alpha_2$, $\varepsilon_1+\varepsilon_3=\varepsilon_1+\varepsilon_4+\alpha_2$, $\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon_1+\varepsilon_3+\alpha_1$, т. к. правая часть $\beta+\alpha_i$ всех этих равенств такая, что $p(\beta,\alpha_i)=0, q(\beta,\alpha_i)=1$.

Достаточность. Пусть B' — базис, полученный из базиса Шевалле B с использованием коэффициентов перехода, определенных по формулам (f). Проверим, что структурные константы такого нового базиса в любом случае — числа целые. Рассмотрим выражения абсолютных значений структурных констант нового базиса через такие же значения старого. Так как коэффициенты $\lambda(\alpha)$ при любом $\alpha\in R$ и абсолютные значения структурных констант (относительно B) могут принимать только два значения 1 и 2, то из формулы (3) видно, что константа $N'(\alpha,\beta)$ может оказаться дробной только при одновременном выполнении следующих равенств: 1) $\lambda(\alpha+\beta)=2$, 2) $\lambda(\alpha)=\lambda(\beta)=1$ и 3) $N(\alpha,\beta)=p(\alpha,\beta)+1=1$ (т. е. $p(\alpha,\beta)=0$).

Выделим такие пары корней. Для этого разобъем корневую систему $R=F_4$ на два подмножества:

$$R_1=\{\pm\varepsilon_i,\ i=1,2,3,4;\ \pm(\varepsilon_i-\varepsilon_j),\ 2\le i<j\le 4;\ \pm\tfrac{1}{2}(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2\pm\varepsilon_3\pm\varepsilon_4)\},$$
$$R_2=\{\pm(\varepsilon_i+\varepsilon_j),\ 1\le i<j\le 4;\ \pm(\varepsilon_1-\varepsilon_k),\ k=2,3,4\}.$$

По доказанному имеем $\lambda(\alpha)=1$ для любого $\alpha\in R_1$ и $\lambda(\gamma)$ равно либо 1, либо 2, если $\gamma\in R_2$. Поэтому если пара α,β удовлетворяет первому условию, то $\alpha+\beta\in R$.

Переберем сначала все пары корней $\alpha, \beta \in R_1$ такие, что $\gamma = \alpha + \beta \in R_2$. В силу симметрии можно ограничиться случаями, когда $\gamma \in R^+$. Если эта пара имеет вид $\alpha = \pm\varepsilon_i$, $\beta = \pm\varepsilon_j$ и $\alpha + \beta \in R$, то и $\alpha - \beta \in R$ (но $\alpha - 2\beta \notin R$), т.е. $p(\alpha, \beta) = 1$, а $N(\alpha, \beta) = 2$, и третье условие не выполнено. Если пары имеют вид $\alpha = \pm\varepsilon_i$, $\beta = \pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j)$ или $\alpha = \pm\varepsilon_i$, $\beta = \pm\frac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$, то $\alpha + \beta$ не лежит в R_2 в любом случае. Случай $\alpha = \pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j)$, $\beta = \pm(\varepsilon_k - \varepsilon_l)$ при $2 \le i < j$, $i < k < l$, не может дать $\gamma = \alpha + \beta \in R_2$, т.к. здесь $\gamma \in R$ должно иметь вид $\pm(\varepsilon_s - \varepsilon_t)$, где $s, t > 1$. Пусть $\alpha = \pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j)$, $\beta = \pm\frac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$. Если в этом случае $\gamma = \alpha + \beta \in R$, то оно тоже имеет вид $\gamma = \pm\frac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$, т.е. опять не лежит в R_2 в любом случае. Остается рассмотреть случай, когда α и β оба имеют вид $\pm\frac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$. Если здесь $\alpha + \beta = \gamma \in R_2$, то $\alpha = \frac{1}{2}(\gamma + \delta)$ и $\beta = \frac{1}{2}(\gamma - \delta)$ (для некоторого $\delta \in R$ вида $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$), а потому и $\alpha - \beta \in R$, т.е. $p(\alpha, \beta) = 1$ и опять не выполнено третье условие.

Рассмотрим случай, когда $\alpha \in R_1$, $\beta \in R_2$. Здесь $\alpha + \beta \in R_2$ только при $\alpha = \pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j)$, $2 \le i < j \le 4$, и $\beta = \pm(\varepsilon_s + \varepsilon_t)$, $1 \le s, t \le 4$, $s \ne t$. В этом случае, если $\alpha + \beta \in R_2$, то тоже имеет вид $\pm(\varepsilon_s + \varepsilon_t)$. При этом, если $\min\{s, t\} = 1$ в β, то и в $\alpha + \beta$ будет $\min\{s, t\} = 1$, т.е. $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda(\beta)$, и, следовательно, $N'(\alpha, \beta)$ — целое число в любом случае.

Остается случай, когда $\alpha \in R_2$ и $\beta \in R_2$. Такими корнями в $R = F_4$ являются только корни

$$\begin{aligned} &\alpha = \varepsilon_i + \varepsilon_j, \quad \beta = \varepsilon_1 - \varepsilon_j, \;\; \alpha + \beta = \varepsilon_1 + \varepsilon_i, \;\; 2 \le i, j \le 4, \;\; i \ne j; \\ &\alpha = -\varepsilon_i - \varepsilon_j, \;\; \beta = \varepsilon_1 + \varepsilon_j, \;\; \alpha + \beta = \varepsilon_1 - \varepsilon_i, \;\; 2 \le i, j \le 4, \;\; i \ne j; \end{aligned}$$

и пары симметричные, т.е. $(-\alpha, -\beta)$. Для всех этих пар имеем $p(\alpha, \beta) = 0$, $q(\alpha, \beta) = 1$, т.е. $N(\alpha, \beta) = 1$. Кроме того, $\lambda(\alpha) = \lambda(\varepsilon_i + \varepsilon_j) = \eta_1$, $\lambda(\beta) = \lambda(\varepsilon_1 - \varepsilon_j) = \eta_2$ и $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_j) = \eta_3$. Откуда в силу (3) $N'(\alpha, \beta) = \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_3}$ в первом случае. Во втором случае $\lambda(\alpha) = \lambda(-\varepsilon_i - \varepsilon_j) = \xi_1$, $\lambda(\beta) = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_j) = \eta_3$ и $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda(\varepsilon_1 - \varepsilon_i) = \eta_2$. Откуда согласно (3) $N'(\alpha, \beta) = \frac{\xi_1 \eta_3}{\eta_2}$. Аналогично рассматриваются симметричные возможности. Таким образом, для целочисленности всех структурных констант необходимо выполнение условий (1).

Равенства (f) допускают 2^6 возможностей значений параметров $(\xi_i, \eta_i, i = 1, 2, 3)$, среди которых 26 не удовлетворяют условиям (1) (остается 38). В самом деле, каждое дробное выражение (1) исключает единственный набор трех входящих в него параметров, который, следовательно, входит в 8 возможных наборов всех 6 значений параметров. Однако среди последних есть общие (два раза по 2 и два раза по 1, всего 6), т.е. имеем 26 различных наборов параметров, которые не удовлетворяют хотя бы одному из 4 условий (1). Среди всех возможностей 2^3 самосимметричных (при $\xi_k = \eta_k$, $k = 1, 2, 3$) и 2 из них не удовлетворяют (1) (остается 6). В итоге имеем 16 пар симметричных между собой и 6 самосимметричных возможностей значений параметров, т.е. с точностью до симметрии и эквивалентности имеем 22 различных целочисленных базиса. □

7. Случай алгебры типа G_2. В случае $R = G_2$ введем обозначения для положительных корней (см. [3], с. 319, табл. IX)

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \\ &\alpha_2 = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ &\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_3, \end{aligned}\right| \begin{aligned} &\alpha_4 = \alpha_3 + \alpha_1 = -\varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ &\alpha_5 = \alpha_4 + \alpha_1 = -2\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \\ &\alpha_6 = \alpha_5 + \alpha_2 = 2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \end{aligned}$$

где α_1, α_2 — простые корни.

Доказательство теоремы G. Необходимость (g). Имеем
$p(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, $q(\alpha_1, \alpha_2) = 1$; $\Rightarrow \lambda(\alpha_3) = 1$ (лемма 6);
$p(\alpha_3, \alpha_1) = 1$, $q(\alpha_3, \alpha_1) = 2$; $\Rightarrow \lambda(\alpha_4) = (\frac{1}{2}, 1, 2)$ (лемма 9);
$p(\alpha_4, \alpha_1) = 2$, $q(\alpha_4, \alpha_1) = 1$; $\Rightarrow \lambda(\alpha_5) = (\lambda(\alpha_4), 3\lambda(\alpha_4))$ (лемма 10);
$p(\alpha_5, \alpha_2) = 0$, $q(\alpha_5, \alpha_2) = 1$; $\Rightarrow \lambda(\alpha_6) = \lambda(\alpha_5)$ (лемма 6),
где равенство $\lambda = (x, y, z)$ означает, что λ равно одному из x, y, z.

Достаточность. Рассмотрим формулу (3): $N'(\alpha, \beta) = (p(\alpha, \beta) + 1)\lambda(\alpha)\lambda(\beta)\frac{1}{\lambda(\alpha+\beta)}$ для всех пар α, β.

Случай $\alpha, \beta \in R^+$ $(N'_{ij} = N'(\alpha_i, \alpha_j))$.
$N'_{21} = 1$, $N'_{31} = 2\frac{1}{\eta_1}$, $N'_{41} = 3\eta_1\frac{1}{\eta_1\eta_2} = 3\frac{1}{\eta_2}$, $N'_{52} = \eta_1\eta_2\frac{1}{\eta_1\eta_2} = 1$, $N'_{43} = 3\eta_1\frac{1}{\eta_1\eta_2} = 3\frac{1}{\eta_2}$.

Случай $\alpha \in R^+$, $\beta \in R^-$ $(M'_{ij} = N'(\alpha_i, -\alpha_j))$.
$M'_{13} = 3$, $M'_{14} = 2\xi_1$, $M'_{15} = \xi_1\xi_2\frac{1}{\xi_1} = \xi_2$; $M'_{23} = 1$, $M'_{26} = \xi_1\xi_2\frac{1}{\xi_1\xi_2} = 1$;
$M'_{31} = 3$, $M'_{32} = 1$, $M'_{34} = 2\xi_1$, $M'_{36} = \xi_1\xi_2\frac{1}{\xi_1} = \xi_2$;
$M'_{41} = 2\eta_1$, $M'_{43} = 2\eta_1$, $M'_{45} = \eta_1\xi_1\xi_2$, $M'_{46} = \eta_1\xi_1\xi_2 \Rightarrow \eta_1\xi_1$ — целое число;
$M'_{51} = \eta_1\eta_2\frac{1}{\eta_1} = \eta_2$, $M'_{54} = \eta_1\eta_2\xi_1$, $M'_{56} = \eta_1\eta_2\xi_1\xi_2$;
$M'_{62} = \eta_1\eta_2\frac{1}{\eta_1\eta_2} = 1$, $M'_{63} = \eta_1\eta_2\frac{1}{\eta_1} = \eta_2$, $M'_{64} = \eta_1\eta_2\xi_1$, $M'_{65} = \eta_1\eta_2\xi_1\xi_2$.
Эти равенства показывают, что при дополнительном условии (2), которое здесь сводится к $\xi_1\eta_1 \in \mathbb{Z}$, все структурные константы — действительно целые числа при любом указанном выборе параметров ξ, η.

Из 9 пар значений для (ξ_1, η_1), определяемых (g), следующие три не удовлетворяют условию (2): $(1/2, 1/2)$, $(1/2, 1)$, $(1, 1/2)$. Остается 6 пар, из которых 2 самосимметричные. Поэтому всего возможных значений для параметров ξ_i, η_i, удовлетворяющих условиям теоремы G, равно 24, в числе которых 4 самосимметричных. Остальные 20 разбиваются на 10 пар симметричных. Следовательно, с точностью до симметрии и эквивалентности имеем 14 различных целочисленных базисов. $\square$

Литература

1. Ермолаев Ю.Б. *О пропорциональности лиевых слов в классических алгебрах Ли* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 9. – С. 25-36.
2. Бурбаки Н. *Элементы математики. Группы и алгебры Ли.* – М.: Мир, 1978. – 344 с.
3. Бурбаки Н. *Элементы математики. Группы и алгебры Ли.* – М.: Мир, 1972. – 334 с.

Казанский государственный университет

Поступила 05.03.2002