УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

2016, Т. 158, кн. 3 ISSN 1815-6169 (Print)
С. 478–487 ISSN 2500-218X (Online)

УДК 528.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ СТРУКТУРЫ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ ПЛАНЕТ ЗЕМНОЙ ГРУППЫ

Р.А. Кащеев, И.О. Новлянская

Казанский (*Приволжский*) *федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

Аннотация

С целью количественной оценки свойств симметрии внутреннего строения планет предложен ряд численных критериев (мер), характеризующих степень выраженности симметрий моделей их гравитационных полей относительно различных направлений и плоскостей. По значениям гармонических коэффициентов разложения гравитационного потенциала в ряд по сферическим функциям вычислены величины введённых критериев для Земли, Луны, Марса и Венеры. Показано, что Венера является наиболее симметричным из рассмотренных тел, наименее симметричным оказался Марс.

Ключевые слова: гравитационный потенциал, симметрия, Земля, Луна, Марс, Венера

Полтора десятилетия нового века стали весьма плодотворными с точки зрения изучения тонкой структуры гравитационных полей Земли и ряда других тел Солнечной системы. Эти успехи оказались обусловленными успешной реализацией космических проектов, связанных главным образом с применением технологий дифференциальных измерений в спутниковых системах с изменяемой геометрией расположения элементов: межспутникового слежения и спутниковой градиентометрии. В настоящее время созданы различные модели потенциалов силы притяжения этих тел, отличающиеся друг от друга количеством числовых параметров, источниками и составом исходной наблюдательной информации, методами её обработки и, как следствие, разнообразием свойств и точностных характеристик.

В работах [1, 2] обсуждаются результаты сравнения моделей силы притяжения Земли, Луны и Марса. Однако следует подчеркнуть, что критерии, использованные нами в этих статьях, позволяют сравнивать друг с другом модели каждой отдельной планеты, но не дают возможности сопоставления между собой моделей различных небесных тел. Методика такого сравнения, основанная на использовании свойств симметрии гравитационных потенциалов исследуемых планет, а также результаты её реализации на примере сопоставления моделей гравитационных полей Земли, Луны, Марса и Венеры рассматриваются в настоящей статье.

Представление потенциала ньютоновской силы притяжения выберем в наиболее распространенной форме разложения его в ряд объемных сферических (шаровых) функций:

$$V(\rho, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{\rho}\left[1 + \sum_{n=2}^{N}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n}(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda)P_{nm}(\sin\varphi)\right], \qquad (1)$$

В (1) приняты следующие обозначения:

$G = 6.674\cdot 10^{-11}$ м^3/кг·с^2 – кавендишева гравитационная постоянная, M и a – масса и средний экваториальный радиус исследуемой планеты соответственно;

ρ, φ, λ – планетоцентрические сферические координаты точки внешнего пространства;

$\{C_{nm}, S_{nm}\}$ – совокупность гармонических коэффициентов (часто называемых стоксовыми постоянными) ряда (1), представляющая собой модель гравитационного поля планеты;

$P_{nm}(\sin\varphi)$ – присоединённые функции Лежандра (полиномы) степени n и порядка m.

Заметим, что в связи с быстрым ростом коэффициентов этих полиномов по мере роста индексов n и m при вычислениях по формуле (1) используются согласованно нормированные значения гармонических коэффициентов $\{C_{nm}, S_{nm}\}$ и присоединённых функций Лежандра $P_{nm}(\sin\varphi)$. В частности, на сайте Международного центра моделей гравитационного поля ICGEM (International Center for Global Earth Models) [3] гармонические коэффициенты представлены в полностью нормированном виде, предполагающем соответствующее нормирование присоединённых функций Лежандра в разложении (1). Нормировка вводится главным образом для того, чтобы облегчить вычисление нормированных присоединенных функций Лежандра, которые, будучи ненормированными, демонстрируют лавинообразное нарастание коэффициентов полиномов при больших значениях степени n и порядка m. Поскольку в случае изучения свойств симметрии умножение коэффициентов моделей потенциалов на присоединённые функции не происходит, следует, предваряя вычисления, выполнить разнормирование стоксовых постоянных путем домножения полностью нормированных их значений на нормирующий коэффициент вида:

$$N_{nm} = \sqrt{\frac{(2-\sigma_{m0})(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}}, \quad \text{где } \sigma_{m0} = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq 0 \\ 1 & \text{при } m = 0 \end{cases},$$

то есть перейти к их ненормированным значениям $C_{nm} = C'_{nm}\cdot N_{nm}$, $S_{nm} = S'_{nm}\cdot N_{nm}$, где $\{C_{nm}, S_{nm}\}$ и $\{C'_{nm}, S'_{nm}\}$ – ненормированные и нормированные гармонические коэффициенты соответственно, N_{nm} – нормирующий коэффициент.

Уместно напомнить, что бесконечномерное множество слагаемых (членов) ряда (1) принято разделять на три бесконечномерных подмножества: а) не зависящие от долготы зональные члены, для которых $m = 0$, б) секториальные члены, для которых $m = n$, в) тессеральные члены, для которых $m \neq 0$, $m \neq n$.

Понятно, что любая симметрия функции распределения плотности вещества планетного тела влечёт за собой аналогичную симметрию его гравитационного потенциала. Симметрия гравитационного потенциала, в свою очередь, генерирует дополнительные условия (ограничения), которым должны удовлетворять коэффициенты разложения гравитационного потенциала в ряд по сферическим функциям [4]. По этой причине значение меры, характеризующей степень удовлетворения условию для конкретного вида симметрии, может быть выбрано в качестве критерия для сравнения моделей потенциала различных небесных тел по степени (уровню) соответствия их внутреннего строения этому виду симметрии.

Подробнее рассмотрим используемые нами виды симметрий и условия, накладываемые ими на совокупность гармонических коэффициентов разложения (1) гравитационного потенциала планеты, что позволит сформулировать алгоритмы вычисления значений соответствующих критериев и оценить свойства симметрии ряда тел Солнечной системы.

1. Центральная симметрия. В случае центральной симметрии распределение плотности вещества δ имеет радиальный характер, то есть определяется только расстоянием ρ от центра масс планеты и не зависит от угловых координат. Это означает, что гравитационный потенциал также зависит только от ρ:

$$\delta(\rho,\varphi,\lambda)=\delta(\rho), \qquad V(\rho,\varphi,\lambda)=V(\rho).$$

Поэтому в ряду (1) сохраняется лишь первое слагаемое, не содержащее угловых координат, а все остальные члены ряда должны быть равны нулю. Тогда критерий (мера) $\langle C\rangle$ соответствия модели гравитационного поля этому виду симметрии имеет вид

$$\langle C\rangle=\sqrt{\sum_{n=1}^{n_{\max}}\sum_{m=0}^{n}(C_{nm}^2+S_{nm}^2)}, \qquad (2)$$

при этом чем больше значение меры $\langle C\rangle$ для конкретного небесного тела, тем в меньшей степени это тело обладает указанным видом симметрии.

2. Осевая симметрия. Пусть тело вращения переходит само в себя после поворота на любой угол вокруг оси суточного вращения Z, то есть функция плотности и, следовательно, функция потенциала не зависят от долготы λ:

$$\delta(\rho,\varphi,\lambda)=\delta(\rho,\varphi), \qquad V(\rho,\varphi,\lambda)=V(\rho,\varphi).$$

В этом случае все незональные гармонические коэффициенты должны быть равны нулю. Мера соответствия $\langle Z\rangle$ реальной модели поля конкретного небесного тела этому условию будет иметь вид

$$\langle Z\rangle=\sqrt{\sum_{n=1}^{n_{\max}}\sum_{m=1}^{n}(C_{nm}^2+S_{nm}^2)}, \qquad (3)$$

Отметим, что чем больше значение меры $\langle Z\rangle$, тем в меньшей степени тело вращения соответствует данному виду симметрии.

3. Экваториальная симметрия «север – юг». Если, кроме того, северное и южное полушария тела вращения симметричны относительно экватора, то функция плотности будет удовлетворять условию

$$\delta(\rho,\varphi,\lambda)=\delta(\rho,\pi-\varphi,\lambda).$$

Аналогичной симметрией будет обладать и функция потенциала:

$$V(\rho,\varphi,\lambda)=V(\rho,\pi-\varphi,\lambda).$$

Поскольку присоединенные функции Лежандра $P_{nm}(\sin\varphi)$ чётны при чётном $n-m$ и нечётны при нечётном $n-m$, мерой зеркальной экваториальной симметрии может служить значение критерия, включающего только гармоники (коэффициенты C_{nm}, S_{nm}) с нечётными значениями $n-m$:

$$\langle NS\rangle=\sqrt{\left[\sum_{n=1}^{n_{\max}}\sum_{m=1}^{n}(C_{nm}^2+S_{nm}^2)\right]^*}, \tag{4}$$

В формуле (4) звёздочка обозначает суммирование по нечётным значениям разности индексов $n-m$. Очевидно, чем больше значение меры $\langle NS\rangle$, тем в меньшей степени рассматриваемое тело обладает указанным видом симметрии.

4. Зеркальная симметрия «запад – восток» (меридиональная). Зеркальная симметрия западного и восточного полушарий относительно нулевого меридиана описывается условиями:

$$\delta(\rho,\varphi,\lambda)=\delta(\rho,\varphi,-\lambda),\qquad V(\rho,\varphi,\lambda)=V(\rho,\varphi,-\lambda).$$

Наличие указанной симметрии означает, что все коэффициенты $S_{nm}=0$, поэтому мера $\langle WE\rangle$ меридиональной симметрии может быть выбрана в виде

$$\langle WE\rangle=\sqrt{\sum_{n=1}^{n_{\max}}\sum_{m=1}^{n}S_{nm}^2}, \tag{5}$$

при этом чем больше значение меры $\langle WE\rangle$, тем в меньшей степени тело вращения соответствует рассматриваемому виду симметрии.

5. Зеркальная симметрия «север – юг» (экваториальная) для тела вращения. В данном случае функция плотности и соответствующая ей функция потенциала будут удовлетворять условиям:

$$\delta(\rho,\varphi,\lambda)=\delta(\rho,\pi-\varphi),\qquad V(\rho,\varphi,\lambda)=V(\rho,\pi-\varphi).$$

Потенциал тела вращения содержит лишь зональные гармоники, для которых $m=0$. В случае экваториальной симметрии тела оказываются не равными нулю только зональные коэффициенты чётной степени n. По этой причине степень экваториальной симметрии модели поля конкретного небесного тела может быть охарактеризована значением меры $\langle ZNS\rangle$:

$$\langle ZNS\rangle=\sqrt{\sum_{n=1}^{n_{\max}}{}^{*}C_{n0}^2+\sum_{n=1}^{n_{\max}}\sum_{m=1}^{n}(C_{nm}^2+S_{nm}^2)}, \tag{6}$$

В формуле (6) звёздочка означает суммирование по нечётным значениям индекса n. Очевидно, чем больше значение меры $\langle ZNS\rangle$, тем в меньшей степени рассматриваемое тело обладает указанным видом симметрии.

6. Симметрия поворота вокруг оси *X* на угол π. При такой симметрии меняются местами северное и южное полушария, а также западное и восточное полушария. Преобразование описывается соответствием объёмной плотности и гравитационного потенциала следующим условиям:

$$\delta(\rho,\varphi,\lambda)=\delta(\rho,\pi-\varphi,-\lambda), \qquad V(\rho,\varphi,\lambda)=V(\rho,\pi-\varphi,-\lambda).$$

Уровень такой симметрии модели поля конкретного небесного тела характеризуется значением меры $\langle RX\rangle$:

$$\langle RX\rangle=\sqrt{\left[\sum_{n=1}^{n_{\max}}\sum_{m=0}^{n}C_{nm}^2\right]^{*}+\left[\sum_{n=1}^{n_{\max}}\sum_{m=1}^{n}S_{nm}^2\right]^{**}}, \qquad (7)$$

при этом чем больше значение меры $\langle RX\rangle$, тем в меньшей степени рассматриваемое тело обладает указанным видом симметрии. В формуле (7) звёздочка обозначает суммирование по нечётным значениям разности индексов $n-m$, две звёздочки – суммирование по чётным значениям разности $n-m$.

7. Симметрия поворота вокруг оси *Y* на угол π. При этом меняются местами северное и южное полушария, а также «видимое» и «обратное» полушария. Преобразование представляется соответствующими условиями для объёмной плотности и гравитационного потенциала:

$$\delta(\rho,\varphi,\lambda)=\delta(\rho,\pi-\varphi,\pi-\lambda), \qquad V(\rho,\varphi,\lambda)=V(\rho,\pi-\varphi,\pi-\lambda).$$

Уровень соответствия симметрии модели гравитационного поля конкретного небесного тела определяется значением меры $\langle RY\rangle$:

$$\langle RY\rangle=\sqrt{\sum_{n=1}^{n_{\max}}{}^{*}\sum_{m=0}^{n}C_{nm}^2+\sum_{n=1}^{n_{\max}}{}^{**}\sum_{m=1}^{n}S_{nm}^2}, \qquad (8)$$

чем больше значение меры $\langle RY\rangle$, тем в меньшей степени тело вращения обладает данным видом симметрии. В приведённой выше формуле звёздочка обозначает суммирование по нечётным значениям индекса n, две звёздочки – суммирование по чётным значениям индекса n.

8. Симметрия поворота вокруг оси *Z* на угол π. В данном случае меняются местами западное и восточное полушария, а также «видимое» и «обратное» полушария. При таком преобразовании функция объёмной плотности и функция гравитационного потенциала будут удовлетворять следующим условиям:

$$\delta(\rho,\varphi,\lambda)=\delta(\rho,\varphi,\pi+\lambda), \qquad V(\rho,\varphi,\lambda)=V(\rho,\varphi,\pi+\lambda).$$

Уровень выраженности такой симметрии модели поля конкретного небесного тела характеризуется значением меры $\langle RZ\rangle$

$$\langle RZ\rangle=\sqrt{\sum_{n=1}^{n_{\max}}\sum_{m=0}^{n}{}^{*}(C_{nm}^2+S_{nm}^2)}, \qquad (9)$$

видно, чем больше значение меры $\langle RZ \rangle$, тем в меньшей степени рассматриваемое тело обладает указанным видом симметрии. В формуле (9) звёздочка обозначает суммирование только по нечётным значениям индекса m.

В табл. 1–5 представлены значения критериев (2)–(9), вычисленные по совокупности гармонических коэффициентов разложения (1) глобальных моделей гравитационных потенциалов Земли, Луны, Марса и Венеры, Значения гармонических коэффициентов взяты с сайта ICGEM [3]. Обозначения моделей указаны в первых столбцах табл. 1–5.

Использованные нами модели гравитационного поля Земли были разбиты на две группы: спутниковые модели, параметры которых оценивались только по спутниковым данным, и комбинированные модели, при построении которых помимо спутниковых данных привлекались также и данные наземных гравиметрических измерений и спутниковой альтиметрии.

Табл. 1

Значения критериев (2)–(9), вычисленные по спутниковым моделям гравитационного потенциала Земли

Модель	$\langle C \rangle$	$\langle Z \rangle$	$\langle NS \rangle$	$\langle WE \rangle$
GOCO03S	1.08263E-03	2.99383E-06	7.98372E-07	1.10658E-06
ITG-Goce02	1.08264E-03	2.99388E-06	7.98427E-07	1.10664E-06
GGM05S	1.08264E-03	2.99384E-06	7.98395E-07	1.10661E-06
GO CONS GCF 2 TIM R5	1.08264E-03	2.99388E-06	7.98439E-07	1.10666E-06
Модель	$\langle ZNS \rangle$	$\langle RX \rangle$	$\langle RY \rangle$	$\langle RZ \rangle$
GOCO03S	3.96941E-06	2.85234E-06	3.58182E-06	2.34113E-06
ITG-Goce02	3.96984E-06	2.85291E-06	3.58225E-06	2.34111E-06
GGM05S	3.97553E-06	2.86085E-06	3.58858E-06	2.34113E-06
GO CONS GCF 2 TIM R5	3.96930E-06	2.85215E-06	3.58165E-06	2.34115E-06

Табл. 2

Значения критериев (2)–(9), вычисленные по комбинированным моделям гравитационного потенциала Земли

Модель	$\langle C \rangle$	$\langle Z \rangle$	$\langle NS \rangle$	$\langle WE \rangle$
GGM03C	1.08264E-03	2.99383E-06	7.98369E-07	1.10659E-06
EIGEN-6C3stat	1.08264E-03	2.99385E-06	7.98387E-07	1.10660E-06
EIGEN-51C	1.08263E-03	2.99384E-06	7.98375E-07	1.10660E-06
EGM2008	1.08263E-03	2.99384E-06	7.98377E-07	1.10658E-06
Модель	$\langle ZNS \rangle$	$\langle RX \rangle$	$\langle RY \rangle$	$\langle RZ \rangle$
GGM03C	3.96945E-06	2.85239E-06	3.58186E-06	2.34114E-06
EIGEN-6C3stat	3.96950E-06	2.85244E-06	3.58191E-06	2.34115E-06
EIGEN-51C	3.96936E-06	2.85225E-06	3.58175E-06	2.34114E-06
EGM2008	3.96936E-06	2.85225E-06	3.58175E-06	2.34114E-06

Табл. 3

Значения критериев (2)–(9), вычисленные по моделям гравитационного потенциала Луны

Модель	$\langle C\rangle$	$\langle Z\rangle$	$\langle NS\rangle$	$\langle WE\rangle$
GLGM 1	2.10363E-04	3.79552E-05	8.34803E-06	7.70307E-06
JGL 165 P1	2.10570E-04	3.83305E-05	8.41654E-06	7.91701E-06
SGM 100g	2.10804E-04	3.83652E-05	8.44783E-06	7.92688E-06
GL0660B	2.10617E-04	3.83716E-05	8.43596E-06	7.91822E-06
Модель	$\langle ZNS\rangle$	$\langle RX\rangle$	$\langle RY\rangle$	$\langle RZ\rangle$
GLGM 1	4.79349E-05	3.09978E-05	4.15027E-05	3.02730E-05
JGL 165 P1	4.96337E-05	3.32113E-05	4.33083E-05	3.06130E-05
SGM 100g	4.93153E-05	3.26984E-05	4.29316E-05	3.06476E-05
GL0660B	4.93641E-05	3.27614E-05	4.29836E-05	3.06471E-05

Табл. 4

Значения критериев (2)–(9), вычисленные по моделям гравитационного потенциала Венеры

Модель	$\langle C\rangle$	$\langle Z\rangle$	$\langle NS\rangle$	$\langle WE\rangle$
SHGJ120PA01	6.60329E-06	2.84927E-06	8.50191E-07	9.90907E-07
SHGJ180UA01	6.60383E-06	2.84838E-06	8.50153E-07	9.90679E-07
Модель	$\langle ZNS\rangle$	$\langle RX\rangle$	$\langle RY\rangle$	$\langle RZ\rangle$
SHGJ120PA01	3.87719E-06	2.78543E-06	3.71494E-06	2.77378E-06
SHGJ180UA01	3.87864E-06	2.78823E-06	3.71675E-06	2.77313E-06

Табл. 5

Значения критериев (2)–(9), вычисленные по моделям гравитационного потенциала Марса

Модель	$\langle C\rangle$	$\langle Z\rangle$	$\langle NS\rangle$	$\langle WE\rangle$
GGM50A01	1.96033E-03	6.97976E-05	8.48891E-06	4.23274E-05
GGM2BC80	1.95705E-03	6.96498E-05	8.49432E-06	4.24935E-05
GGM1025A	1.95705E-03	6.96495E-05	8.49422E-06	4.21686E-05
JGM85F01	1.96030E-03	6.97758E-05	8.52082E-06	4.25794E-05
Модель	$\langle ZNS\rangle$	$\langle RX\rangle$	$\langle RY\rangle$	$\langle RZ\rangle$
GGM50A01	7.71180E-05	5.38032E-05	4.65735E-05	2.89496E-05
GGM2BC80	7.69537E-05	5.38755E-05	4.67810E-05	2.88231E-05
GGM1025A	7.71014E-05	5.38345E-05	4.67067E-05	2.88228E-05
JGM85F01	7.71218E-05	5.40218E-05	4.69114E-05	2.88963E-05

Представленные в таблицах значения критериев свидетельствуют о том, что для каждого конкретного небесного тела выбор применяемой для вычислений модели его гравитационного потенциала не имеет принципиального значения. Иными словами, значения критериев слабо зависят от состава исходных наблюдательных данных, использованных для построения моделей небесных тел. Указанное обстоятельство, по-видимому, обусловлено незначимостью влияния на величину критериев высокочастотной составляющей выбранной модели поля, что вполне объяснимо с точки зрения глобального характера рассматриваемых нами видов симметрий.

Практическим следствием этого оказывается правомерность ограничения максимального индекса суммирования $n_{\max}$ сравнительно небольшими значениями, не превышающими, как показали тестовые расчёты, нескольких десятков единиц.

Для всех планет, кроме Венеры, величины критерия центральной симметрии <*C*> существенно больше величин критериев остальных симметрий. Учитывая обратную зависимость величины критерия и степени выраженности соответствующей симметрии, можно говорить, что у рассмотренных нами планетных тел Солнечной системы наиболее выражена зеркальная экваториальная <*NS*> симметрия. Пожалуй, лишь у Луны более выражена зеркальная меридиональная <*WE*> симметрия.

По результатам вычислений можно выделить две группы тел, обладающих сходными свойствами планетарных осевой, зеркальных и вращательных симметрий: более симметричные Венера и Земля и менее симметричные Луна и Марс.

В заключение подчеркнём, что введенные в настоящей статье критерии количественной оценки степени выраженности различных видов симметрии ориентированы на сравнение особенностей внутреннего строения различных небесных тел. При этом значения критериев заметно отличаются и для различных видов симметрии, и для различных планет. Это означает, что конкретное значение каждого из критериев, соответствующее конкретному небесному телу, отражает свойства и особенности внутреннего строения именно этого тела, поэтому может быть использовано в качестве одного из инструментов сравнительной планетологии.

Благодарности. Авторы выражают благодарность студенту-дипломнику Н.В. Тарову за помощь в выполнении контрольных вычислений.

Литература

1. *Кащеев Р.А.* Сопоставление моделей гравитационного поля Земли, построенных по данным межспутникового слежения // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2008. – Вып. 2. – С. 101–109.
2. *Кащеев Р.А., Новлянская И.О.* Сравнение и оценка точности современных моделей гравитационных потенциалов Луны и Марса // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2014. – Вып. 6. – С. 3–9.
3. International Centre for Global Earth Models (ICGEM) – URL: http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/, свободный.
4. *Холшевников К.В., Питьев Н.П., Титов В.Б.* Притяжение небесных тел. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005. – 108 с.

Поступила в редакцию
22.06.16

Кащеев Рафаэль Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры астрономии и космической геодезии

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *rafael.kascheev@mail.ru*

Новлянская Инна Олеговна, аспирант кафедры астрономии и космической геодезии

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *sailordragon@rambler.ru*

ISSN 1815-6169 (Print)
ISSN 2500-218X (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA ESTESTVENNYE NAUKI

(Proceedings of Kazan University. Natural Sciences Series)

2016, vol. 158, no. 3, pp. 478–487

Determining Symmetry Properties of Gravitational Fields of Terrestrial Group Planets

R.A. Kascheev[*], *I.O. Novlyanskaya*[**]

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: [*]*rafael.kascheev@mail.ru,* [**]*sailordragon@rambler.ru*

Received June 22, 2016

Abstract

Numerous models of gravity fields of the Solar system bodies have been constructed recently owing to successful space missions. These models are sets of harmonic coefficients of gravity potential expansion in series of spherical functions, which is Laplace series. The sets of coefficients are different in quantity of numerical parameters, sources and composition of the initial observational data, methods to obtain and process them, and, consequently, in a variety of properties and accuracy characteristics. For this reason, the task of comparison of different models of celestial bodies considered in the paper is of interest and relevant.

The main purpose of this study is comparison of the models of gravitational potential of the Earth, Moon, Mars, and Venus with the quantitative criteria of different types of symmetries developed by us. It is assumed that some particular symmetry of the density distribution function of the planetary body causes similar symmetry of its gravitational potential. The symmetry of gravitational potential, in its turn, imposes additional conditions (restrictions), which must be satisfied by the harmonic coefficients.

The paper deals with seven main types of symmetries: central, axial, two symmetries specular relative to the equatorial planes and prime meridian, as well as three rotational symmetries (at π angle) around the coordinate system axes. According to the results of calculations carried out for the Earth, Moon, Mars, and Venus, the values of the criteria vary considerably for different types of symmetries and for different planets. It means that the specific value of each criterion corresponding to a particular celestial body is indicative of the properties and internal structure characteristics of the latter and, therefore, it can be used as a tool for comparative planetology. On the basis of the performed calculations, it is possible to distinguish two groups of celestial bodies having similar properties of axial, specular, and rotational planetary symmetries: the Venus and Earth are more symmetrical, while the Moon and Mars are less symmetrical.

Keywords: gravitational potential, symmetry, Earth, Moon, Mars, Venus

Acknowledgments. We are grateful to N.V. Tarov, diploma student, for his help in checking calculations.

References

1. Kashcheev R.A. A comparison of the Earth’s gravity field models based on data of satellite-to-satellite tracking. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Geod. Aerofotos’emka*, 2008, no. 2, pp. 101–109. (In Russian)

2. Kashcheev R.A., Novlyanskaya I.O. Comparing the modern models of Mars and Moon gravity potentials and evaluating their accuracy. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Geod. Aerofotos'emka*, 2014, no. 6, pp. 3–9. (In Russian)
3. International Centre for Global Earth Models (ICGEM). Available at: http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/.
4. Kholshevnikov K.V., Pit'ev N.P., Titov V.B. Gravitation of Celestial Bodies. St. Petersburg, Izd. S.-Peterb. Gos. Univ., 2005. 108 p. (In Russian)

***Для цитирования*:** *Кащеев Р.А., Новлянская И.О.* Определение свойств симметрии структуры гравитационных полей планет земной группы // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Естеств. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 3. – С. 478–487.

***For citation*:** Kascheev R.A., Novlyanskaya I.O. Determining symmetry properties of gravitational fields of terrestrial group planets. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Estestvennye Nauki*, 2016, vol. 158, no. 3, pp. 478–487. (In Russian)