ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 6 (457)

УДК 517.551

А.В. ПУТИЛИНА

АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ ОБЪЕМА МНОЖЕСТВА МЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛИНОМА В $\mathbb{R}^n$

Введение

Исследуется функция $V = V(\rho)$, выражающая объем множества

$$\Phi_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \rho\},$$

в котором значения заданного полинома f меньше ρ. Основной результат гласит, что для эллиптического полинома f функция $V(\rho)$ разлагается в ряд Лорана–Пюизо, сходящийся для достаточно больших ρ, а коэффициент при главном члене ряда, определяющий асимптотику функции объема на бесконечности, выражается интегралом по пространству $\mathbb{R}^n$ от рациональной функции. Показано, что в общем случае (при отсутствии свойства эллиптичности) для вычисления функции объема, кроме процедуры интегрирования, требуется дополнительная операция предельного перехода. Приведены примеры вычисления объемов фигур Φ_ρ.

1. Общие формулы

Речь идет о формулах для вычисления объемов фигур вида

$$\Phi_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \rho\}$$

в пространстве $\mathbb{R}^n$, где $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ — многочлен от n переменных с вещественными коэффициентами. Будем предполагать, что степень f четная и $f(x) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^n$. В этом случае для объема Φ_ρ имеем

$$V(\Phi_\rho) = \int\limits_{f(x)<\rho} dx = \int\limits_{0<f(x)<\rho} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \tag{1}$$

По теореме Фубини интеграл (1) можно свести к повторному, в котором сначала интегрируем вдоль гиперповерхностей уровня $\{f(x) = t\}$, а затем по оставшейся переменной t. Для этого вначале воспользуемся очевидным равенством

$$\int\limits_{0<f(x)<\rho} dx_1 \wedge dx_2 \dots \wedge dx_n = \int\limits_{0<f(x)<\rho} \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \wedge f'_{x_n} dx_n}{f'_{x_n}}.$$

Кроме того, заметим, что

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \wedge f'_{x_n} dx_n = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \wedge df.$$

Теперь сделаем замену переменных $x_1 = x_1, \dots, x_{n-1} = x_{n-1}$, $f(x) = t$, в результате которой получаем $dx = \frac{dx'}{f'_{x_n}} \wedge dt$, где $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, а $dx' = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$. Форма dx'/f'_{x_n} называется *формой Гельфанда-Лере* и обозначается dx/df ([1], с. 146). Таким образом, имеем

$$V(\Phi_\rho) = \int\limits_{0<f(x)<\rho} dx_1 \wedge dx_2 \cdots \wedge dx_n = \int\limits_{0<f(x)<\rho} \frac{dx'}{f'_{x_n}} \wedge df = \int\limits_0^\rho dt \int\limits_{f(x)=t} \frac{dx}{df}. \tag{2}$$

Обозначив через $\varphi(t)$ внутренний интеграл в (2), получим следующую лемму.

Лемма 1. *Объем множества Φ_ρ выражается формулой $V(\Phi_\rho) = \int\limits_0^\rho \varphi(t)dt$, где $\varphi(t) = \int\limits_{f(x)=t} \frac{dx}{df}$.*

Заметим, что $dx/df = \operatorname{res}(dx/(f-t))$, где res — операция взятия формы-вычета Лере. В работах [2], [3] была доказана формула

$$\int\limits_{f(x)=t} \operatorname{res}\left(\frac{dx}{f-t}\right) = \frac{1}{2\pi i}(\mathcal{I}^+(t) - \mathcal{I}^-(t)),$$

где t – некритическое значение полинома f степени $2q > n$, а

$$\mathcal{I}^{\mp}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{f(x) - t \pm i\varepsilon}.$$

По теореме Сарда почти все значения t некритические для f, поэтому из леммы 1 следует

Лемма 2. *Объем множества Φ_ρ выражается формулой*

$$V(\Phi_\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\rho \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{f(x) - t - i\varepsilon} - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{f(x) - t + i\varepsilon} \right) dt.$$

2. Случай однородного эллиптического полинома

Будем рассматривать случай, когда f — однородный эллиптический многочлен степени $2q$ и $\rho = R^{2q}$, где R — новый параметр.

Однородность означает $f(\lambda x) = \lambda^{2q} f(x)$, а эллиптичность — $f(x) = 0$ лишь при $x = 0$. Напомним, что предполагаем $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Если f — однородный эллиптический многочлен степени $2q > n$, то*

$$V(\Phi_{R^{2q}}) = kR^n, \tag{3}$$

где

$$k = \frac{2q}{n\pi} \sin \pi \left(1 - \frac{n}{2q}\right) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{f(x) + 1}. \tag{4}$$

Доказательство. Ввиду однородности полинома f аналитический элемент

$$\mathcal{I}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{f(x) + t},$$

заданный в окрестности точки $t = 1$ своим значением $\mathcal{I}(1)$, определяет многозначную функцию $\mathcal{I}(1)t^{\frac{n}{2q}-1}$ [2]. Поэтому для

$$\mathcal{I}^{\mp}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{f(x) - t \pm i\varepsilon}$$

справедливо равенство

$$\mathcal{I}^+(t) - \mathcal{I}^-(t) = t^{\frac{n}{2q}-1}(\mathcal{I}^+(1) - \mathcal{I}^-(1)) = t^{\frac{n}{2q}-1} 2i \sin\left[\pi\left(1 - \frac{n}{2q}\right)\right] \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{f(x)+1} =$$

$$= 2i \sin\left[\pi\left(1 - \frac{n}{2q}\right)\right] \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{f(x)+t}.$$

Тогда согласно (1) и лемме 1 имеем

$$\int\limits_{0<f(x)<\rho} dx = \int\limits_0^\rho dt \int\limits_{f(x)=t} \operatorname{res} \frac{dx}{f-t} = \frac{1}{\pi} \sin\left[\pi\left(1 - \frac{n}{2q}\right)\right] \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{f(x)+1} \int\limits_0^\rho t^{\frac{n}{2q}-1} dt = k \sqrt[2q]{t^n}\Big|_0^\rho = k \sqrt[2q]{\rho^n}.$$

Учитывая, что $\rho = R^{2q}$, придем к формуле (3), где коэффициент k вычисляется по формуле (4). $\square$

Таким образом, для вычисления объема (1) в случае однородного эллиптического многочлена f достаточно вычислить константу k по формуле (4), которая представляется интегралом по всему пространству $\mathbb{R}^n$.

3. Случай общего эллиптического полинома

Напомним, что полином $f(x)$ называется эллиптическим, если его старшая однородная составляющая $Q(x)$ обращается в нуль лишь при $x = 0$.

Теорема 2. *Пусть $f(x) = P(x) + Q(x)$ — эллиптический многочлен, где $Q(x)$ — неотрицательный однородный многочлен старшей степени $2q$, а $P(x)$ — многочлен, степень которого меньше $2q$. Тогда*

$$V(\Phi_{R^{2q}}) = kR^n + o(R^n),$$

где

$$k = \frac{2q}{n\pi} \sin\left[\pi\left(1 - \frac{n}{2q}\right)\right] \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{Q(x)+1}, \tag{5}$$

а величина $o(R^n)$ представляет собой ряд Лорана, сходящийся при достаточно больших R.

Замечание. Объем $V(\Phi_\rho)$, где $\rho = R^{2q}$, как функция параметра ρ разлагается при достаточно больших ρ в ряд Лорана–Пюизо по дробным степеням $\rho^{\frac{k}{2q}}$.

Доказательство. Представим $f(x)$ суммой однородных многочленов

$$f(x) = P_0 + P_1(x) + \dots + P_{2q}(x),$$

где $P_{2q}(x) = Q(x)$. Согласно (1) доказательство сводится к вычислению интеграла

$$\int\limits_{P_0 + P_1(x) + \dots + P_{2q}(x) < R^{2q}} dx.$$

Для этого воспользуемся сферической заменой координат, положив $x = x(r, \varphi) = x(r, \varphi_1, ..., \varphi_{n-1})$, или покоординатно

$$x_j = r\chi_j(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}), \quad j = 1, \dots, n, \tag{6}$$

где χ_j — многочлен от тригонометрических функций (тригонометрический многочлен), $r > 0$, а $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi, \dots, 0 \leqslant \varphi_{n-2} \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi_{n-1} \leqslant 2\pi$ ([4], с. 401).

Обозначим через $\mathcal{D} = [0,\pi] \times \cdots \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$ область изменения угловых параметров. В результате такой замены переменных f перейдет в

$$f(x(r,\varphi)) = P_0 + r\widetilde{P}_1(\varphi) + r^2\widetilde{P}_2(\varphi) + \cdots + r^{2q}\widetilde{P}_{2q}(\varphi),$$

где $\widetilde{P}_j(\varphi)$ — тригонометрические многочлены.

Заметим, что в силу эллиптичности рассматриваемого полинома $\widetilde{P}_{2q}(\varphi) \neq 0$ при любом $\varphi \in \mathcal{D}$, а т. к. $\mathcal{D}$ — компакт и $\widetilde{P}_{2q}(\varphi)$ — непрерывная функция, то $\widetilde{P}_{2q}(\varphi) \geqslant c > 0$.

Для исследования решения $r = r(R,\varphi)$ уравнения $f(x(r,\varphi)) = R^{2q}$ будем пользоваться диаграммой Ньютона, позволяющей алгебраическую функцию, определенную уравнением

$$f(z,w) = a_0(z) + a_1(z)w + \cdots + a_n(z)w^n = 0,$$

где коэффициенты

$$a_k(z) = c_{k0}z^{\beta_k} + c_{k1}z^{\beta_k+\frac{1}{q}} + \cdots \quad (c_{k0} \neq 0; \quad q \in \mathbb{N}),$$

разлагать в сходящийся ряд по степеням z: $\alpha z^{\zeta} + \alpha' z^{\zeta'} + \cdots$ ([5], с. 235). Диаграмма Ньютона приспособлена для отыскания малых значений решения вблизи малых значений аргумента. Поэтому обозначим $u = \frac{1}{r}$, $v = \frac{1}{R}$. В результате указанное уравнение запишется в виде

$$P_0 v^{2q}u^{2q} + \widetilde{P}_1(\varphi)v^{2q}u^{2q-1} + \cdots + \widetilde{P}_{2q}(\varphi)v^{2q} - u^{2q} = 0. \tag{7}$$

Согласно общей теории диаграммы Ньютона решения $u(v,\varphi)$ последнего уравнения можно представить рядами по дробным степеням v, коэффициенты которых будут функциями от φ. Однако в нашем случае все решения вблизи $v = 0$ будут аналитическими по v, среди которых нас интересуют положительные решения при $v > 0$. Для уравнения (7) диаграмма Ньютона имеет лишь одно ребро (см. рис. 1).

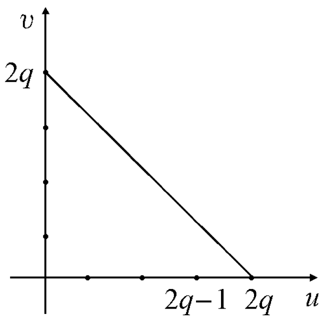

Рис. 1.

Следовательно, первый член разложения $u(v,\varphi)$ в ряд по степеням v имеет вид $k_1(\varphi)v$, где $k_1(\varphi)$ является действительным корнем уравнения

$$\widetilde{P}_{2q}(\varphi) - k^{2q}(\varphi) = 0.$$

Таким образом, $k_1(\varphi) = \big(\widetilde{P}_{2q}(\varphi)\big)^{\frac{1}{2q}}$ — арифметическое значение корня.

Для получения следующего члена разложения произведем подстановку $u(v,\varphi) = k_1(\varphi)v + u_1(v,\varphi)$ в (7), после чего получим уравнение относительно переменных u_1 и v

$$P_0 v^{2q}(k_1 v + u_1)^{2q} + \widetilde{P}_1(\varphi)v^{2q}(k_1 v + u_1)^{2q-1} + \cdots + \widetilde{P}_{2q}(\varphi)v^{2q} - (k_1 v + u_1)^{2q} = 0,$$

которое может быть записано в виде

$$F(u_1, v) + \widetilde{P}_{2q}(\varphi)v^{2q} - (k_1 v + u_1)^{2q} = 0,$$

причем F представляет собой многочлен, имеющий суммарную степень по u_1 и v, бóльшую $2q$. Поскольку $k_1^{2q} = \widetilde{P}_{2q}(\varphi)$, то получаем

$$\widetilde{P}_{2q}v^{2q} - (k_1v + u_1)^{2q} = -l_0u_1^{2q} - l_1k_1vu_1^{2q-1} - \cdots - l_{2q-1}(k_1v)^{2q-1}u_1,$$

где $l_j = C_{2q}^{2q-j}$ — биномиальные коэффициенты. Заметим, что коэффициент при $v^{2q-1}u_1$, равный $-k_1^{2q-1}l_{2q-1}$, отличен от нуля, поэтому диаграмма Ньютона второго шага будет иметь два звена, одно из которых наклонено под углом 45^0 и потому не вносит решений. Другое же звено (см. рис. 2) дает всего одно решение, причем неразветвленное, т. е. аналитическое.

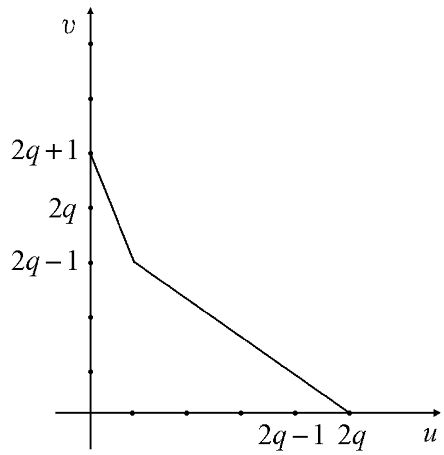

Рис. 2.

Второй член в разложении u будет $k_2(\varphi)v^2$, где $k_2(\varphi) = \widetilde{P}_{2q-1}(\varphi)/\big(2qk_1^{2q-2}(\varphi)\big)$. Таким образом,

$$u(v, \varphi) = k_1(\varphi)v + k_2(\varphi)v^2 + u_2(v, \varphi).$$

Продолжая этот процесс, получим, что u разлагается по целым степеням v. А именно, исходя из общей теории, для получения каждого следующего члена разложения будем иметь уравнение

$$a_0(v) + a_1(v)u_i + \cdots + a_{2q-1}(v)u_i^{2q-1} + a_{2q}(v)u_i^{2q} = 0,$$

в котором

$$\begin{aligned} a_0(v) &= c_{00}v^p + c_{01}v^{p_1} + \ldots \quad \text{при} \ \ 2q < p < p_1 < \cdots, \\ a_k(v) &= c_{k0}v^t + c_{k1}v^{t_1} + \ldots \quad \text{при} \ \ 2q - k = t < t_1 < \cdots \end{aligned}$$

Отсюда, возвращаясь к переменным r, R, получаем

$$\frac{1}{r} = k_1(\varphi)\frac{1}{R} + k_2(\varphi)\frac{1}{R^2} + \cdots$$

Теперь уже легко видеть, что $r = r(R, \varphi)$ допускает разложение вида

$$r(R, \varphi) = b_1(\varphi)R + b_0(\varphi) + \frac{b_{-1}(\varphi)}{R} + \frac{b_{-2}(\varphi)}{R^2} + \frac{b_{-3}(\varphi)}{R^3} + \cdots,$$

сходящееся при достаточно больших R, причем $b_1(\varphi) = 1/\left(\widetilde{P}_{2q}(\varphi)\right)^{\frac{1}{2q}}$.

Возвращаясь к (1), будем иметь

$$V(\Phi_{R^{2q}}) = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{J}(\varphi)d\varphi \int\limits_0^{r(R,\varphi)} r^{n-1}dr,$$

причем $\mathcal{J}(\varphi) = \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2}$, а $\mathcal{J}(\varphi)r^{n-1}$ — якобиан полярного преобразования (6). Внутренний интеграл по r равен

$$\frac{1}{n}r^n\Big|_0^{r(R,\varphi)} = \frac{1}{n}\left(b_1(\varphi)R + b_0(\varphi) + \frac{b_{-1}(\varphi)}{R} + \cdots\right)^n.$$

Поэтому

$$V(\Phi_{R^{2q}}) = m_n(\varphi)R^n + m_{n-1}(\varphi)R^{n-1} + m_{n-2}(\varphi)R^{n-2} + \cdots, \tag{8}$$

где m_{n-j} — интеграл по $\varphi \in \mathcal{D}$ выражений, полиномиально зависящих от $b_1(\varphi), b_0(\varphi), b_{-1}(\varphi), \ldots, b_{-j+1}(\varphi)$. В частности,

$$m_n(\varphi) = \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\mathcal{J}(\varphi)b_1^n(\varphi)d\varphi.$$

Теперь осталось заметить, что интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dx}{Q(x)+1}$$

с помощью сферической замены координат представляется в виде

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\mathcal{J}(\varphi)\int_0^{\infty}\frac{r^{n-1}dr\,d\varphi}{r^{2q}Q(x(r,\varphi))+1},$$

и поскольку $b_1(\varphi) = 1/\big(\widetilde{P}_{2q}(\varphi)\big)^{\frac{1}{2q}}$, легко видеть, что коэффициент при R^n в разложении (8) равен $k = m_0(\varphi)$ в форме (5). $\square$

4. Примеры вычислений объемов фигур Φ_ρ в $\mathbb{R}^n$

Пример 1. Рассмотрим фигуру Φ в $\mathbb{R}^n$, ограниченную поверхностью

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = R^{2q}\},$$

где $f(x) = x_1^{2q} + x_2^{2q} + \cdots + x_n^{2q}$. Согласно формуле (4)

$$k = \frac{2q}{n\pi}\sin\pi\left(1 - \frac{n}{2q}\right)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dx}{x_1^{2q} + x_2^{2q}\cdots + x_n^{2q} + 1}.$$

Последний интеграл равен $\frac{1}{q^n}B\big(\frac{n}{2q}, 1 - \frac{n}{2q}\big)\frac{\left[\Gamma(\frac{1}{2q})\right]^n}{\Gamma(\frac{n}{2q})}$ ([6], с. 9), где Γ и B — гамма- и бета-функции Эйлера. Тогда

$$k = \frac{2}{nq^{n-1}}\frac{\left[\Gamma(\frac{1}{2q})\right]^n}{\Gamma(\frac{n}{2q})}.$$

Следовательно, по формуле (3)

$$V(f(x) < R^{2q}) = \frac{2}{nq^{n-1}}\frac{\left[\Gamma(\frac{1}{2q})\right]^n}{\Gamma(\frac{n}{2q})}R^n.$$

Пример 2. Найдем площадь фигуры в $\mathbb{R}^2$, ограниченной кривой, которая задается уравнением $x^4 + x^2y^2 + y^4 = R^4$. Для этого случая коэффициент k в (4) (при $n = q = 2$) выражается интегралом $k = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{dx\,dy}{x^4+x^2y^2+y^4+1} = F(\pi, \frac{1}{2})$, где $F(\psi, k) = \int_0^{\psi}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$ — эллиптический интеграл первого рода (см. равенство 3.138.7 из [7]). Тогда по формуле (3)

$$V(f(x) < R^4) = F(\pi, \tfrac{1}{2})R^4.$$

Пример 3. Рассмотрим фигуры Φ' и Φ'' на плоскости, ограниченные кривыми $x^4+y^4+x^2 = R^4$ и $x^4+y^4-x^2 = R^4$ соответственно.

Согласно теореме 3 главный член асимптотики для $V(\Phi')$, $V(\Phi'')$ будет $\dfrac{\left(\Gamma(\frac{1}{4})\right)^2}{2\sqrt{\pi}}R^2$, и тогда

$$V(\Phi') = \frac{\left(\Gamma(\frac{1}{4})\right)^2}{2\sqrt{\pi}}R^2 + o\,(R^2), \quad V(\Phi'') = \frac{\left(\Gamma(\frac{1}{4})\right)^2}{2\sqrt{\pi}}R^2 + o\,(R^2).$$

Этот результат можно получить, непосредственно вычислив интегралы

$$I_1 = \iint\limits_{x^4+y^4+x^2<R^4} dx\,dy, \quad I_2 = \iint\limits_{x^4+y^4-x^2<R^4} dx\,dy,$$

равные соответственно $V(\Phi')$, $V(\Phi'')$. Используем при этом обобщенную полярную замену координат $x = r\sqrt{\cos\varphi}$, $y = r\sqrt{\sin\varphi}$, где $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тогда интеграл I_1 можно представить в виде повторного интеграла $2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}} \int\limits_0^A r\,dr$, где $A = \sqrt{\frac{\sqrt{\cos^2\varphi+4R^4}-\cos\varphi}{2}}$. Таким образом, будем иметь

$$I_1 = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\cos^2\varphi+4R^4}{\cos\varphi\sin\varphi}}d\varphi.$$

Первый интеграл в этой сумме равен $-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Второе слагаемое можно представить следующим образом, полагая $\cos\varphi = t$,

$$\frac{R^2}{\sqrt{2}}\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{-3/4}\sqrt{1+\frac{t+1}{8R^4}}dt = \sqrt{2}R^2\int\limits_0^1(1-t^2)^{-3/4}dt +$$
$$+\frac{1}{8R^2\,2\sqrt{2}}\int\limits_{-1}^{1}(t+1)(1-t^2)^{-3/4}dt - \frac{1}{8^2R^6\,8\sqrt{2}}\int\limits_{-1}^{1}(t+1)^2(1-t^2)^{-3/4}dt + \cdots +$$
$$+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{\sqrt{2}R^{4n-2}(2n)!!8^n}\int\limits_{-1}^{1}(t+1)^n(1-t^2)^{-3/4}dt + \cdots$$

для всех $t \in (-8R^4-1, 8R^4-1)$. Заметим, что коэффициент при R^2 в точности равен $\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{dx\,dy}{x^4+y^4+1}$. Возвращаясь к первоначальному интегралу, получим

$$V(\Phi') = R^2\frac{\left(\Gamma(\frac{1}{4})\right)^2}{2\sqrt{\pi}} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{8R^2\,2\sqrt{2}}\int\limits_{-1}^{1}(t+1)(1-t^2)^{-3/4}dt +$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{R^{4n-2}(2n)!!8^n\sqrt{2}}\int\limits_{-1}^{1}(t+1)^n(1-t^2)^{-3/4}dt.$$

Проводя аналогичные вычисления для интеграла I_2, будем иметь

$$V(\Phi'') = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{\cos^2\varphi+4R^4}{\cos\varphi\sin\varphi}}d\varphi = V(\Phi') + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Итак, площади фигур Φ', Φ'' отличны от площади фигуры Φ_1, рассмотренной в примере 1 при $q = 2$ и $n = 2$, на бесконечно малую величину относительно R при достаточно больших R, а сами объемы $V(\Phi')$ и $V(\Phi'')$ отличаются на постоянную.

В заключение автор выражает благодарность рецензенту за рекомендации по устранению некоторых неточностей.

Литература

1. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. *Особенности дифференцируемых отображений.* (*Монодромия и асимптотики интегралов.*) – М.: Наука, 1989. – 335 с.
2. Цих А.К. *Интегралы рациональных функций по пространству* $\mathbb{R}^n$ // ДАН СССР. – 1989. – Т. 307. – № 6. – С. 1325-1329.
3. Ермолаева Т.О., Цих А.К. *Интегрирование рациональных функций по* $\mathbb{R}^n$ *с помощью торических компактификаций и многомерных вычетов* // Матем. сб. – 1996. – Т. 187. – № 9. – С. 45–64.
4. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* – 3-е изд. – Т. 3. – М.: Физматгиз, 1960. – 656 с.
5. Чеботарев Н.Г. *Теория алгебраических функций.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 369 с.
6. Алякринский А.А., Цих А.К. *Интегрирование некоторых рациональных функций по* $\mathbb{R}^n$ // Комплексн. анализ и дифференц. уравнения. – Красноярск, 1996. – С. 3–15.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* – 4-е изд. – М.: Наука, 1962. – 1100 с.

Красноярский государственный университет

Поступила 05.11.1998