ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 7 (434)

УДК 517.928

А.А. ВОРОНИН

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ

Рассматриваются периодическая краевая и начальная задачи для сингулярно-возмущенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. С использованием подходов [1]–[4] доказано существование решений этих задач, близких аналогичным решениям соответствующей вырожденной системы.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = U(t,u,v), \quad \dot{v} = hV_0(t,u,v) + V_1(t,u,v). \tag{1}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по $t \in R^1$; $u \in R^n$, $v \in R^m$; U, V_0, V_1 — вектор-функции соответствующей размерности; h — положительный большой параметр.

Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$\dot{u} = U(t,u,v), \quad V_0(t,u,v) = 0, \tag{2}$$

отвечающую системе (1) при $h = \infty$. Предположим, что при всех t, u, v выполнены соотношения

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial V_0}{\partial v}\right) = l \le m, \quad \operatorname{rang}\left(\frac{\partial V_0}{\partial v}; \frac{\partial V_0}{\partial u}\right) = m. \tag{3}$$

Для определенности предположим, что невырожденными при всех u и v являются матрицы $\left(\frac{\partial V_{i0}}{\partial v_j}\right)$ $(i,j = m-l+1,\dots,m)$ и $\left(\frac{\partial V_i^0}{\partial u_j}\right)$ $(i = 1,\dots,m-l;\ j = n-m+l+1,\dots,n)$.

Введем векторы $x = (x_1^T,\dots,x_4^T)^T$, $x_1 = (u_1,\dots,u_{n-m+l})^T$, $x_2 = (u_{n-m+l+1},\dots,u_n)^T$, $x_3 = (v_1,\dots,v_{m-l})^T$, $x_4 = (v_{m-l+1},\dots,v_m)^T$ и соответствующие им вектор-функции $X_0 = (0,0,X_3^{0T},X_4^{0T})^T$ и $X = (X_1^T,\dots,X_4^T)^T$ и перепишем системы (1) и (2) в виде

$$\dot{x} = hX_0(t,x) + X(t,x), \tag{1'}$$

$$\dot{x}_i = X_i(t,x) \ \ (i = 1,2), \qquad X_0(t,x) = 0. \tag{2'}$$

Предположим, что для системы (1′) выполнены следующие условия.

1°. Для всех $t \in R^1$, $x_1 \in D^{(1)}$, $x_3 \in D^{(3)}$, где $D^{(1)}$ и $D^{(3)}$ — открытые области в R^{n-m+l} и в R^{m-l} соответственно, второе уравнение системы (2′) имеет изолированное решение $x_2 = x_2^0(t,x_1,x_3)$, $x_4 = x_4^0(t,x_1,x_3)$.

2°. Уравнение относительно x_3, полученное после подстановки функций x_2^0 и x_4^0 в первое уравнение (2′) при $i = 2$, при всех $t \in R^1$, $x_1 \in D^{(1)}$ имеет изолированное решение $x_3 = x_3^0(t,x_1)$.

3°. В области $\{t \in R^1,\ x_1 \in D^{(1)},\ \|x_i - x_i^0\| \le \delta\ (i = 2,3,4)\}$ функции X_0 и X равномерно непрерывны и ограничены вместе со всеми своими частными производными.

4°. Собственные значения $\lambda_j(t,x_1,x_2^0,x_3^0,x_4^0)$, $\mu_k(t,x_1,x_2^0,x_3^0,x_4^0)$ $(j = 1,\dots,l;\ k = 1,\dots,2(m-l))$ матриц

$$\left(\frac{\partial X_4^0}{\partial x_4}\right), \quad \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial X_2}{\partial x_3} + \left(\dfrac{\partial X_3^0}{\partial x_2}\right)^{-1} \dfrac{\partial X_3^0}{\partial x_1}\dfrac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix}$$

для всех значений $t \in R^1$, $x_1 \in D^{(1)}$ отличны от нуля.

Подставляя функции x_2^0, x_3^0 и x_4^0 в первое уравнение $(2')$ при $i = 1$, получим

$$\dot{x}_1 = X_1^0(t, x_1), \quad X_1^0 = X_1(t, x_1, x_2^0, x_3^0, x_4^0). \tag{4}$$

1. *Асимптотика периодических решений. Автономные системы.* Предположим, что правые части уравнений (1) не зависят от t. Условия 1°–4° дополним следующими.

5°. Уравнения $(1')$ допускают первый интеграл

$$\Phi(x, h) = h\Phi_0(x_1) + \Phi_1(x) = \mathrm{const}\,.$$

6°. Система (4) имеет двухпараметрическое семейство периодических решений $x_1 = \varphi_1^{(0)}(t + t_0, c)$ с периодом $T(c) = \frac{2\pi}{\omega(c)}$, где c и t_0 — скалярные параметры, лежащие в интервалах $c_1^0 < c < c_2^0$, $-\infty < t_0 < +\infty$; $\omega(c) \in R^1$; при $c \in [c_1, c_2] \in (c_1^0, c_2^0)$ выполнены соотношения

$$\omega(c) > 0, \quad \frac{d\omega(c)}{dc} \neq 0, \quad \varphi_1^{(0)}(t + T(c), c) = \varphi_1^{(0)}(t, c),$$
$$\frac{\partial\varphi_1^{(0)}(t + t_0, c)}{\partial c} \not\equiv 0, \quad \frac{\partial\varphi_1^{(0)}(t + t_0, c)}{\partial t} \not\equiv 0,$$
$$\frac{\partial\Phi_0(\varphi_1^{(0)}(t + t_0, c))}{\partial x_1} \equiv \vartheta_0(t + t_0, c) \not\equiv 0;$$

соответствующая система уравнений в вариациях при $c \in [c_1, c_2]$ имеет единственное (с точностью до постоянного множителя) нетривиальное $T(c)$-периодическое решение $\xi = \dot{\varphi}_1^{(0)}(t + t_0, c)$.

Без ограничения общности положим $t_0 = 0$. Обозначим $\varphi_i^{(0)} = x_i^0(\varphi_1^{(0)})$ $(i = 2, 3, 4)$, $\varphi^{(k)} = (\varphi_1^{(k)T}, \dots, \varphi_4^{(k)T})^T$ $(k = 0, 1, \dots)$. Будем искать $T(c)$-периодические решения системы $(1')$ $x(t, c, h)$, определенные для значений c, h из некоторого неограниченного множества $I(c, h) \subset [c_1, c_2] \times (0, +\infty)$ и переходящие при $h \to +\infty$ в функцию $\varphi^{(0)}(t, c)$.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = X_1^*(x_1, h^{-1}), \quad x_i = X_i^*(x_1, h^{-1}), \\ &X_j^* = \sum_{k=0}^{\infty} h^{-k} X_j^{(k)}(x_1) \quad (i = 2, 3, 4;\ j = 1, \dots, 4), \end{aligned} \tag{5}$$

правые части которой — формальные ряды. Для определения $X_j^{(k)}$ подставим эти ряды в систему $(1')$ и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h в левой и правой ее частях, получим цепочку рекуррентных соотношений, имеющую при выполнении условий 1°–4° единственное решение относительно этих функций.

Выражение

$$\Psi(x_1, h) = h^{-1}\Phi(x_1, X_2^*, \dots, X_4^*, h) = \sum_{k=0}^{\infty} h^{-k}\Psi^{(k)}(x_1) \tag{6}$$

является формальным первым интегралом этой системы.

Формальное $T(c)$-периодическое решение системы (5) $x_1 = \varphi_1(t, c, h^{-1})$, переходящее при $h \to +\infty$ в функцию $\varphi_1^{(0)}(t, c)$, будем искать в виде ряда

$$\varphi_1(t, c, h^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} h^{-k}\varphi_{1k}(t, c). \tag{7}$$

Подставляя этот ряд в первое уравнение (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h в левой и правой его частях, получим цепочку линейных дифференциальных уравнений с T-периодическими коэффициентами

$$\dot{\varphi}_{1k} = A(t,c)\varphi_{1k} + f_k(t,c) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \varphi_{1\,0} = \varphi_1^{(0)}, \tag{8}$$
$$A(t,c) = \frac{\partial X_1^{(0)}(\varphi_{1\,0}(t,c))}{\partial x_1}.$$

Будем разыскивать решения уравнений этой цепочки, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_{1k}(0,c) = \varphi_{1k}(T(c),c), \quad \int_0^{T(c)} \dot{\varphi}_{1\,0}^T(t,c)\varphi_{1k}(t,c)dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{9}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_{1k}^*(t,c) = \int_0^{T(c)} G(t,s,c) f_k(s,c) ds,$$

где $G(t,s,c)$ — обобщенная функция Грина дифференциального оператора, заданного выражением $\dot{\varphi}_{1k} - A(t,c)\varphi_{1k}$ и краевыми условиями (9). Если

$$\int_0^{T(c)} \vartheta_0(t,c) f_k(t,c) dt = 0, \tag{10}$$

то эта функция является решением краевой задачи (8), (9).

Подставив решение (7) в выражение (6) и положив в полной производной этого выражения в силу системы (5) $\varphi_{1k} = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$, получим равенства

$$\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_1} f_k(t) + F_k(t) = 0,$$

где $F_k(t)$ — $T(c)$-периодическая функция. С учетом этих равенств легко доказывается справедливость соотношений (10).

Обозначим

$$\varphi_1^{(p)}(t,c,h^{-1}) = \sum_{k=0}^{p} h^{-k} \varphi_{1k}^*(t,c),$$
$$\varphi_i^{(p)}(t,c,h^{-1}) = \sum_{k=0}^{p} h^{-k} X_i^{(k)}(\varphi_1^{(p)}) \quad (i = 2, 3, 4).$$

Теорема 1. *Пусть для систем* $(1')$ *и* $(2')$ *выполнены условия* 1°–6° *и области* $D^{(1)}$ *и* $D^{(3)}$ *неограничены. Тогда для всякого* $c \in [c_1, c_2]$ *существуют такие положительные постоянные* C *и* H, *что при всех* $h \geq H$ *кроме, быть может, счетного множества значений* $h = h_s(c)$ $(s = 1, 2, \dots)$ *система* $(1')$ *имеет единственное* $T(c)$*-периодическое решение* $x(t,c,h)$, *удовлетворяющее условию*

$$\|x(t,c,h) - \varphi^{(p)}(t,c,h^{-1})\| \leq Ch^{-p-1}. \tag{11}$$

Доказательство. В системе $(1')$ сделаем замену переменных $x = \varphi^{(p)}(t,h^{-1}) + \omega$, $\omega = (\omega_1^T, \dots, \omega_4^T)^T$. Полученную систему запишем в виде

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_i &= \sum_{j=1}^{4} A_{ij}(t,c)\omega_j + h^{-p-1} f_{0i}(t,c,h^{-1}) + F_{0i}(t,c,\omega,h^{-1}) \quad (i = 1, 2),\\ \dot{\omega}_i &= \sum_{j=1}^{4} [hA_{ij}^0(t,c) + A_{ij}(t,c)]\omega_j + h^{-p} f_{0i}(t,c,h^{-1}) + F_{0i}(t,c,\omega,h) \quad (i = 3, 4).\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $A_{ij}=\frac{\partial X_i(\varphi^{(0)})}{\partial x_j}$, $A^0_{kj}=\frac{\partial X^0_k(\varphi^{(0)})}{\partial x_j}$ $(i,j=1,\dots,4;\ k=3,4)$. Для функций f_{0i}, F_{0i} $(i=1,\dots,4)$ при $\omega,h^{-1}\to 0$ справедливы оценки

$$\|f_{0i}\|=O(1),\quad \|F_{0j}\|=O(h^{-1}\|\omega\|+\|\omega\|^2),$$
$$\|F_{0k}\|=O(h^{-1}\|\omega\|+h\|\omega\|^2)\quad (i=1,\dots,4;\ j=1,2;\ k=3,4).$$

В силу соотношений (3) существует действительная непрерывная невырожденная $T(c)$-периодическая матрица $S(t)$ такая, что $S^{-1}A'S=\mathrm{diag}(0,A^{0'}_{44})$, где $A'=(A^0_{ij})_{i,j=3,4}$, $A^{0'}_{44}$ — невырожденная $l\times l$-матрица. Будем считать, что в (12) сделана замена переменной $(\omega_3^T,\omega_4^T)\to(\omega_3^T,\omega_4^T)S^T$, и матрицы A_{33}, A_{34} и A_{43} нулевые.

Следующее линейное преобразование с определителем, равным единице, выполняется в четыре этапа, отвечающих соответственно значениям $i=4,2,1,3$. Это преобразование можно записать в виде

$$\omega_i\to\sum_{j=1}^{4}[P^0_{ij}(t,c)+h^{-1}P_{ij}(t,c)]\omega_j+h^{-p-1}Q_i(t,c).$$

Ненулевые матрицы P^0_{ij}, P_{ij} и векторы Q_i этого преобразования вычисляются по формулам

$$\begin{gathered}
P^0_{ii}=E_i\ \ (i=1,\dots,4),\quad P^0_{12}=A^{(1)}_{13}(A^{(2)}_{23})^{-1},\\
P^0_{21}=-(A^0_{32})^{-1}A^0_{31},\quad P^0_{31}=-(A^{(2)}_{23})^{-1}A^{(2)}_{21},\\
P^0_{4j}=(A^{0'}_{44})^{-1}A_{4j}\ \ (j=1,2),\\
P_{13}=(A^{(1)}_{12}+A^{(2)}_{11}P^0_{12}-P^0_{12}A^{(2)}_{22})(A^0_{32})^{-1},\\
P_{14}=A^{(1)}_{14}(A^{0'}_{44})^{-1},\quad P_{21}=-(A^0_{32})^{-1}A^{(3)}_{31},\\
P_{23}=-(A^0_{32})^{-1}A^{(1)}_{33},\quad P_{24}=(A^{(1)}_{24}-P^0_{21}A^{(1)}_{14})(A^{0'}_{44})^{-1},\\
P_{31}=A^{(2)}_{34}(A^{0'}_{44})^{-1},\quad P_{43}=-(A^{0'}_{44})^{-1}A_{43},\\
P_{4j}=(A^{0'}_{44})^{-1}(A_{4j}+A_{44}(A^{0'}_{44})^{-1}A_{4j})\ \ (j=1,2),\\
Q_2=-(A^0_{32})^{-1}f_{03},\quad Q_4=-(A^{0'}_{44})^{-1}f_{04},
\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}
A^{(1)}_{ij}=A_{ij}+A_{i4}P^0_{4j}\ \ (i=1,2,3\ j=1,\dots,4),\\
A^{(2)}_{i1}=A^{(1)}_{i1}+A^{(1)}_{i2}P^0_{21}\ \ (i=1,3),\\
A^{(2)}_{21}=A^{(1)}_{21}+A^{(1)}_{22}P^0_{21}-\dot P^0_{21}-P^0_{21}(A^{(1)}_{11}+A^{(1)}_{12}P^0_{21})-P_{23}(A^0_{31}+A^0_{32}P^0_{21}),\\
A^{(2)}_{22}=A^{(1)}_{22}-P^0_{21}A^{(1)}_{12}-P_{23}A^0_{32},\quad A^{(2)}_{23}=A^{(1)}_{23}-P^0_{21}A^{(1)}_{13},\\
A^{(2)}_{24}=A^{(1)}_{24}-P_{24}A^{0'}_{44}-P^0_{21}A^{(1)}_{14},\quad A^{(2)}_{34}=A^{(1)}_{34}+A^0_{32}P_{24},\\
A^{(3)}_{11}=A^{(2)}_{11}-P^0_{12}A^{(2)}_{21},\quad A^{(3)}_{31}=A^{(2)}_{31}-\dot P^0_{31}-P^0_{31}A^{(3)}_{11}.
\end{gathered}$$

(В силу предположений 1°–4° матрицы $(A^{0'}_{44})^{-1}$, $(A^0_{32})^{-1}$, $(A^{(2)}_{23})^{-1}$ существуют при всех $t\in[0,T]$.)

В результате этого преобразования система (12) переходит в систему

$$\begin{aligned}
\dot\omega_1&=A^{(3)}_{11}\omega_1+h^{-p-1}f_{11}+F_{11},\\
\dot\omega_2&=A^{(3)}_{22}\omega_2+A^{(2)}_{23}\omega_3+h^{-p-1}f_{12}+F_{12},\\
\dot\omega_3&=[hA^0_{32}+A^{(3)}_{32}]\omega_2+h^{-p-1}f_{13}+F_{13},\\
\dot\omega_4&=[hA^{0'}_{44}+A_{44}]\omega_4+h^{-p-1}f_{14}+F_{14},
\end{aligned}\tag{13}$$

где $A_{i2}^{(3)} = A_{i2}^{(2)} + A_{i1}^{(2)} P_{1\,2}^0$ $(i = 1, 2, 3)$, $f_{1j} = f_{1j}(t, c, h^{-1})$, $F_{1j} = F_{1j}(t, c, \omega, h)$ $(j = 1, \dots, 4)$. В полученной системе сделаем преобразование $\omega_3 \to \omega_3 - h^{-p-1}(A_{2\,3}^{(2)})^{-1} f_{1\,2}$, после которого во втором уравнении (13) произойдет замена $h^{-p-1} f_{1\,2} \to h^{-p-2} f'_{1\,2}$, где $f'_{1\,2}(t, c, h^{-1})$ — некоторая функция, при $h \to +\infty$ удовлетворяющая оценке $\|f'_{1\,2}\| = O(1)$.

Введем новую переменную $z = (z_1^T, z_2^T, z_3^T)^T$, $z_1 = \omega_1$, $z_2 = (\sqrt{h}\,\omega_2^T, \omega_3^T)^T$, $z_3 = \omega_4$ и запишем систему (13) в виде

$$\dot{z} = A^0(t, c, h) z + h^{-p-1} f(t, c, h^{-1}) + F(t, c, z, h), \tag{14}$$

где

$$A^0 = \mathrm{diag}[A_{1\,1}^{(3)},\ \sqrt{h}\,A_{2\,2}^{0'} + A'_{2\,2},\ hA_{4\,4}^{0'} + A_{4\,4}],$$
$$A_{2\,2}^{0'} = \begin{pmatrix} 0 & A_{2\,3}^{(0)} \\ A_{2\,3}^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A'_{2\,2} = \begin{pmatrix} 0 & A_{2\,2}^{(3)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для функций f и F при $h^{-1}, z \to 0$ справедливы оценки

$$\|f\| = O(1), \quad \|F\| = O(h^{-1/2}\|z\| + h\|z\|^2).$$

Поиск $T(c)$-периодических решений системы $(1')$, переходящих при $h \to +\infty$ в функцию $\varphi^{(0)}$, сводится к поиску решений краевой задачи

$$z(0) = z(T(c)) \tag{15}$$

для уравнения (14), переходящих при $h \to +\infty$ в нуль.

Обозначим через $h = h_s(c)$ $(s = 1, 2, \dots)$ корни уравнений

$$\begin{gathered}\prod_{j=1}^{m} \Big\{ \mathrm{sh}^2\Big(\frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{Re}\,\lambda'_j dt\Big) + \sin^2\Big(\frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{Im}\,\lambda'_j dt\Big) \Big\} = 0,\\ \prod_{k=1}^{2(m-l)} \Big\{ \mathrm{sh}^2\Big(\frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{Re}\,\mu'_k dt\Big) + \sin^2\Big(\frac{1}{2}\int_0^T \mathrm{Im}\,\mu'_k dt\Big) \Big\} = 0,\end{gathered} \tag{16}$$

где λ'_j и μ'_k — собственные значения матриц $hA_{4\,4}^{0'} + A_{4\,4}$ и $\sqrt{h}\,A_{2\,2}^{0'} + A'_{2\,2}$. Они отвечают резонансам между медленными (с частотой $2\pi/T$) и быстрыми (с частотами $\sim h$ и $\sim \sqrt{h}$) составляющими искомых периодических решений.

Для решения краевой задачи (14), (15) с помощью соответствующей обобщенной функции Грина, определенной на множестве $\{(t, s, h) : 0 \le s \le t \le T,\ h \ge H,\ h \ne h_s\}$, строится интегральное уравнение, решение которого $z^*(t, c, h)$, удовлетворяющее неравенству $\|z^*\| \le Ch^{-p-1}$, в случае $p > 0$ находится методом последовательных приближений. Это решение удовлетворяет краевым условиям (15) и уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{z}_1^* &= A_{1\,1}^{(3)}(t, c) z_1^* + h^{-p-1} f_1(t, c, h^{-1}) + F_1(t, c, z^*, h) - p^* \vartheta_0^T(t, c),\\ \dot{z}_2^* &= [\sqrt{h}\,A_{2\,2}^{0'}(t, c) + A'_{2\,2}(t, c)] z_2^* + h^{-p-1} f_2(t, c, h^{-1}) + F_2(t, c, z^*, h),\\ \dot{z}_3^* &= [hA_{4\,4}^{0'}(t, c) + A_{4\,4}(t, c)] z_3^* + h^{-p-1} f_3(t, c, h^{-1}) + F_3(t, c, z^*, h),\end{aligned}$$

где

$$p^* = \frac{\displaystyle\int_0^{T(c)} \vartheta_0(t, c)[h^{-p-1} f_1(t, c, h^{-1}) + F_1(t, c, z^*, h)] dt}{\displaystyle\int_0^{T(c)} \vartheta_0(t, c) \vartheta_0^T(t, c) dt}.$$

Докажем равенство $p^* = 0$. Рассмотрим $T(c)$-периодическую функцию $\Phi^*(t,c,h) = \Phi(\varphi^{(p)} + z^*, h)$. Имеем

$$0 = \int_0^{T(c)} \frac{d\Phi^*}{dt} dt = \int_0^{T(c)} \left\{ \frac{\partial\Phi^*}{dt} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\Phi^*}{\partial z_i^*} \dot{z}_i^* \right\} dt. \tag{17}$$

Поскольку Φ^* — первый интеграл системы (14), то из (17) получим

$$p^* \int_0^{T(c)} \frac{\partial\Phi^*}{\partial z_1^*} \vartheta_0^T dt = 0. \tag{18}$$

Производную $\frac{\partial\Phi^*}{\partial z_1^*}$ можно представить в виде

$$\frac{\partial\Phi^*}{\partial z_1^*} = \vartheta_0 + \frac{\partial\Phi_1^*}{\partial z_1^*},$$

причем при достаточно большом h, $h \neq h_s$ $(s = 1, 2, \dots)$ справедлива оценка

$$\left\| \frac{\partial\Phi_1^*}{\partial z_1^*} \right\| = O(h^{-p-1}).$$

Для таких h интеграл в (18) отличен от нуля, следовательно, $p^* = 0$. Это означает, что функция $z^*(t,c,h)$ является решением краевой задачи (14), (15). Продолжив его на всю числовую прямую с помощью условий T-периодичности, получим $T(c)$-периодическое решение этой системы, которому отвечает искомое $T(c)$-периодическое решение системы $(1')$, удовлетворяющее оценке (11).

(Справедливость теоремы в случае $p = 0$ следует из проведенного доказательства при $p > 0$ и оценки $\|\varphi^{(p)} - \varphi^{(0)}\| = O(h^{-1})$.) $\square$

Замечание. В некоторых случаях вычисление величин λ_j' и μ_k' в уравнениях (16) можно упростить. Пусть, например, $A_{44}^{0'} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_m]$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ $(i, j = 1, \dots, m)$. Для упрощения матрицы $A_{44} = (a_{ij})$ в системе (14) сделаем преобразование $z_3 \to [E_m + h^{-1}Q]z_3$, где $Q = (q_{ij})$, $q_{ij} = a_{ij}(\lambda_j - \lambda_i)^{-1}$ $(i \neq j)$, $q_{ii} = 1$ $(i, j = 1, \dots, m)$. В результате матрица A_{44} будет заменена матрицей $A_{44}^{(1)} = A_{44} + QA_{44}^{0'} - A_{44}^{0'}Q = \mathrm{diag}[a_{11}, \dots, a_{mm}]$.

2. *Асимптотика периодических решений. Неавтономные системы.* В этом пункте будем предполагать, что U, V_0 и V_1 периодически зависят от t с наименьшим периодом T.

Условия 1°–4° дополним условием

5°. Система $(2')$ имеет T-периодическое решение $x_1 = \varphi_1^{(0)}(t)$ с мультипликаторами, отличными от единицы.

Зафиксируем некоторое целое неотрицательное p и рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = X_1^{*(p)}(t, x_1, h^{-1}), \quad x_i = X_i^{*(p)}(t, x_1, h^{-1}), \\ &X_j^{*(p)} = \sum_{k=0}^{p} h^{-k} X_j^{(k)}(t, x_1) \quad (i = 2,3,4;\ j = 1, \dots, 4), \end{aligned} \tag{19}$$

правые части которой определяются так же, как и в (5). Согласно теореме Пуанкаре существует такое число $H_1 > 0$, что при всех $h > H_1$ первое уравнение системы (19) имеет единственное T-периодическое решение $\varphi_1^{(p)}(t, h^{-1})$, переходящее при $h \to +\infty$ в $\varphi_1^{(0)}(t)$.

Обозначим $\varphi_i^{(p)}(t, h^{-1}) = X_i^{*(p)}(\varphi_1^{(p)}, h^{-1})$ $(i = 2,3,4)$. При сделанных предположениях для системы $(1')$ также справедлива теорема 1, доказательство которой упрощается вследствие замены обобщенной функции Грина на обычную.

3. *Асимптотика начальной задачи.* Предположим, что для уравнений $(1')$ при всех $t \in I = [0, +\infty)$ выполнены условия 1°–3°. Условие 4° заменим следующим.

4°. Собственные значения $\lambda_j(t, x_1, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$, $\mu_k(t, x_1, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ $(j = 1, \dots, l; k = 1, \dots, 2(m-l))$ для всех значений $x_1 \in D^{(1)}$, $t \in I$ имеют неположительные вещественные части, причем в случае нулевой вещественной части им отвечают простые элементарные делители, и их мнимая часть отлична от нуля.

Пусть $x_1 = \varphi_1^{(p)}(t, h^{-1})$ — некоторое решение первого уравнения системы (19), определенное при $t \in I$. Обозначим $\varphi_i^{(p)}(t, h^{-1}) = X_i^{*(p)}(t, \varphi_1^{(p)}, h^{-1})$ $(i = 2, 3, 4)$, $\alpha_0 = \frac{1}{4}$.

Теорема 2. *Пусть для системы* $(1)'$ *выполнены условия* 1°–4°, *и области* $D^{(1)}$ *и* $D^{(3)}$ *неограничены. Тогда для любых чисел* $B > 0$ *и* $\alpha \in (0, \alpha_0)$ *существуют такие положительные постоянные* C, H *и такая непрерывная, неотрицательная, монотонно возрастающая, неограниченная при* $h \to +\infty$ *функция* $\chi(h)$, *что при* $h \geq H$ *всякое решение системы* $(1)'$ $x(t, h)$ *с начальным условием, удовлетворяющим неравенству*

$$\begin{gathered} p > 0: \ \|x(0,h) - \varphi^{(p)}(0, h^{-1})\| \leq Bh^{-p-1}; \\ p = 0: \ \|x_1(0,h) - \varphi_1^{(0)}(0)\| \leq Bh^{-2}, \\ \|x_2(0,h) - X_2^{*(1)}(0, \varphi_1^{(0)}(0), h^{-1})\| \leq Bh^{-2}, \\ \|x_i(0,h) - X_i^{*(1)}(0, \varphi_1^{(0)}(0), h^{-1})\| \leq Bh^{-3/2} \quad (i = 3, 4), \end{gathered} \tag{20}$$

определено на отрезке $0 \leq t \leq \chi(h^\alpha)$ *и удовлетворяет на нем оценкам*

$$\begin{gathered} p > 0: \ \|x_i(t,h) - \varphi_i^{(p)}(t, h^{-1})\| \leq Ch^{\alpha-p-1}, \\ \|x_j(t,h) - \varphi_j^{(p)}(t, h^{-1})\| \leq Ch^{\alpha-p-1/2} \quad (i = 1, 2; \ j = 3, 4); \\ p = 0: \ \|x(t,h) - \varphi^{(0)}(t)\| \leq Ch^{\alpha-1}. \end{gathered} \tag{21}$$

Доказательство. Повторяя преобразования п. 1, приходим к уравнению (13), в котором функции $f(t, h^{-1})$ и $F(t, z, h)$ при всех $t \in I$, $\|z\| \leq \delta$, $h \geq H$ удовлетворяют оценкам

$$\|f\| \leq \Phi_0(t), \quad \|F\| \leq \Phi_0(t)[h^{-1}\|z\| + h\|z\|^2],$$

где $\Phi_0(t)$ — некоторая функция.

Начальная задача для уравнения (13) заменяется эквивалентным интегральным уравнением, фундаментальная матрица которого $W(t, s, h)$ при всех $0 \leq s < t < +\infty$, $h \geq H$ удовлетворяет вследствие условия 4° неравенству $\|W(t, s, h)\| \leq \Phi_1(t)$, где $\Phi_1(t)$ — некоторая функция.

Решение этого уравнения, удовлетворяющее неравенству (21), строится методом последовательных приближений. Опишем построение функции $\chi(t)$. Обозначим через $\Phi(t)$ определенную при $t \in I$ непрерывную, неотрицательную, монотонно возрастающую, неограниченную при $t \to +\infty$ функцию, удовлетворяющую неравенству $\Phi \geq t\Phi_0\Phi_1$. Тогда $\chi = \Phi^{-1}$. $\square$

Замечание 1. Если в системе $(1')$ функция V_0 линейна по v, то первое неравенство (20) можно использовать и при $p = 0$.

Замечание 2. При $l = m$ в системе $(1')$ отсутствуют переменные x_2 и x_3. В этом случае в теореме 2 можно положить $\alpha_0 = \min[1, p/2]$, а неравенства (21) записать в виде

$$\|x(t,h) - \varphi^{(p)}(t, h^{-1})\| \leq Ch^{\alpha-p-1}.$$

Замечание 3. Рассмотрим систему

$$\dot{u} = U(t, u, v), \quad \dot{v} = hV_0(t, u, v, \Psi(h)) + V_1(t, u, v),$$

где $\Psi(h)$ — некоторая функция, удовлетворяющая оценке $\Psi(h) = o(h^{-1}\ln h)$. Пусть для этой системы выполнены условия 1°–3°. Условие 4° запишем в виде

4°. Собственные значения $\lambda_j(t, x_1, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$, $\mu_k(t, x_1, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ $(j = 1, \ldots, l; k = 1, \ldots, 2(m-l))$ для всех значений $x_1 \in D^{(1)}$, $t \in I$ отличны от нуля, и их вещественные части ограничены функцией $\Psi(h)$, причем собственным значениям с неотрицательной вещественной частью отвечают простые элементарные делители.

Для рассматриваемой системы также справедлива теорема 2.

Оценка для матрицы $W(t, s, h)$ имеет вид

$$\|W(t, s, h)\| \leq \exp[\Phi(t) h \Psi(h)],$$

где $\Phi(t)$ — некоторая функция. В этом случае $\chi = \Phi_1^{-1}(\alpha h \Psi^{-1}(h) \ln h)$, где $\Phi_1(t)$ — некоторая непрерывная, монотонно возрастающая, неотрицательная, неограниченная при $h \to +\infty$ функция.

Литература

1. Flatto L., Levinson N. *Periodic solutions of singularly perturbed systems* // J. Rational Mech. and Anal. – 1955. – V. 4. – № 6. – P. 943–950.
2. Lewis D.C. *On the role of first integrals in the perturbation of periodic solutions* // Ann. Math. – 1956. – V. 63. – № 3. – P. 535–548.
3. Сазонов В.В. *Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром* // ПММ. – 1983. – Т. 47. – № 5. – С. 707–719.
4. Сазонов В.В. *О зависимости решений уравнений движения механических систем от большого параметра* // ПММ. – 1990. – Т. 54. – № 5. – С. 709–716.

Волгоградский государственный университет

Поступила 16.10.1995