ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 7 (494)

УДК 519.63

Р.З. ДАУТОВ, М.М. КАРЧЕВСКИЙ, В.Н. ПАЙМУШИН

К МЕТОДУ ИНТЕГРИРУЮЩИХ МАТРИЦ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод интегрирующих матриц (МИМ) успешно применяется для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в различных областях строительной механики (см., напр., [1]–[4]). Дискретный аналог краевой задачи в этом методе получается путем сведения ее к интегральному соотношению, содержащему простейшие операторы типа Вольтерра относительно производных искомого решения и последующей аппроксимации этого соотношения при помощи метода коллокации. При этом возникают так называемые интегрирующие треугольные матрицы, соответствующие операторам типа Вольтерра. Важной положительной особенностью МИМ является то, что конструирование разрешающей системы линейных алгебраических уравнений и последующее восстановление приближенного решения в узлах сетки выполняется при помощи элементарных и однотипных операций с этими матрицами.

Следует, однако, отметить, что система линейных уравнений МИМ при решении задачи с самосопряженным дифференциальным оператором, вообще говоря, оказывается несимметричной. Это обстоятельство особенно неприятно при решении спектральных задач.

В работе [5] указан способ распределения узлов коллокации, обеспечивающий симметрию матрицы системы МИМ. Там же на примере самосопряженного уравнения четвертого порядка проведено подробное исследование устойчивости и точности предлагаемого варианта МИМ. В частности, показано, что обусловленность матрицы системы не ухудшается с ростом числа узлов коллокации, и метод имеет экспоненциальную оценку точности, т. е. может быть отнесен к ненасыщаемым алгоритмам [6].

В данной статье, непосредственно примыкающей к [5], предлагается естественное обобщение МИМ, состоящее в том, что область интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений разбивается на непересекающиеся части, интегральное соотношение МИМ записывается независимо на каждой из этих частей, в точках разбиения ставятся естественные условия сопряжения, выражающие непрерывность искомых функций и "потоков". Затем выполняется аппроксимация этих соотношений с использованием метода коллокации по каждой подобласти на сетке узлов, связанной с нулями полиномов Лежандра. Показано, что возникающая при этом система линейных алгебраических уравнений может быть интерпретирована как система метода конечных элементов с численным интегрированием по формуле Гаусса. Это дает возможность исследовать разрешимость предлагаемого метода и получить оценки точности в терминах наилучших приближений производной точного решения, "потоков" и правой части алгебраическими полиномами, из которых при соответствующей гладкости исходных данных вытекают типичные для h–p варианта метода конечных элементов оценки, выражающие зависимость погрешности от шагов сетки и порядка полиномов, используемых в методе коллокации. Отметим, что при этом реализуется экспоненциальная зависимость погрешности от порядка полинома. В этом смысле рассматриваемые в статье методы можно отнести к ненасыщаемым алгоритмам.

1. Постановка задачи. Построение сеточной аппроксимации

Рассматривается первая краевая задача для самосопряженной системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$-(pu' + au)' + bu' + qu = f, \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

Здесь $u = u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))^T \in R^n$ — вектор-функция, коэффициенты уравнения — квадратные матрицы такие, что $p, a \in C^{(1)}(0,1)$, $b, q, f \in C(0,1)$,

$$p = p(x) = p^T(x) \geq c_0 E, \quad c_0 > 0, \quad a = a(x) = b^T(x), \quad q = q(x) = q^T(x) \geq 0, \tag{3}$$

E — единичная матрица.

Введем на отрезке $[0,1]$ сетку $\omega = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1\}$. Проинтегрируем уравнение (1) по отрезку $[x, x_i]$, $x_{i-1} < x < x_i$. Получим

$$pw(x) + au(x) + \int_x^{x_i} bw(\xi)d\xi + \int_x^{x_i} qu(\xi)d\xi + c_i = \int_x^{x_i} f(\xi)d\xi,$$

где $w(x) = u'(x)$, $c_i = -(pw + au)(x_i)$. Ясно, что

$$u(x) = \int_{x_{i-1}}^{x} w(\xi)d\xi + u_{i-1}.$$

Здесь и далее $u_i = u(x_i)$. Следовательно, для $i = 1, 2, \dots, N$ имеем

$$pw(x) + a\left(\int_{x_{i-1}}^{x} w(\xi)d\xi + u_{i-1}\right) + \int_x^{x_i} bw(\xi)d\xi + \\ + \int_x^{x_i} q\left(\int_{x_{i-1}}^{\xi} w(s)ds + u_{i-1}\right)d\xi + c_i = \int_x^{x_i} f(\xi)d\xi. \tag{4}$$

Используем интегральные соотношения (4) для построения приближенного метода решения задачи (1), (2). Присоединим к уравнениям (4) очевидные равенства

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} w(x)dx = u_i - u_{i-1}, \tag{5}$$

условия сопряжения

$$pw(x_i - 0) + au(x_i - 0) = pw(x_i + 0) + au(x_i + 0), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \tag{6}$$

и граничные условия

$$u_0 = u_N = 0. \tag{7}$$

На уравнения (4)–(7) можно смотреть как на систему уравнений для определения значений $w(x)$, $x \in e_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$, и u_i, $i = 0, 1, \dots, N$. Уравнения (4), (5) позволяют исключить функцию w [5], после чего систему уравнений (6), (7) можно трактовать как точную разностную схему [7], [8] для задачи (1), (2).

Дальнейшее посвящено аппроксимации системы (4)–(7) сеточной системой.

Положим

$$\psi_0^i(x) = (x_i - x)/h_i, \quad \psi_1^i(x) = (x - x_{i-1})/h_i, \quad h_i = x_i - x_{i-1}$$

и определим матрицы базисных функций $\Psi_0^i = \psi_0^i E$, $\Psi_1^i = \psi_1^i E$. Используя формулу интегрирования по частям и уравнение (1), нетрудно проверить, что

$$pw(x_i - 0) + au(x_i - 0) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Big\{ (\Psi_1^i)' \Big(pw + a\Big(\int_{x_{i-1}}^{x} w(\xi) d\xi + u_{i-1} \Big) \Big) + \\ + \Psi_1^i \Big(bw + q\Big(\int_{x_{i-1}}^{x} w(\xi) d\xi + u_{i-1} \Big) \Big) \Big\} dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Psi_1^i f dx \equiv Q_1^i, \quad (8)$$

$$-pw(x_i + 0) - au(x_i + 0) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big\{ (\Psi_0^{i+1})' \Big(pw + a\Big(\int_{x_i}^{x} w(\xi) d\xi + u_i \Big) \Big) + \\ + \Psi_0^{i+1} \Big(bw + q\Big(\int_{x_i}^{x} w(\xi) d\xi + u_i \Big) \Big) \Big\} dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Psi_0^{i+1} f dx \equiv Q_0^{i+1}, \quad (9)$$

т. е. условия (6) можно записать в виде

$$Q_1^i + Q_0^{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \quad (10)$$

Введем на каждом отрезке e_i сетку $\omega_i = \{x_1^i < x_2^i < \cdots < x_{n_i}^i\}$, образованную узлами квадратурной формулы Гаусса на e_i. Пусть $v(x)$ — непрерывная на e_i функция. Положим

$$v_I(x) = \sum_{k=1}^{n_i} v(x_k^i) l_k^i(x),$$

где $l_k^i(x)$ — базисные функции Лагранжа ($v_I(x)$ — интерполяционный полином степени $n_i - 1$ для функции v). С каждым отрезком e_i свяжем операторы I_h^i и I_h^{i*}, действующие на непрерывные функции по правилу $I_h^i v = I^i v_I^i$, $I_h^{i*} = I^{i*} v_I^i$, где

$$I^i v(x) = \int_{x_{i-1}}^{x} v(\xi) d\xi, \quad I^{i*} v(x) = \int_{x}^{x_i} v(\xi) d\xi, \quad x \in e_i.$$

Пусть H^h — линейное пространство вектор-функций $w^h(x) = (w_1^h(x), \ldots, w_n^h(x))^T$, определенных на отрезке $[0,1]$ и таких, что $v_h|_{e_i} \in P_{n_i}$ для каждого отрезка e_i, где P_{n_i} — множество полиномов степени не выше n_i. Положим

$$s_i(w) = \sum_{k=1}^{n_i} d_k^i w(x_k^i), \quad s_i(w, \eta) = s_i(w \cdot \eta), \quad (11)$$

где "$\cdot$" — скалярное произведение векторов в R^n, d_k^i — коэффициенты квадратурной формулы Гаусса на отрезке e_i.

Приближенным решением задачи (4)–(7) назовем тройку

$$(w^h, c^h, y^h) \in H^h \times (R^n)^N \times (R^n)^{N+1},$$

удовлетворяющую системе уравнений

$$pw^h + a(I_h^i w^h + y_{i-1}^h) + I_h^{i*}(bw^h + q(I_h^i w^h + y_{i-1}^h)) + c_i^h = I_h^{i*} f, \quad x \in \omega_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad (12)$$

$$s_i(w^h) = y_i^h - y_{i-1}^h, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad (13)$$

$$Q_{1,h}^i + Q_{0,h}^{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad (14)$$

$$y_0^h = y_N^h = 0, \quad (15)$$

где

$$Q_{\alpha,h}^i = s_i((\Psi_\alpha^i)'(pw^h + a(I_h^i w^h + y_{i-1}^h))) + \\ + s_i(\Psi_\alpha^i(bw^h + q(I_h^i w^h + y_{i-1}^h))) - s_i(\Psi_\alpha^i f), \quad \alpha = 0, 1. \quad (16)$$

Отметим, что при $N = 1$ эта система совпадает с системой МИМ, исследованной в [5].

2. Исследование задачи (12)–(15)

Покажем, что задача (12)–(15) эквивалентна методу конечных элементов с лагранжевыми элементами и численным интегрированием при помощи квадратурной формулы Гаусса. Тогда разрешимость задачи (12)–(15) и оценки точности приближенного решения могут быть получены на основе хорошо известных результатов метода конечных элементов (см., напр., [9]).

Умножим каждое из уравнений (14) скалярно на вектор $\xi_i \in R^n$ и просуммируем полученные равенства по всем $i = 1, 2 \ldots, N-1$. После группировки слагаемых при $\xi_0 = \xi_N = 0$ получаем

$$\sum_{i=1}^{N} \{ s_i(pw^h + a(I_h^i w^h + y_{i-1}^h), (\Psi_0^i)'\xi_{i-1} + (\Psi_1^i)'\xi_i) +$$

$$+ s_i(bw^h + q(I_h^i w^h + y_{i-1}^h), \Psi_0^i \xi_{i-1} + \Psi_1^i \xi_i) \} = \sum_{i=1}^{N} s_i(f, \Psi_0^i \xi_{i-1} + \Psi_1^i \xi_i). \quad (17)$$

Умножим теперь равенство (12) в каждой точке $x_k^i \in \omega_i$ скалярно на $\widetilde{\psi}_i(x_k^i)$, где $\widetilde{\psi}_i$ — такая вектор-функция, что каждая ее компонента — полином степени $n_i - 1$, и

$$s_i(\widetilde{\psi}_i) = 0. \quad (18)$$

Просуммируем полученные равенства с весом d_k^i по всем $x_k^i \in \omega_i$, а затем по $i = 1, 2, \ldots, N$. Результат сложим с (17). Используя после этого свойство взаимной сопряженности операторов I_h^i и $I_h^{i\,*}$ [5]

$$s_i(I_h^i w, v) = s_i(w, I_h^{i\,*} v),$$

получим

$$\sum_{i=1}^{N} \{ s_i(pw^h + a(I_h^i w^h + y_{i-1}^h), (\Psi_0^i)'\xi_{i-1} + (\Psi_1^i)'\xi_i + \widetilde{\psi}_i) +$$

$$+ s_i(bw^h + q(I_h^i w^h + y_{i-1}^h), \Psi_0^i \xi_{i-1} + \Psi_1^i \xi_i + I_h^i \widetilde{\psi}_i) \} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} s_i(f, \Psi_0^i \xi_{i-1} + \Psi_1^i \xi_i + I_h^i \widetilde{\psi}_i). \quad (19)$$

Ясно, что

$$u_i^h(x) = I_h^i w^h + y_{i-1}^h \quad (20)$$

есть вектор-функция, каждая компонента которой — полином степени n_i, принимающая вследствие условия (13) значения y_{i-1}^h, y_i^h на концах отрезка e_i, а $\eta_i^h(x) = \Psi_0^i \xi_{i-1} + \Psi_1^i \xi_i + I_h^i \widetilde{\psi}_i$ — вектор-функция, каждая компонента которой есть полином степени n_i, причем вследствие (18) $\eta_i^h(x_{i-1}) = \xi_{i-1}$, $\eta_i^h(x_i) = \xi_i$. Вследствие произвольности ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, равенство (19) можно интерпретировать как систему уравнений метода конечных элементов с численным интегрированием при помощи квадратурной формулы Гаусса для задачи (1), (2)

$$\sum_{i=1}^{N} \{ s_i(p(u_i^h)' + au_i^h, (\eta_i^h)') + s_i(b(u_i^h)' + qu_i^h, \eta_i^h) \} = \sum_{i=1}^{N} s_i(f, \eta_i^h). \quad (21)$$

Пусть

$$V^0 = [\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)]^n, \quad \|v\|_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\|v_i'\|_0^2 + \|v_i\|_0^2 \right) \right)^{1/2}, \quad \|v\|_0^2 = \int_0^1 v^2 dx.$$

Обозначим через P_{n_i} множество полиномов степени не выше n_i. Введем пространство конечных элементов V_h^0 как множество непрерывных вектор-функций размерности n, каждая компонента которых является полиномом степени не выше n_i на каждом из элементов e_i,

$$V_h^0 = \{ v_h \in V^0 : v_h|_{e_i} \in P_{n_i} \}$$

и определенные соответственно на $V_h^0 \times V_h^0$ и V_h^0 формы

$$a_h(u^h, \eta^h) = \sum_{i=1}^{N} \{s_i(p(u^h)' + au^h, (\eta^h)') + s_i(b(u^h)' + qu^h, \eta^h)\},$$

$$f_h(\eta^h) = \sum_{i=1}^{N} s_i(f, \eta^h).$$

Тождество (21) тогда запишется следующим образом:

$$u^h \in V_h^0 : \ a_h(u^h, \eta^h) = f_h(\eta^h) \ \ \forall v^h \in V_h^0. \tag{22}$$

Интегральное тождество, соответствующее исходной задаче (1), (2), запишем в виде

$$u \in V^0 : \ a(u, \eta) = f(\eta) \ \ \forall v \in V^0, \tag{23}$$

где для $u, v \in V^0$

$$a(u, \eta) = (pu' + au, \eta') + (bu' + qu, \eta), \quad f(\eta) = (f, \eta), \quad (u, v) = \int_0^1 u\, v\, dx.$$

Пусть далее u — решение задачи (1), (2), u_h — решение схемы МКЭ с численным интегрированием (22). Оценим их близость.

Данные исходной задачи в дальнейшем будем предполагать такими, что

$$p, a, b, q \in C^1(\overline{e}_i), \tag{24}$$

$$u', f, Q_1 = pu' + au, \quad Q_2 = bu' + qu \in C^{r_i}(\overline{e}_i), \quad i = 1, \ldots, N, \quad r_i \geq 1, \tag{25}$$

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_1^2, \quad \alpha > 0, \ \ \forall u \in V^0. \tag{26}$$

На V_h^0 введем функционал $\|\cdot\|_{1,h}$ равенством

$$\|u\|_{1,h}^2 = \sum_{i=1}^{N} \big(s_i(u', u') + s_i(u, u)\big).$$

Нетрудно видеть, что существуют постоянные β и β_1 (β_1 не зависит от h) такие, что

$$|a(u, v)| \leq \beta \|u\|_1 \|v\|_1 \qquad \forall u, v \in V^0,$$
$$|a_h(u, v)| \leq \beta_1 \|u\|_{1,h} \|v\|_1 \qquad \forall u \in V^0, \ \ \forall v \in V_h^0.$$

Оценки, аналогичные содержащимся в следующей теореме, вытекают из оценок точности квадратуры Гаусса и хорошо известны в теории МКЭ (см., напр., [9], с. 446) по поводу первой оценки).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (24). *Тогда существует такая положительная постоянная c, не зависящая от h, что*

$$|a(u, v) - a_h(u, v)| \leq ch \|u\|_1 \|v\|_1 \ \ \forall u, v \in V_h^0,$$

где $h = \max_{i=1,\ldots,N} h_i$,

$$\|v\|_{1,h} \leq \|v\|_1 \ \ \forall v \in V_h^0.$$

Поскольку для любых $v \in V_h^0$ в силу (26) и теоремы 1

$$a_h(v, v) = a(v, v) + (a_h(v, v) - a(v, v)) \geq \alpha \|v\|_1^2 - ch\|v\|_1^2,$$

то отсюда следует

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (24), (26). *Тогда для достаточно малых h существует такая постоянная $\alpha_1 > 0$, не зависящая от h, что*

$$a_h(u,u) \geq \alpha_1 \|u\|_1^2 \;\; \forall u \in V_h^0.$$

Из этой теоремы, в частности, следует однозначная разрешимость сеточной схемы (22) при достаточно малых h.

Следующая теорема дает оценку погрешности приближенного решения в терминах величин наилучшего равномерного приближения функций u', Q_1, Q_2, f полиномами.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (24), (25). *Тогда*

$$\|u - u_h\|_1 \leq (1 + \alpha_1^{-1}\beta_1)\gamma\varepsilon\,(u') + 2\left(\varepsilon\,(Q_1) + \varepsilon\,(Q_2) + \varepsilon\,(f)\right), \tag{27}$$

где

$$\varepsilon(v) = \left(\sum_{i=1}^{N} h_i \big(E_{n_i}^i(v)\big)^2\right)^{1/2}, \quad E_{n_i}^i(\varphi) = \inf_{v \in P_{n_i - 1}} |\varphi - v|_{\infty, e_i},$$

постоянные α_1 и β_1 определены выше, $\gamma = \sqrt{3/2}$.

Доказательство. Как известно (см., напр., [9], с. 433), для приближенного решения, определяемого соотношением (23), справедлива оценка погрешности

$$\|u - u_h\|_1 \leq \|u - v_h\|_1 + \alpha_1^{-1}\left(\beta_1\|u - v_h\|_{1,h} + E_a(u) + E_f\right) \;\; \forall v_h \in V_h^0, \tag{28}$$

где

$$E_a(u) = \sup_{v_h \in V_h^0} \frac{|a(u,v_h) - a_h(u,v_h)|}{\|v_h\|_1},$$
$$E_f = \sup_{v_h \in V_h^0} \frac{|f(v_h) - f_h(v_h)|}{\|v_h\|_1}.$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (28) в отдельности.

1. Введем обозначения $w = u'$, $[w] = \int\limits_0^1 w\,dx$. Ясно, что $u = \int\limits_0^x (w - [w])dx$. Пусть η_h — произвольная функция из H^h. Положим $v_h = \int\limits_0^x (\eta_h - [\eta_h])dx$. Нетрудно видеть, что $v_h \in V_h^0$, и при $e = w - \eta_h$ имеем

$$\int_0^1 |u' - v_h'|^2 dx = \int_0^1 |e - [e]|^2 dx = \int_0^1 |e|^2 dx - 2[e]\int_0^1 e dx + |[e]|^2 \leq \int_0^1 |e|^2 dx,$$

где $|\cdot|$ — длина вектора в R^n. Далее,

$$\int_0^1 |u - v_h|^2 dx = \int_0^1 \left|\int_0^x (e(s) - [e])ds\right|^2 dx \leq \int_0^1 \left(x\int_0^x |e(s) - [e]|^2 ds\right) dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |e|^2 dx.$$

Выбирая η_h так, что $|w - \eta_h|_{\infty, e_i} = E_{n_i}^i(u')$, $i = 1, 2, \ldots, N$, получим

$$\|u - v_h\|_1 \leq \gamma\varepsilon(u').$$

Точно такие же рассуждения справедливы, очевидно, если заменить интегралы по отрезку $[0,1]$ на составную квадратуру Гаусса. Поэтому $\|u - v_h\|_{1,h} \leq \gamma\varepsilon(u')$.

2. Оценка $E_a(u)$. Для погрешности квадратурной формулы Гаусса на элементе e_i введем обозначение $E_i(\varphi, v) = \int\limits_{e_i} \varphi\, v\, dx - s_i(\varphi, v)$. Тогда

$$a(u,v) - a_h(u,v) = \sum_{i=1}^{N}\left(E_i(pu' + au, v') + E_i(bu' + qu, v)\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(E_i(Q_1, v') + E_i(Q_2, v)\right).$$

Оценим слагаемое вида $E_i(\varphi, v)$, $v \in V_h^0$. Нетрудно убедиться, что

$$|E_i(\varphi, v)| \le 2\sqrt{h_i}\|\varphi\|_{\infty,e_i}\|v\|_{0,e_i},$$

и в силу точности квадратуры Гаусса $E_i(\varphi, v) = 0$ для любого $\varphi \in P_{n_i-1}$. Поэтому

$$|E_i(\varphi, v)| \le 2\sqrt{h_i}\inf_{v\in P_{n-1}}|\varphi - v|_{\infty,e_i}\|v\|_{0,e_i} = 2\sqrt{h_i}E^i_{n_i}(\varphi)\|v\|_{0,e_i}.$$

Аналогично $|E_i(\varphi, v')| \le 2\sqrt{h_i}E^i_{n_i}(\varphi)\|v'\|_{0,e_i}$. Следовательно,

$$|a(u,v) - a_h(u,v)| \le 2\sum_{i=1}^{N}\sqrt{h_i}\left((E^i_{n_i}(Q_1) + E^i_{n_i}(Q_2))(\|v\|_{0,e_i} + \|v'\|_{0,e_i})\right) \le$$

$$\le 2\left(\sum_{i=1}^{N}h_i\left((E^i_{n_i}(Q_1))^2 + (E^i_{n_i}(Q_2))^2\right)\right)^{1/2}\|v\|_1 \le 2\left(\varepsilon(Q_1) + \varepsilon(Q_2)\right)\|v\|_1,$$

откуда и вытекает искомая оценка $E_a(u) \le 2\left(\varepsilon(Q_1) + \varepsilon(Q_2)\right)$.

3. Оценка E_f проводится аналогично предыдущему и имеет вид $E_f \le 2\varepsilon(f)$.

Собирая теперь полученные оценки в правой части неравенства (28), получим (27). □

Следствие. Пусть выполнены условия (24), (25), $n_i \ge r_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Тогда

$$\|u - u_h\|_1 \le c\max_{1\le i\le N}\left(\frac{h_i}{n_i}\right)^{r_i}$$

с постоянной c, не зависящей от h_i и n_i.

Для доказательства достаточно использовать при $n_i \ge r_i$, $i = 1, \ldots, N$, хорошо известную оценку (см., напр., [6], с. 162)

$$E^i_{n_i}(w) = \inf_{\eta_h\in H^h|_{e_i}}|w - \eta_h|_{\infty,e_i} \le K_{r_i}\frac{h_i^{r_i}}{n_i^{r_i}}\|w\|_{r_i,\infty,e_i},$$

где $\|w\|_{r,\infty,e_i} = \|w^{(r)}\|_{\infty,e_i}$, K_{r_i} — постоянная, зависящая только от r_i.

3. Построение системы линейных уравнений для определения y^h (метод суперэлементов)

При практическом решении системы (12)–(15) может оказаться полезным свести ее к системе линейных уравнений относительно y^h, т. е. использовать технику суперэлементов.

Введем матрицы базисных функций Φ_0^i, Φ_1^i, определенные как решения задач

$$p\Phi_0^i + a(I_h^i\Phi_0^i + E) + {I_h^i}^*(b\Phi_0^i + q(I_h^i\Phi_0^i + E)) + C_0^i = 0, \quad x \in \omega_i,$$
$$s_i(\Phi_0^i) = -E,$$
$$p\Phi_1^i + aI_h^i\Phi_1^i + {I_h^i}^*(b\Phi_1^i + qI_h^i\Phi_1^i) + C_1^i = 0, \quad x \in \omega_i,$$
$$s_i(\Phi_1^i) = E,$$

где C_0^i, C_1^i — постоянные матрицы, а также вектор-функции $\widetilde{\varphi}^i$, определенные как решения задач

$$p\widetilde{\varphi}^i + aI_h^i\widetilde{\varphi}^i + {I_h^i}^*(b\widetilde{\varphi}^i + qI_h^i\widetilde{\varphi}^i) + \widetilde{c}^i = {I_h^i}^*f, \quad x \in \omega_i,$$
$$s_i(\widetilde{\varphi}^i) = 0.$$

Нетрудно видеть, что

$$w^h = \Phi_0^iy_{i-1}^h + \Phi_1^iy_i^h + \widetilde{\varphi}^i, \quad x \in \omega_i, \tag{29}$$
$$Q^i_{\alpha,h} = s_i((\Phi^i_\alpha)^T(pw^h + a(I_h^iw^h + y_{i-1}^h))) + s_i((\widetilde{\Phi}^i_\alpha)^T(bw^h + q(I_h^iw^h + y_{i-1}^h))) - s_i((\widetilde{\Phi}^i_\alpha)^Tf),$$

$\alpha = 1,2$, где $\widetilde{\Phi}_1^i = I_h^i \Phi_1^i$, $\widetilde{\Phi}_0^i = I_h^i \Phi_0^i + E$, причем для доказательства последнего равенства достаточно заметить, что

$$s_i(((\Phi_\alpha^i)^T - (\Psi_\alpha^i)')(pw^h + a(I_h^i w^h + y_{i-1}^h))) +$$
$$+ s_i(((\widetilde{\Phi}_\alpha^i)^T - \Psi_\alpha^i)(bw^h + q(I_h^i w^h + y_{i-1}^h))) - s_i(((\widetilde{\Phi}_\alpha^i)^T - \Psi_\alpha^i)f) = 0,$$

поскольку

$$\widetilde{\Phi}_\alpha^i - \Psi_\alpha^i = I_h^i(\Phi_\alpha^i - (\Psi_\alpha^i)'),$$

а $s_i(\Phi_\alpha^i - (\Psi_\alpha^i)') = 0$ (см. также (12)). Используем представление (29) для преобразования выражений $Q_{\alpha,h}^i$. Имеем

$$Q_{\alpha,h}^i = A_{\alpha,0}^i y_{i-1}^h + A_{\alpha,1}^i y_i^h - f_{i,\alpha}^h + \widetilde{Q}_{\alpha,h}^i, \quad \alpha = 0,1,$$

где

$$A_{\alpha,0}^i = s_i((\Phi_\alpha^i)^T(p\Phi_0^i + a\widetilde{\Phi}_0^i)) + s_i((\widetilde{\Phi}_\alpha^i)^T(b\Phi_0^i + q\widetilde{\Phi}_0^i)),$$
$$A_{\alpha,1}^i = s_i((\Phi_\alpha^i)^T(p\Phi_1^i + a\widetilde{\Phi}_1^i)) + s_i((\widetilde{\Phi}_\alpha^i)^T(b\Phi_1^i + q\widetilde{\Phi}_1^i)),$$
$$f_{i,\alpha}^h = s_i((\widetilde{\Phi}_\alpha^i)^T f),$$
$$\widetilde{Q}_{\alpha,h}^i = s_i((\Phi_\alpha^i)^T(p\widetilde{\varphi}^i + aI_h^i\widetilde{\varphi}^i)) + s_i((\widetilde{\Phi}_\alpha^i)^T(b\widetilde{\varphi}^i + qI_h^i\widetilde{\varphi}^i)).$$

Непосредственно из определения матриц Φ_α^i и векторов $\widetilde{\varphi}^i$ вытекает, что $\widetilde{Q}_{\alpha,h}^i = 0$ и, следовательно,

$$Q_{\alpha,h}^i = A_{\alpha,0}^i y_{i-1}^h + A_{\alpha,1}^i y_i^h - f_{i,\alpha}^h, \quad \alpha = 0,1.$$

Это означает, что система (14), (15) может быть записана в виде блочно-трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений

$$Ay^h = f^h, \tag{30}$$

где матрица A и вектор f^h могут быть построены при помощи стандартной процедуры сборки из матриц

$$\begin{pmatrix} A_{00}^i & A_{01}^i \\ A_{10}^i & A_{11}^i \end{pmatrix}$$

и векторов $f_i^h = (f_{i,0}^h,\ f_{i,1}^h)$, $i = 1,2,\ldots,N$, соответственно с учетом граничных условий (15). Вследствие условий (3) имеем $A_{\alpha\alpha}^i = (A_{\alpha\alpha}^i)^T$, $\alpha = 1,2$, $A_{01}^i = (A_{10}^i)^T$, поэтому матрица A симметрична. Если оператор задачи (1), (2) положительно определен, то и матрица A, по крайней мере для достаточно малых h_i, положительно определена (см. теорему 2).

Заметим, что при построении матрицы A и вектора f^h естественным образом выделяются параллельные ветви алгоритма, например, соответствующие системы уравнений для Φ_α^i, $\widetilde{\varphi}^i$ решаются независимо для каждого элемента. Матрицы этих систем легко симметризуются, а их обусловленность не зависит от числа узлов на элементе [5].

При необходимости приближенные значения w^h производной искомого решения и само приближенное решение u^h могут быть вычислены в узлах элементов по формулам (29), (20).

Литература

1. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Шапошников Н.Н., Лащенков Б.Я. *Расчет сооружений с применением вычислительных машин.* — М.: Стройиздат, 1964. — 380 с.
2. Вахитов М.Б. *Интегрирующие матрицы — аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики* // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1966. – № 3. – С. 50–61.
3. Паймушин В.Н. *О некоторых численных методах в задачах механики оболочек сложной геометрии* // Исследов. по теории пластин и оболочек. – Казань, 1990. – Вып. 20. – С. 10–18.

4. Фирсов А.В. *Аппарат метода конечных сумм на основе сплайн-аппроксимации* // Актуальн. проблемы механики оболочек. – Казань, 1985. – С. 124–132.
5. Даутов Р.З., Паймушин В.Н. *О методе интегрирующих матриц решения краевых задач для обыкновенных уравнений четвертого порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 10. – С. 13–25.
6. Бабенко К.И. *Основы численного анализа.* – М.: Наука, 1986. – 744 с.
7. Самарский А.А. *Введение в теорию разностных схем.* – М.: Наука, 1971. – 552 с.
8. Корнеев В.Г. *О точных сеточных схемах* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1982. – Т. 22. – № 3. – С. 645–654.
9. Сьярле Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических задач.* – М.: Мир, 1980. – 512 с.

Казанский государственный университет

Казанский государственный технический университет

Поступила
21.06.2001