ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 11 (522)

УДК 517.544

И.Т. ДЕНИСЮК

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ТРЕХМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ С НЕГЛАДКИМИ ГРАНИЦАМИ

Прикладные проблемы математической физики, а именно, исследование нестационарных температурных полей, динамических температурных напряжений в структурно-неоднородных телах с негладкими границами раздела приводят к необходимости решения соответствующих задач сопряжения [1].

Постановка задачи. Пусть в трехмерном пространстве R_3 содержится конечная односвязная область V_1, ограниченная негладкой поверхностью S, содержащей непересекающиеся гладкие особые линии (множества угловых точек) и конические точки.

Построим решения $T_j = T_j(x,y,z,t)$ нестационарного уравнения теплопроводности [1]

$$\Delta T_j - a_j^2 \frac{\partial T_j}{\partial t} = f_j(x,y,z,t) \tag{1}$$

при начальном условии

$$T_j(x,y,z,t)|_{t=0} = 0 \tag{2}$$

и условиях сопряжения на поверхности S ([1], с. 98):
в точках гладкости

$$\begin{gathered} T_0^-(x,y,z,t) - T_1^+(x,y,z,t) = 0, \\ \lambda_0 \frac{\partial T_0^-(x,y,z,t)}{\partial n} - \lambda_1 \frac{\partial T_1^+(x,y,z,t)}{\partial n} = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

в особых точках $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$$\begin{gathered} \lim_{M\to M_0} [T_0^-(x,y,z,t) - T_1^+(x,y,z,t)] = 0, \\ \lim_{M\to M_0} \left[\lambda_0 \frac{\partial T_0^-(x,y,z,t)}{\partial n} - \lambda_1 \frac{\partial T_1^+(x,y,z,t)}{\partial n}\right] = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где значение индекса $j = 0$ относит величины к области $V_0 = R_3 \setminus V_1$, а значение индекса $j = 1$ — к области V_1; n — нормаль к поверхности S, внешняя по отношению к области V_1, верхние индексы "$\pm$" означают граничные значения величин при подходе точки $M(x,y,z)$ к точке поверхности S со стороны области V_1 (знак "$+$") или области V_0 (знак "$-$"), $\lambda_j \in R$.

В особых точках M_0 выполнение уравнения теплопроводности понимается в смысле реализации равенства ([2], с. 187)

$$\lim_{\Delta V\to M_0} \iiint\limits_{\Delta V} \left[\Delta T_j - a_j^2 \frac{\partial T_j}{\partial t} - f_j(x,y,z,t)\right] dv = 0, \tag{5}$$

т. е. при стягивании элементарной области ΔV в особую точку M_0.

Установим поведение решений уравнения теплопроводности вблизи особых точек поверхности сопряжения S.

Лемма. *Асимптотика решений нестационарного однородного уравнения теплопроводности, соответствующего* (1) *и условиями сопряжения* (3), (4)*, вблизи особых точек поверхности сопряжения совпадает с асимптотикой гармонических функций в R_3 с такими же условиями сопряжения* [3].

Доказательство. Однородное уравнение, соответствующее (1), инвариантно относительно преобразования

$$x = Bx_1, \quad y = By_1, \quad z = Bz_1, \quad t = B^2 t_1 \quad (B \in R).$$

Учитывая линейность условий сопряжения (3), (4) и однородность начального условия (2), устанавливаем, что решение задачи сопряжения определяется функциональным уравнением

$$T_j(x, y, z, t) = A(B) T_j(Bx, By, Bz, B^2 t). \tag{6}$$

Дифференцируя соотношение (6) по B, получим уравнение

$$(\operatorname{grad} T_j, \overline{r}) + 2t \frac{\partial T_j}{\partial t} = K T_j \quad (K \in R),$$

решение которого определяет класс решений уравнения теплопроводности

$$T_j = x^m \varphi_j \left(\frac{x}{y}, \frac{x}{z}, \frac{x}{\sqrt{t}} \right). \tag{7}$$

Пусть поверхность S раздела областей содержит гладкую особую линию, запишем представление (7) в локальных координатах ρ, θ, s, связанных с особой линией [3]. Удовлетворяя соотношению (5) с помощью полученного представления T_j, получим определяющее дифференциальное уравнение для T_j, совпадающее с соответствующим уравнением для гармонической функции, и известную асимптотику [3].

В случае конической точки, выполняя в соотношении (7) переход к криволинейным ортогональным координатам ρ_1, θ_1, s_1, связанными с конической точкой [3], аналогично предыдущему убеждаемся в совпадении асимптотики решения однородного нестационарного уравнения теплопроводности и асимптотики соответствующей гармонической функции. □

Отметим, что аналогичное обстоятельство имеет место и для волнового уравнения Ламе [4].

Решение уравнения (1) представляется суммой тепловых потенциалов простого и двойного слоя ([5], с. 224) и обьема ([6], с. 258). Изучим условия существования и свойства потенциалов в случае негладких поверхностей.

Теорема 1. *Если плотность $\mu_2(M, t)$ теплового потенциала двойного слоя $W(M, t)$ является непрерывной функцией в точках гладкости $M(x, y, z)$ поверхности S, а в особых точках поверхности $M_0(x_0, y_0, z_0)$ равна нулю и в окрестности их имеет асимптотику*

$$\mu_2(M, t) = O(|MM_0|^{\alpha}), \quad \alpha \in (0, 1), \quad t \in (0, \infty), \tag{8}$$

то тепловой потенциал двойного слоя существует, удовлетворяет однородному нестационарному уравнению теплопроводности и в точках гладкости M_1 поверхности имеет место известное представление для его граничных значений

$$W^{\pm}(M_1, t) = \pm 2\pi \mu_2(M_1, t) + W(M_1, t), \tag{9}$$

где $W(M_1, t)$ — прямое значение потенциала, $W^{\pm}(M_1, t)$ — граничные значения потенциала при подходе к точке гладкости поверхности вдоль внешней нормали $\overline{n}$ со стороны области V_1 (знак “+”) или V_0 (знак “−“).

Доказательство. Пусть поверхность S содержит одну гладкую особую линию. Окружим особую линию трубчатой поверхностью S_R радиуса R. В результате поверхность S разобьется на поверхность $S^{(1)}$, лежащую внутри трубчатой поверхности, и поверхность $S^{(2)}$, находящуюся вне трубчатой поверхности.

Представим тепловой потенциал двойного слоя суммой

$$W(M,t) = \int_0^t d\tau \iint_{S^{(1)}} \mu_2(N,\tau)K_2(M,N,t,\tau)ds_N + \int_0^t d\tau \iint_{S^{(2)}} \mu_2(N,\tau)K_2(M,N,t,\tau)ds_N, \tag{10}$$

где $K_2(M,N,t,\tau) = \frac{\partial}{\partial n}K_1(M,N,t,\tau)$,

$$K_1(M,N,t,\tau) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2a^2}{4(t-\tau)}\right), \quad r = |MN|.$$

Второе слагаемое правой части равенства (10) существует как тепловой потенциал двойного слоя на разомкнутой поверхности Ляпунова и граничные значения интеграла в точках гладкости $M_1 \in S^{(2)}$ таковы [5]:

$$\left[\int_0^t d\tau \iint_{S^{(2)}} \mu_2(N,\tau)K_2(M,N,t,\tau)ds_N\right]^{\pm}_{M_1} = \pm 2\pi\mu_2(M_1,t) + \int_0^t d\tau \iint_{S^{(2)}} \mu_2(N,\tau)K_2(M,N,t,\tau)ds_N. \tag{11}$$

Первое слагаемое при $M_1 \in S^{(2)}$ вычисляется как несобственный интеграл при переходе в интеграле к локальным координатам $\rho,\ s$, связанным с особой линией [3], и учете (8), и является непрерывной функцией при переходе точки M поверхности $S^{(2)}$. Отсюда согласно (10) и (11) следует истинность представления (9).

В случае конической особой точки доказательство строится согласно вышеизложенной схеме при привлечении локальных координат, связанных с конической точкой [3]. Аналогичное доказательство для конечного числа непересекающихся гладких особых линий и не принадлежащих им конических точек.

Непосредственная подстановка выражения для потенциала двойного слоя в однородное уравнение, соответствующее (1), показывает, что оно удовлетворяется вне поверхности S. $\square$

Теорема 2. *Если плотность $\mu_1(M,t)$ теплового потенциала простого слоя $V(M,t)$ является непрерывной функцией в точках гладкости поверхности S, а в особых точках M_0 стремится к бесконечности с асимптотикой*

$$\mu_1(M,t) = O\left(\frac{1}{|MM_0|^{\alpha}}\right), \quad \alpha \in (0,1), \quad t \in (0,\infty), \tag{12}$$

то тепловой потенциал простого слоя существует, удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности, в точках гладкости поверхности S является непрерывной функцией и имеет место известное представление для граничных значений нормальной производной потенциала

$$\left[\frac{\partial}{\partial n}V(M_1,t)\right]^{\pm} = \pm 2\pi\mu_1(M_1,t) + \frac{\partial}{\partial n}V(M_1,t), \tag{13}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}V(M_1,t)$ — прямое значение нормальной производной теплового потенциала простого слоя.

Доказательство. Пусть поверхность содержит особую линию. Аналогично предыдущему доказательству для поверхности $S = S^{(1)} \bigcup S^{(2)}$ имеем

$$V(M,t) = \int_0^t d\tau \iint_{S^{(1)}} \mu_1(N,\tau)K_1(M,N,t,\tau)ds_N + \int_0^t d\tau \iint_{S^{(2)}} \mu_1(N,\tau)K_1(M,N,t,\tau)ds_N. \tag{14}$$

Первый интеграл правой части представления (14) существует как тепловой потенциал простого слоя по разомкнутой поверхности Ляпунова [5], а второй интеграл при переходе к переменным $\rho,\ s$, определяемый особой линией [3], и условием (12), вычисляется как несобственный.

При переходе точки гладкости поверхности $S^{(2)}$ второе слагаемое правой части (14) непрерывно как потенциал простого слоя на разомкнутой поверхности Ляпунова [5], а первое слагаемое при $M \notin S^{(1)}$ является непрерывной функцией. Поэтому потенциал $V(M,t)$ является непрерывной функцией при переходе точки гладкости поверхности S.

Нормальная производная от равенства (14) при учете известных граничных значений нормальной производной теплового потенциала простого слоя на разомкнутой поверхности Ляпунова [5] и непрерывности нормальной производной первого слагаемого правой части (14) при $M \notin S^{(1)}$ имеет граничные значения, определяемые формулой (13).

Аналогично доказательство в случае конической точки, а также конечного числа гладких непересекающихся особых линий и не принадлежащих им конических точек. Подстановка выражения для теплового потенциала простого слоя в однородное нестационарное уравнение теплопроводности показывает, что оно удовлетворяется. □

Теорема 3 (Ляпунова–Таубера). *Если плотность теплового потенциала двойного слоя удовлетворяет условиям теоремы 1 и существует предельное значение нормальной производной теплового потенциала в точке гладкости с одной стороны поверхности сопряжения S, то оно существует и с другой стороны и имеет место равенство*

$$\left[\frac{\partial}{\partial n} W(M,t)\right]^{+} = \left[\frac{\partial}{\partial n} W(M,t)\right]^{-}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай наличия особой линии на поверхности сопряжения S. Выделяя, как и при доказательстве теоремы 1, поверхности $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$, получим на основе равенства (10)

$$\frac{\partial}{\partial n} W(M,t) = \frac{\partial}{\partial n}\left[\int\limits_0^t d\tau \iint\limits_{S^{(1)}} \mu_1(N,\tau) K_1(M,N,t,\tau)\, ds_N\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial n}\left[\int\limits_0^t d\tau \iint\limits_{S^{(2)}} \mu_1(N,\tau) K_1(M,N,t,\tau)\, ds_N\right]. \quad (15)$$

Второе слагаемое правой части соотношения (15) имеет характер нормальной производной теплового потенциала двойного слоя на разомкнутой поверхности Ляпунова ([7], с. 91), т. е. если существует предельное значение слагаемого на одной стороне поверхности $S^{(2)}$, то существует равное ему предельное значение на другой стороне поверхности.

Первый интеграл правой части (15) вычисляется при переходе к переменным $\rho,\ s$ [3] как сингулярный интеграл, являющейся непрерывной функцией при переходе точки гладкости поверхности $S^{(2)}$. В результате следует истинность утверждения теоремы. Аналогично доказательство в случае конической точки, а также конечного числа непересекающихся особых линий и не принадлежащих им конических точек. □

Теорема 4. *Если указанные в лемме сингулярные характеристические уравнения, определяемые коническими точками* [3], *имеют в конических точках положительные корни, меньшие единицы, величина* $\lambda = \frac{\pi}{2\pi-\omega} < 1$, $0 \le \omega < \pi$ *(ω — величина угла раствора поверхности сопряжения в плоскости, нормальной к особой линии со стороны внешней нормали), и правые части уравнений* (1) $f_j(x,y,z,t)$ $(j=\overline{0,1})$ *ограничены в соответствующих областях* V_j, *то задача сопряжения* (1)–(5) *безусловно разрешима.*

Доказательство. Представим решение задачи сопряжения суммой сингулярной и регулярной составляющих

$$T_j(M,t)=T_{j1}(M,t)+T_{j2}(M,t)\quad (j=\overline{0,1}). \tag{16}$$

Сингулярные составляющие представляем суммой тепловых потенциалов простого и двойного слоя

$$T_{j1}(M,t)=V_{j1}(M,t)+W_{j1}(M,t) \tag{17}$$

с плотностями $\mu_{j1}(N)$, $N(\xi,\eta,\chi)$ и $\mu_2(N)$ соответственно. Ввиду наличия положительных корней сингулярных характеристических уравнений, меньших единицы, и на основе теорем 1 и 2 они строятся так же, как и в работе [3].

В результате получаем

$$V_{j1}(M,t)=\frac{1}{a_j}\iint\limits_S \frac{1}{r}erfc\Big(\frac{ra_j}{2\sqrt{t}}\Big)\mu_{j1}(N)ds_N, \tag{18}$$

$$W_{j1}(M,t)=-\frac{16}{\sqrt{\pi}}\iint\limits_S\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n_N}\left[\frac{ra_j}{2\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{r^2a_j^2}{4t}\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{2}erf\left(\frac{ra_j}{2\sqrt{t}}\right)\right]\right\}\mu_{j2}(N)ds_N, \tag{19}$$

где $erf(\ldots)$, $erfc(\ldots)$ — соответственно интеграл и дополнительный интеграл вероятностей ([8], с. 792).

Регулярные слагаемые решений представляем суммой тепловых потенциалов простого, двойного слоя и обьема

$$T_{j2}(M,t)=a_j(M,t)+V_{j2}(M,t)+W_{j2}(M,t)+U_j(M,t), \tag{20}$$

где $a_j(M,t)$ — известные функции, определяемые видом внешних тепловых воздействий, удовлетворяющие однородному уравнению теплопроводности, причем $a_0(M,t)$ стремится к нулю при $M\to\infty$,

$$V_{j2}(M,t)=\int\limits_0^t d\tau\iint\limits_S \mu_{j1}^{(2)}(N,t)K_{j1}(M,N,t,\tau)ds_N,$$

$$W_{j2}(M,t)=\int\limits_0^t d\tau\iint\limits_S \mu_{j2}^{(2)}(N,\tau)K_{j2}(M,N,t,\tau)ds_N,$$

$$U_{j2}(M,t)=-\int\limits_0^t f_j(N,\tau)K_{j1}(M,N,t,\tau)ds_N,$$

$N(\eta,\xi,\chi)$, $M(x,y,z)$, $\mu_{j1}^{(2)}(N,\tau),\mu_{j2}^{(2)}(N,\tau)$ — неизвестные плотности.

В представлении (20) учтено, что тепловой потенциал обьема с плотностью $-f(N,\tau)$ удовлетворяет неоднородному уравнению теплопроводности (1) ([6], с. 260).

Удовлетворяя условиям сопряжения в точках гладкости (3) с помощью представлений (16)–(20) и используя при этом теоремы 1–3, получим систему интегральных уравнений, в которой полагаем ввиду произвольности плотностей

$$\mu_{01}^{(2)}(N,\tau)=\mu_{11}^{(2)}(N,\tau),\quad \mu_{02}^{(2)}(N,\tau)=\mu_{12}^{(2)}(N,\tau).$$

В результате получаем систему интегральных уравнений

$$-4\pi\mu_{02}^{(2)}(M,t)+\int\limits_0^t d\tau\iint\limits_S \mu_{01}^{(2)}(N,\tau)[K_{01}(M,N,t,\tau)-K_{11}(M,N,t,\tau)]ds_N+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\iint\limits_S \mu_{02}^{(2)}(N,\tau)[K_{02}(M,N,t,\tau)-K_{12}(M,N,t,\tau)]ds_N=g(M,t),$$

$$-2\pi(\lambda_0+\lambda_1)\mu_{01}^{(2)}(M,t)+\int\limits_0^t d\tau\iint\limits_S \mu_{01}^{(2)}(N,\tau)\Big[\lambda_0\frac{\partial}{\partial n}K_{01}(M,N,t,\tau)-$$

$$-\lambda_1\frac{\partial}{\partial n}K_{11}(M,N,t,\tau)\Big]ds_N+\int\limits_0^t d\tau\iint\limits_S \mu_{02}^{(2)}(N,\tau)\Big[\lambda_0\frac{\partial}{\partial n}K_{02}(M,N,t,\tau)-$$

$$-\lambda_1\frac{\partial}{\partial n}K_{12}(M,N,t,\tau)\Big]ds_N=h(M,t), \qquad (21)$$

где

$$g(M,t)=-T_{01}^{-}(M,t)-a_{02}^{-}(M,t)-U_0(M,t)+T_{11}^{+}(M,t)+a_{12}^{+}(M,t)+U_1(M,t),$$

$$h(M,t)=-\lambda_0\frac{\partial}{\partial n}[T_{01}^{-}(M,t)+a_{02}^{-}(M,t)+U_0(M,t)]+\lambda_1\frac{\partial}{\partial n}[T_{11}^{+}(M,t)+a_{12}^{+}(M,t)+U_1(M,t)].$$

Правые части уравнений вследствии реализации условий сопряжения в особых точках (4) являются непрерывными функциями на S . Ядра интегральных уравнений (21) непрерывны в точках гладкости поверхности сопряжения S. Поэтому система интегральных уравнений (21) имеет характер интегральных уравнений Вольтерра по переменной t и характер уравнений Фредгольма по декартовым переменным [9], [10]. Такая система безусловно разрешима и имеет аналитическое решение, получаемое, например, методом последовательных приближений ([10], с. 485). $\square$

Литература

1. Лыков А.В. *Тепломассообмен.* – М.: Энергия, 1978. – 479 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1972. – 735 с.
3. Денисюк И.Т. *Задача сопряжения гармонических функций в трехмерных областях с негладкими границами* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 4. – С. 29–35.
4. Денисюк И.Т. *Динамические напряжения вблизи особенностей негладких включений* // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 2. – С. 83–86.
5. Положий Г.Н. *Уравнения математической физики.* – М.: Высш. школа, 1964. – 560 с.
6. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1971. – 512 с.
7. Гюнтер Н.М. *Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики.* – М.: Гостехиздат, 1953. – 446 с.
8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Дополнительные главы.* – М.: Наука, 1986. – 800 с.
9. Вольтерра В. *Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1982. – 304 с.
10. Смирнов В.И. *Курс высшей математики.* Т. 4. Ч. 2. – М.: Наука, 1981. – 550 с.

Луцкий государственный технический университет (Украина)

Поступила 02.10.2003