И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1999 МАТЕМАТИКА № 2 (441)

УДК 517.929

В.В. ВЛАСОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В предлагаемой статье изучается асимптотическое поведение сильных решений скалярных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. При этом рассматриваются критический и сверхкритический случаи, т. е. ситуации, когда имеются цепочки корней характеристического квазимногочлена, приближающиеся к мнимой оси или лежащие на ней. При рассмотрении указанных вопросов мы опираемся на попутно установленный результат о базисности Рисса специально построенной системы элементарных (экспоненциальных) решений упомянутых уравнений.

1. Определения, обозначения, формулировки результатов

В дальнейшем будут использоваться весовые пространства Соболева $W^m_{2,\gamma}(a,b)$ $(-\infty < a < b \leq +\infty)$ комплекснозначных функций с нормой

$$\|u\|_{W^m_{2,\gamma}}(a,b) \equiv \left(\int_a^b \exp(-2\gamma t)\left(\sum_{j=0}^m |u^{(j)}(t)|^2\right)dt\right)^{1/2}, \quad \gamma\in\mathbb{R}.$$

При $\gamma = 0$ полагаем $W^m_{2,0}(a,b) \equiv W^m_2(a,b)$.

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{kj} u^{(j)}(t-h_k) = 0, \quad t\in\mathbb{R}_+ = (0,+\infty), \tag{1}$$

m-го порядка, где a_{kj} — постоянные комплексные коэффициенты, числа h_j таковы, что $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_n < h$.

Для уравнения (1) поставим начальную задачу

$$\begin{gathered} u(t) = y(t),\ \ t\in(-h,0),\\ u^{(j)}(+0) = y^{(j)}(-0),\ \ j = 0,1,\dots,m-1, \end{gathered} \tag{2}$$

с начальной функцией $y(t) \in W^m_2(-h,0)$.

Определение. Функцию $u(t)$, принадлежащую пространству $W^m_{2,\gamma}(-h,+\infty)$ при некотором $\gamma \geq 0$, назовем сильным решением задачи (1), (2), если $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ и условию (2).

В дальнейшем нам понадобится следующий результат о разрешимости задачи (1), (2) в пространстве $W^m_{2,\gamma}(-h,+\infty)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 96-01-00333, № 96-05-96091) и гранта INTAS-93-0249-EXT.

Лемма 1. *Пусть $a_{0m} \neq 0$. Найдется такое $\gamma_0 \geq 0$, что при любом $\gamma \geq \gamma_0$ и произвольной функции $y(t) \in W_2^m(-h,0)$ существует единственное сильное решение задачи (1), (2), принадлежащее пространству $W_{2,\gamma}^m(-h,+\infty)$ и удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^m(-h,+\infty)} \leq c\|y\|_{W_2^m(-h,0)} \tag{3}$$

с постоянной c, не зависящей от $y(t)$.

Принимая во внимание лемму 1 и лемму 3 из [1], введем полугруппу U_t $(t \geq 0)$ ограниченных операторов, действующих в пространстве $W_2^m(-h,0)$ согласно правилу

$$(U_t y)(s) = u(t+s), \quad t \geq 0, \quad s \in (-h,0). \tag{4}$$

Здесь $u(t)$ — решение задачи (1), (2), отвечающее начальной функции $y(s)$.

На основании леммы 1 может быть получено

Предложение 1. *Семейство операторов U_t $(t \geq 0)$ образует C^0-полугруппу операторов, действующих в пространстве $W_2^m(-h,0)$.*

Перейдем к основной задаче, которая изучается в данной статье, а именно к получению более точной оценки решений по сравнению с (3).

Обозначим через λ_q нули характеристического квазимногочлена уравнения (1)

$$l(\lambda) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{kj}\lambda^j \exp(-\lambda h_k), \tag{5}$$

которые упорядочены в порядке возрастания модулей, через ν_q — их кратности, через Λ — множество нулей $l(\lambda)$. Числа с равными модулями нумеруются в порядке возрастания аргументов.

Введем систему элементарных решений уравнения (1)

$$y_{q,r}(t) = \exp(\lambda_q t)\left(\frac{t^r}{r\,!}x_{q_0} + \frac{t^{r-1}}{(r-1)\,!}x_{q1} + \cdots + x_{qr}\right), \quad x_{q,r} \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Для квазимногочлена вида (5) известно (напр., [2]) неравенство

$$N = \max_{\lambda_q \in \Lambda} \nu_q \leq m(n+1) + (n-1). \tag{7}$$

Приведем результат об оценке решения $u(t)$ задачи (1), (2), существенно уточняющий утверждение леммы 1.

Теорема 1. *Пусть $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$, а множество нулей Λ функции $l(\lambda)$ отделимо, т. е. $\inf \operatorname{dist}_{\lambda_p \neq \lambda_q}(\lambda_p, \lambda_q) > 0$. Тогда для любого сильного решения $u(t)$ задачи (1), (2) выполнено неравенство*

$$\|u(t+\cdot)\|_{W_2^m(-h,0)} \leq d(t^{N-1}+1)\exp(\varkappa t)\|y\|_{W_2^m(-h,0)}, \quad t \geq 0, \tag{8}$$

где $\varkappa = \sup_{\lambda_q \in \Lambda}(\operatorname{Re}\lambda_q)$, с постоянной d, не зависящей от функции $y(t)$.

При доказательстве теоремы 1 используем следующие утверждения, возможно представляющие самостоятельный интерес.

Обозначим через V_{λ_q} подпространство, являющееся линейной оболочкой системы элементарных решений $y_{q,r}(t)$, отвечающих λ_q, т. е. $V_{\lambda_q} = \operatorname{Span}\{y_{q,r}(t)\}_{r=0}^{\nu_q-1}$.

Замечание 1. Подпространства V_{λ_q} образуют корневые подпространства оператора сдвига U_t, отвечающие собственным значениям $\exp(\lambda_q t)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда система подпространств $\{V_{\lambda_q}\}_{\lambda_q \in \Lambda}$ образует базис Рисса из подпространств пространства $W_2^m(-h,0)$.*

Замечание 2. Согласно предложению 5° ([3], с. 414), выбирая ортонормированные базисы в подпространствах V_{λ_q}, получим базис Рисса пространства $W_2^m(-h,0)$.

Приведем также утверждение о базисности Рисса системы экспоненциальных решений, дополняющее и уточняющее теорему 2.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда система экспоненциальных решений уравнения* (1)

$$\{v_{q,k}(t) = (|\lambda_q|^m + 1)^{-1} t^k \exp(\lambda_q t),\ \lambda_q \in \Lambda,\ k = 0,1,\ldots,\nu_q - 1\}$$

образует базис Рисса пространства $W_2^m(-h,0)$.

Отметим, что теоремы 1–3 могут быть распространены на уравнения вида

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{kj} u^{(j)}(t-h_k) + \int_0^h K(s)u(t-s)ds = 0, \quad t > 0, \tag{1'}$$

где комплекснозначная функция $K(s) \in L_2(0,h)$.

Обозначим через $\widehat{K}(\lambda)$ преобразование Лапласа функции $K(s)$

$$\widehat{K}(\lambda) = \int_0^h \exp(-\lambda s)K(s)ds,$$

и пусть $l_1(\lambda) = l(\lambda) + \widehat{K}(\lambda)$. Сохраним обозначения λ_q, ν_q для нулей функции $l_1(\lambda)$ и их кратностей. Обозначим $\varkappa_1 = \sup\limits_{\lambda_q \in \Lambda_1} \operatorname{Re}\lambda_q$, где Λ_1 — множество нулей функции $l_1(\lambda)$.

Приведем аналоги теорем 1 и 3 для уравнения (1′).

Теорема 4. *Пусть* $a_{0m} \neq 0$ *и* $a_{nm} \neq 0$, *множество* Λ_1 *нулей функции* $l_1(\lambda)$ *отделимо и конечна величина* $N_1 = \sup\limits_{\lambda_q \in \Lambda_1} \nu_q$. *Тогда для любого сильного решения* $u(t)$ *задачи* (1′), (2) *выполнено неравенство*

$$\|u(t+\cdot)\|_{W_2^m(-h,0)} \le d_1(t^{N_1-1}+1)\exp(\varkappa_1 t)\|y\|_{W_2^m(-h,0)}, \quad t \ge 0, \tag{9}$$

с постоянной d_1, *не зависящей от* $y(t)$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 4. *Тогда система элементарных решений уравнения* (1′) $\{v_{q,k}(t) = (|\lambda_q|^m + 1)^{-1} t^k \exp(\lambda_q t),\ \lambda_q \in \Lambda_1,\ k = 0,1,\ldots,\nu_q - 1\}$ *образует базис Рисса пространства* $W_2^m(-h,0)$.

Следствие. При выполнении условий теоремы 4 совокупность подпространств $\{V_{\lambda_q}\}_{\lambda_q \in \Lambda_1}$, где $V_{\lambda_q} = \operatorname{Span}\{v_{q,k}(t),\ \lambda_q \in \Lambda_1,\ k = 0,1,\ldots,\nu_q - 1\}$, образует базис Рисса из подпространств пространства $W_2^m(-h,0)$.

2. Доказательства основных результатов

Лемма 1 является следствием леммы 3 из [1]. В самом деле, введем вектор-функцию $V(t)$ со значениями в $\mathbb{C}^m$ и компонентами $V_j(t) = u^{(j)}(t)$, $j = 0,1,\ldots,m-1$. Тогда уравнение (1) может быть сведено к системе дифференциально-разностных уравнений вида

$$\sum_{k=0}^{n}\left(D_k \frac{dV}{dt}(t-h_k) + B_k V(t-h_k)\right) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{10}$$

коэффициенты которой в соответствии с ([4], с. 212) выражаются через коэффициенты исходного уравнения (1), причем коэффициент

$$D_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & a_{0m} \end{pmatrix}$$

является невырожденной матрицей, поскольку $a_{0m} \neq 0$. Учитывая сделанную замену, заметим, что начальной функции $y(t)$ будет соответствовать вектор-функция $Y(t)$ с компонентами $Y_j(t) = y^{(j)}(t) \in W_2^1(-h, 0)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$.

Используя лемму 3 из [1], найдем такое γ_0, что при всех $\gamma \geq \gamma_0$ система (10) с начальным условием

$$V(t) = Y(t), \quad t \in [-h, 0], \tag{11}$$

однозначно разрешима в пространстве $W_{2,\gamma}^1(-h, +\infty)$.

Возвращаясь от задачи вида (10), (11) к задаче (1), (2), получим утверждение леммы 1.

Доказательство предложения 1 вытекает из предложения 1 в [1], если учесть редукцию уравнения (1) к системе (10), и проводится аналогично соответствующим утверждениям из [5], [6].

Вначале докажем теоремы 2, 3. Доказательство теорем 2, 3 существенно опирается на лемму 2, для формулировки которой понадобится следующее построение.

Рассмотрим два возможных случая.

(C1) Найдутся такие $\nu_{q_1}, \nu_{q_2}, \dots, \nu_{q_r}$, что

$$m = \nu_{q_1} + \nu_{q_2} + \dots + \nu_{q_r}.$$

(C2) При любом выборе корней $\lambda_q \in \Lambda$ сумма их кратностей не равна m.

В случае (C2) найдется корень λ_{q_r} кратности ν_{q_r} такой, что $\nu_{q_1} + \nu_{q_2} + \dots + \nu_{q_{r-1}} < m < \nu_{q_1} + \nu_{q_1} + \dots + \nu_{q_r}$.

По нулям $\lambda_{q_1}, \lambda_{q_2}, \dots, \lambda_{q_r}$ построим многочлен

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_{q_1})^{\nu_{q_1}} (\lambda - \lambda_{q_2})^{\nu_{q_2}} \cdots (\lambda - \lambda_{q_{r-1}})^{\nu_{q_{r-1}}} (\lambda - \lambda_{q_r})^{\mu_r},$$

где $\mu_r = m - \nu_{q_1} - \nu_{q_2} - \dots - \nu_{q_{r-1}}$ в случае (C2) и $\mu_r = \nu_{q_r}$ в случае (C1).

Введем в рассмотрение систему функций

$$w_{q,k}(t) = \begin{cases} \dfrac{t^k}{k\,!} \exp(\lambda_q t) \dfrac{1}{p(\lambda_q)}, & q \neq q_j, \;\; j = 1, 2, \dots, r; \;\; k = 0, 1, \dots, \nu_{q-1}; \\ \dfrac{t^k}{k\,!} \exp(\lambda_{q_j} t), & j = 1, 2, \dots, r, \end{cases} \tag{12}$$

которая понадобится в дальнейшем.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда система экспоненциальных решений* $z_{q,k}(t)$ *уравнения* (1), *определенная следующим образом*:

1) *в случае* (C1)

$$z_{q,k}(t) = \frac{t^k}{k\,!} \exp(\lambda_q t), \quad \lambda_q \in \Lambda, \quad k = 0, 1, \dots, \nu_q - 1, \quad q \neq q_1, \dots, q_r;$$

2) *в случае* (C2)

$$z_{q,k}(t) = \frac{t^k}{k\,!}\exp(\lambda_q t), \quad \lambda_q \in \Lambda, \quad k = 0, 1, \ldots, \nu_q - 1, \quad q \neq q_1, \ldots, q_{r-1},$$

и

$$z_{q,k}(t) = \frac{t^k}{k\,!}\exp(\lambda_{q_r} t), \quad k = 0, 1, \ldots, \mu_r,$$

образует базис Рисса пространства $L_2(-h, 0)$.

Доказательство. По квазимногочлену $l(\lambda)$ и многочлену $p(\lambda)$ образуем функцию

$$m(\lambda) = \exp(\lambda h/2) l(\lambda)/p(\lambda). \tag{13}$$

От переменной λ перейдем к переменной $z = i\lambda$ и положим $L(z) = m(iz)$. Используем следствие из теоремы 1.2.1 ([7], с. 64). Приведем его формулировку в удобной для нас форме. Пусть $L(z)$ — целая функция экспоненциального типа, $\{\mu_n\}$ — ее нули кратности ν_n, занумерованные в порядке возрастания модулей, $h_L(\varphi)$ — ее индикатор.

Воспользуемся следствием теоремы 1.2.1 [7]: пусть выполнены условия

(A1) $h_L(\varphi) = \frac{h}{2}|\sin\varphi|$,
(A2) $\sup\limits_{\mu_n} |\operatorname{Im}\mu_n| \le M < +\infty$,
(A3) $\inf\limits_{\mu_m \neq \mu_n} |\mu_m - \mu_n| > 0$,
(A4) $\sup\limits_{\mu_m} \nu_m < +\infty$,

и пусть, кроме того, найдется такое $y_0 > 0$, что

(A5) $|L(x - iy_0)| \asymp x^{\alpha_0}$, $x \to \pm\infty$,

где постоянная $\alpha_0 \in (-1/2,\ 1/2)$.

Тогда система функций $e(\Lambda) = \Big\{ \exp(i\mu_n t), \ldots, \dfrac{t^{\nu_n - 1}}{(\nu_n - 1)\,!}\exp(i\mu_n t) \Big\}$ образует базис Рисса пространства $L_2(-h/2,\ h/2)$.

Убедимся, что функция $L(z) = m(iz)$, определенная соотношением (13), удовлетворяет сформулированным условиям (A1)–(A5). Для проверки условия (A1) перейдем к полярным координатам $z = re^{i\varphi}$.

Для $\varphi \in [0, \pi]$ имеем

$$|L(re^{i\varphi})| = e^{(r\sin\varphi)h/2}|a_{nm}| \Big| 1 + \sum_{j=0}^{m} {\sum_{k=0}^{n}}' r^{j-m}\frac{a_{kj}}{a_{nm}} e^{ire^{i\varphi}(h-h_k)} \Big| \Big/ |(1 + O(1/r))|, \tag{14}$$

а при $\varphi \in (\pi, 2\pi)$

$$|L(re^{i\varphi})| = e^{-(r\sin\varphi)h/2}|a_{0m}| \Big| 1 + \sum_{j=0}^{m} {\sum_{k=0}^{n}}' r^{j-m}\frac{a_{kj}}{a_{0m}} e^{-ire^{i\varphi}h_k} \Big| \Big/ |(1 + O(1/r))|, \quad r \to +\infty. \tag{15}$$

Штрихи в суммах (14), (15) означают, что в них отсутствуют слагаемые, отвечающие коэффициентам a_{nm} и a_{0m} соответственно. Из соотношений (14), (15) получим

$$h_L(\varphi) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln|L(re^{i\varphi})|}{r} = \frac{h}{2}|\sin\varphi|.$$

Для доказательства условия (A2) заметим, что в переменных $\lambda = iz$ для квазимногочлена $l(\lambda)$ справедливы соотношения

$$\frac{1}{a_{0m}\lambda^m} l(\lambda) = 1 + \sum_{j=0}^{m} \sideset{}{'}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{kj}}{a_{0m}} \lambda^{j-m} e^{-\lambda h_k}, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0, \tag{16}$$

$$\frac{e^{\lambda h}}{a_{nm}\lambda^m} l(\lambda) = 1 + \sum_{j=0}^{m} \sideset{}{'}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{kj}}{a_{nm}} \lambda^{j} e^{\lambda(h-h_k)}, \quad \operatorname{Re}\lambda < 0. \tag{17}$$

Из соотношений (16), (17) вытекает, что найдутся такие постоянные $\alpha < 0$ и $\beta > 0$, что функция $l^{-1}(\lambda)$ голоморфна в полуплоскостях $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < \alpha\}$ и $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \beta\}$, причем имеют место эквивалентности

$$\begin{aligned} &l(\lambda) \asymp a_{0m}\lambda^m \quad (\operatorname{Re}\lambda \to +\infty), \\ &l(\lambda) \asymp a_{nm}\lambda^m \exp(-\lambda h) \quad (\operatorname{Re}\lambda \to -\infty). \end{aligned} \tag{18}$$

Значит, нули функции $l(\lambda)$ лежат в полосе $\{\lambda : \alpha < \operatorname{Re}\lambda < \beta\}$.

Переходя к переменным $z = -i\lambda$, получаем, что условие (A2) выполнено. Условие (A3) выполнено в силу условий теоремы 1. Известно (напр., [2]), что для квазимногочленов условие (A4) также выполняется, причем справедливо неравенство (7).

Заметим теперь, что условие (A5) вытекает из следующей цепочки равенств (при достаточно больших $y_0 > 0$):

$$\begin{aligned} |L(x - iy_0)| &= \left| e^{-i\frac{h}{2}(x-iy_0)} \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{kj}(x-iy_0)^j e^{-i(x-iy_0)h_k} \right| |p(i(x-iy_0))|^{-1} = \\ &= e^{\frac{3h}{2}y_0} |a_{nm}|\, |x - iy_0|^m \left| 1 + \sum_{j=0}^{m} \sideset{}{'}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{kj}}{a_{nm}} (x-iy_0)^{j-m} e^{y_0(h_k-h)} \right| c|x-iy_0|^{-m} \left| \left(1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)^{-1} \right| = \\ &= c\, e^{\frac{3hy_0}{2}} |a_{nm}| \left| \left(1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \right|, \quad x \to \pm\infty, \quad c = \mathrm{const} \neq 0, \quad y_0 > \mathrm{const}_1 \gg 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Таким образом, система $\{z_{q,k}(t)\}$ образует базис Рисса пространства $L_2(-h/2,\, h/2)$.

Проверим, что из базисности системы $\{z_{q,k}(t)\}$ в $L_2(-h/2,\, h/2)$ вытекает базисность данной системы в пространстве $L_2(-h, 0)$. Переход от пространства $L_2(-h/2,\, h/2)$ к пространству $L_2(-h, 0)$ осуществляется с помощью оператора сдвига $U_{-h/2}$

$$(U_{-h/2}v)(t) = v(t - h/2), \quad t \in [-h/2,\, h/2].$$

Нетрудно проверить, что в каждом из корневых подпространств V_{λ_q} матрица оператора сдвига $U_{-h/2}$ будет иметь вид

$$\exp\left(-\frac{\lambda_q h}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & -h/2 & \dots & \gamma_{\nu_q-1} \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -h/2 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_{\nu_q-1} = \frac{(-1)^{\nu_q-1} h^{\nu_q-1}}{(\nu_q-1)!\, 2^{\nu_q-1}}. \tag{20}$$

Принимая во внимание, что подпространства $V_{\lambda_q} = \operatorname{Span}\Big\{ \exp(\lambda_q t),\, t\exp(\lambda_q t), \dots, \dfrac{t^{\nu_q-1}}{(\nu_q-1)!} \times$ $\times \exp(\lambda_q t) \Big\}$ образуют базис Рисса из подпространств пространства $L_2(-h/2,\, h/2)$ и что оператор сдвига является ограниченным и ограниченно обратимым оператором в пространстве $L_2(-h/2,\, h/2)$, получим результат о базисности Рисса системы $\{z_{q,r}(t)\}$ в пространстве $L_2(-h, 0)$. Ограниченность оператора сдвига и его обратного вытекает из следствия к теореме о базисах

Рисса ([8], с. 182–184) в силу того, что подпространства V_{λ_q} образуют базис Рисса из подпространств пространства $L_2(-h/2,\, h/2)$, оператор сдвига $U_{-h/2}$ имеет блочную структуру и каждый из блоков имеет вид (20) в базисе $\{z_{q,r}(t)\}$, $r = 0, 1, \ldots, \nu_q - 1$. $\square$

Доказательство теоремы 1 опирается на теорему 3.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1 из [9] и вытекает из леммы 2 и результатов п. 4 [9] (см. также [10]).

Для доказательства теоремы 3 вначале устанавливается, что система элементарных решений, указанная в п. 4 [9], может быть переведена в систему $\{w_{q,k}(t)\}$, определяемую соотношением (12), с помощью ограниченного и ограниченно обратимого оператора. Этот оператор имеет блочную структуру. Каждый из блоков отвечает корню λ_q; соответствующие подпространства V_{λ_q} являются его инвариантными подпространствами, и сужение этого оператора на каждое из подпространств V_{λ_q} определяется невырожденной нижнетреугольной матрицей в базисе из элементарных решений, указанных в п. 4 [9].

В свою очередь, утверждение теоремы 3 вытекает из базисности системы $\{w_{q,k}(t)\}$, ибо найдутся положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что

$$0 < c_1 \le |p(\lambda_q)|(|\lambda_q|^m + 1)^{-1} \le c_2 < +\infty, \quad \lambda_q \in \Lambda.$$

Доказательство теоремы 1. Согласно теореме 3 система функций $\{v_{q,k}(s)\}$ образует базис Рисса пространства $W_2^m(-h, 0)$. Следовательно, по определению базисов Рисса существует ортогонализатор, т. е. ограниченный и ограниченно обратимый оператор Q, превращающий систему $\{v_{q,k}(s)\}$ в ортонормированный базис $\{Qv_{q,k}\}$ пространства $W_2^m(-h, 0)$.

Разложим начальную функцию $y(s)$ по базису $\{v_{q,k}(s)\}$

$$y(s) = \sum_{\lambda_q \in \Lambda} \sum_{k=0}^{\nu_q - 1} c_{q,k} v_{q,k}(s), \quad s \in (-h, 0),$$

подействуем на $y(s)$ полугрупповым оператором U_t и получим

$$(U_t y)(s) = u(t+s) = \sum_{\lambda_q \in \Lambda} e^{\lambda_q t} \Bigg[\Bigg(\sum_{k=0}^{\nu_q - 1} c_{q,k} \frac{t^k}{k\,!} \Bigg) v_{q,0}(s) + \cdots + \\ + \Bigg(\sum_{k=p}^{\nu_q - 1} c_{q,k} \frac{t^{k-p}}{(k-p)\,!} \Bigg) v_{q,p}(s) + \cdots + c_{q,\nu_q - 1} v_{q,\nu_q - 1}(s) \Bigg].$$

Здесь $u(t)$ — сильное решение задачи (1), (2), отвечающее начальной функции $y(s)$.

Отсюда, используя то, что система $\{Qv_{q,k}\}$ — ортонормированный базис пространства $W_2^m(-h, 0)$, а также неравенство Коши–Буняковского, получаем цепочку неравенств

$$\|u(t+\cdot)\|^2_{W_2^m(-h,0)} \le \exp(2 \sup \operatorname{Re} \lambda_q t) \|Q^{-1}\|^2 \Bigg[\sum_{\lambda_q \in \Lambda} \Bigg(\sum_{p=0}^{\nu_q - 1} \Bigg| \sum_{k=p}^{\nu_q - 1} c_{q,k} \frac{t^{k-p}}{(k-p)\,!} \Bigg|^2 \Bigg) \Bigg] \le \\ \le \exp(2\varkappa t) \|Q^{-1}\|^2 \Bigg[\sum_{\lambda_q \in \Lambda} \Bigg(\sum_{p=0}^{\nu_q - 1} \Bigg[\Bigg(\sum_{k=p}^{\nu_q - 1} |c_{q,k}|^2 \Bigg)^{1/2} \Bigg(\sum_{k=p}^{\nu_q - 1} \Bigg| \frac{t^{k-p}}{(k-p)\,!} \Bigg|^2 \Bigg)^{1/2} \Bigg]^2 \Bigg) \Bigg] \le \\ \le \exp(2\varkappa t) N^2 \|Q^{-1}\|^2 \Bigg(\sum_{\lambda_q \in \Lambda} \Bigg[\sum_{k=0}^{\nu_q - 1} |c_{q,k}|^2 \Bigg] \Bigg[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{t^{2k}}{(k\,!)^2} \Bigg] \Bigg) \le \exp(2\varkappa t) N^2 \|Q^{-1}\|^2 \, \|Q\|^2 \alpha(t) \|y\|^2_{W_2^m(-h,0)},$$

где $\alpha(t) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} \frac{t^{2k}}{(k\,!)^2}$, $N = \max\limits_{\lambda_q \in \Lambda} \nu_q$.

Из неравенств

$$|\alpha(t)| \le \theta_0 \max(1, t^{2(N-1)}) \le \theta_0(1 + t^{2(n-1)}), \quad \theta_0 = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(k\,!)^2} \le e$$

получаем искомую оценку (8) с постоянной $d = N\|Q\|\,\|Q^{-1}\|\sqrt{\theta_0}$. □

Замечание 3. Величину $r_0 = \|Q\|\,\|Q^{-1}\|$ называют константой Рисса, а также константой обусловленности. Она в определенном смысле характеризует меру отклонения изучаемого базиса от ортонормированного. Для ортонормированного базиса $r_0 = 1$.

Для доказательства теорем 4, 5 достаточно убедиться в том, что в рассматриваемой ситуации для элементарных решений $z_{q,r}(t)$ уравнения $(1')$, определяемых условиями леммы 2, справедливо утверждение леммы 2, т. е. что они образуют базис Рисса пространства $L_2(-h, 0)$.

В самом деле, дальнейшие этапы доказательства дословно совпадают с приведенными при доказательстве теорем 1–3, поскольку при доказательстве теорем 2, 3 используется лишь то, что $\{z_{q,r}(t)\}$ образуют базис Рисса в $L_2(-h, 0)$, а в теореме 1 — что $\{v_{q,r}(t)\}$ образуют базис Рисса в пространстве $W_2^m(-h, 0)$, и не используется конкретный вид функции, по нулям λ_q которой построены элементарные решения $z_{q,r}(t)$ и $v_{q,r}(t)$.

Принимая во внимание это обстоятельство, можно было бы сформулировать некоторые утверждения, аналогичные теоремам 1, 4 для уравнений, существенно более общих, нежели $(1')$, априорно предположив, что базисность Рисса элементарных решений имеет место. Однако мы не будем стремиться к такого рода обобщениям.

В свою очередь, доказательство аналога леммы 2 сводится к проверке соотношений (A1), (A2), (A5) для функции $L_1(z) = m_1(iz) = l_1(iz)\exp(izh/2)/p(iz)$. Условия (A3), (A4) выполнены по условию теоремы 4.

Учитывая оценку

$$\left|\exp\left(\frac{\lambda h}{2}\right)\widehat{K}(\lambda)\right| \le \left[\frac{\operatorname{sh}(\operatorname{Re}\lambda h)}{\operatorname{Re}\lambda}\right]^{1/2} \|K(s)\|_{L_2(0,h)},$$

легко усмотреть, что справедливы соотношения (14)–(19) (с заменой $l(\lambda)$ и $L(z)$ на $l_1(\lambda)$ и $L_1(z)$) и тем самым выполнены условия (A1), (A2), а также (A5) с постоянной $\alpha_0 = 1$.

3. Некоторые замечание и комментарии

Как известно (напр., [11], [12]), критический случай, т. е. ситуации, в которых корни λ_q квазимногочлена $l(\lambda)$ приближаются к мнимой оси (подробнее см. [11], с. 78), реализуется, когда найдется $m_0 \ne 0$ такое, что $|a_{0\,m}| = |a_{m_0 m}|$.

Заметим, что оценка (8) справедлива и для известного примера из [12], т. е. при $m = n = 1$, $h = 1$, $a_{01} = 1$, $a_{11} = -1$, $a_{00} = a_{10} = a > 0$, относящегося к сверхкритическому случаю, когда корни соответствующего квазимногочлена лежат на мнимой оси. Более того, для указанного в [12] примера корни квазимногочлена $l(\lambda)$ являются простыми, и элементарные решения $y_q(t)$ попарно ортогональны в скалярном произведении, порождаемом нормой

$$\|u\|^*_{W_2^1} \equiv \left(\left(\int_{-1}^{0}(|u^{(1)}(t)|^2 + a^2|u(t)|)dt\right) + a(|u(-1)|^2 + |u(0)|^2)\right)^{1/2}.$$

Замечание 4. Оценка, сходная с (8), (9), для которой величина $\varkappa$ заменяется на $\varkappa + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), давно и хорошо известна (напр., [4], [6]). В этой связи и в связи с рассмотрением критического и сверхкритического случаев возникла задача о получении более точных оценок решений уравнений нейтрального типа и, в частности, вопрос о том, можно ли уточнить ранее известную оценку и положить $\varepsilon = 0$?

Теоремы 1, 4 дают в определенном смысле утвердительный ответ на этот вопрос.

Отметим, что асимптотическое поведение решений уравнений (1), (1′) изучалось многими авторами. Ограничимся здесь указанием монографий [4], [6], а также статьи [5]. Отличительной чертой нашего подхода является то, что получение оценок (8), (9) решения базируется на анализе геометрических свойств системы элементарных решений уравнений (1), (1′). Так, оценки (8), (9) получены на основе базисности Рисса системы экспоненциальных решений $\{v_{q,k}(s)\}$ в пространстве $W_2^m(-h,0)$.

Результаты о базисности Рисса системы элементарных решений для систем дифференциально-разностных уравнений и оценки их решений, близкие к (8), (9), установлены в [1], [16]–[18]. При ином понимании решений базисность элементарных решений в пространстве $L_2(-h,0)$ рассматривалась в [19], а при дополнительных ограничениях сходные вопросы рассматривались в [20].

Здесь уместно сделать

Замечание 5. Условие $a_{nm} \neq 0$ существенно для базисности Рисса системы экспоненциальных решений. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что система экспоненциальных решений уравнения, имеющего квазимногочлен

$$l_0(\lambda) = \lambda + a + b\,\exp(-\lambda h), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad h > 0,$$

не является равномерно минимальной в пространствах $W_2^l[-h,0]$, $l = 0, 1, \ldots$ При этом используется хорошо известная ([2], [4]) асимптотика нулей $l_0(\lambda)$.

Заметим в заключение, что полнота системы элементарных решений рассматривалась рядом авторов. Ограничимся здесь указанием работ [13]–[15] (см. также библиографию к ним).

Литература

1. Власов В.В. *Корректная разрешимость одного класса дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в гильбертовом пространстве* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 1. – С. 22–35.
2. Зверкин А.М. *Разложение в ряд решений линейных дифференциально-разностных уравнений.* Ч. I. *Квазиполиномы* // Тр. семин. по теории дифференц. уравнений с отклоняющ. аргументом. – М., 1965. – Т. 3. – С. 3–37.
3. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* – М.: Наука, 1965. – 448 с.
4. Беллман Р., Кук К.Л. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Мир, 1967. – 548 с.
5. Henry D. *Linear autonomous neutral functional differential equations* // J. Different. Equat. – 1974. – V. 15. – № 1. – P. 106–128.
6. Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 421 с.
7. Седлецкий А.М. *Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси* // УМН. – 1982. – Т. 37. – Вып. 5. – С. 51–95.
8. Никольский Н.К. *Лекции об операторе сдвига.* – М.: Наука, 1980. – 384 с.
9. Russel D. *On exponential bases for the Sobolev spaces over an interval* // J. Math. Anal. and Appl. – 1982. – V. 87. – № 2. – P. 528–550.
10. Авдонин С.А., Иванов С.А. *Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент.* – Киев, 1989. –242 с.
11. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1971. – 296 с.
12. Громова П.С., Зверкин А.М. *О тригонометрических рядах, суммой которых является непрерывная неограниченная функция на вещественной оси — решение уравнения с отклоняющимся аргументом* // Дифференц. уравнения. – 1968. – Т. 4. – № 10. – С. 1774–1784.

13. Delfour M.C., Manitius A. *The structural operator F and its role in the theory of retarded systems.* Part I // J. Math. Anal. and Appl. – 1980. – V. 73. – P. 466–490.
14. Delfour M.C., Manitius A. *The structural operator F and its role in the theory of retarded systems.* Part II // J. Math. Anal. and Appl. – 1980. – V. 74. – P. 359–381.
15. Lunel S.V. *Series expansions and small solutions for Volterra equations of convolution type* // J. Different. Equat. – 1990. – V. 85. – № 1. – P. 17–53.
16. Власов В.В. *Корректная разрешимость одного класса функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве* // Докл. РАН. – 1995. – Т. 345. – № 6. – С. 733–736.
17. Власов В.В. *Некоторые свойства системы элементарных решений дифференциально-разностных уравнений* // УМН. – 1996. – Т. 51. – Вып. 1. – С. 143–144.
18. Власов В.В. *Об асимптотическом поведении решений одного класса функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве* // УМН. – Т. 51. – Вып. 5. – С. 220–221.
19. Lunel S.V., Yakubovich D.V. *A functional model approach to linear neutral functional differential equations* // Integral Equat. and Oper. Theory. – 1997. – V. 27. – P. 347–378.
20. Биркган С.Е. *Экспоненциальная дихотомия и базисность систем элементарных решений линейных автономных уравнений нейтрального типа* // Сиб. матем. журнал. – 1986. – Т. 27. – № 6. – С. 25–27.

Московский физико-технический институт

Поступила
03.03.1998