Известия вузов. Математика
2017, № 7, с. 84–93
http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Ф.Г. ХУШТОВА

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ И ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. Исследуется вторая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана-Лиувилля. В терминах интегрального преобразования с функцией Райта в ядре найдено представление решения в случае нулевого граничного условия. Единственность решения доказана в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия Тихонова.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с частными производными, уравнение параболического типа, оператор Бесселя, модифицированная функция Бесселя, производная дробного порядка, оператор Римана–Лиувилля, функция Фокса, функция Райта, интегральное преобразование с функцией Райта в ядре, единственность решения, условие Тихонова.

УДК: 517.95

Введение

Пусть D_{ay}^{γ} — оператор интегродифференцирования в смысле Римана–Лиувилля дробного порядка γ с началом в точке a и концом в точке y, который определяется следующим образом ([1], с. 28; [2], с. 14):

$$D_{ay}^{\gamma} g(y) = \frac{\operatorname{sign}(y-a)}{\Gamma(-\gamma)} \int_a^y \frac{g(t)}{|y-t|^{\gamma+1}} dt, \quad \gamma < 0;$$

$$D_{ay}^{\gamma} g(y) = g(y), \quad \gamma = 0;$$

$$D_{ay}^{\gamma} g(y) = \operatorname{sign}^n(y-a) \frac{d^n}{dy^n} D_{ay}^{\gamma-n} g(y), \quad n-1 < \gamma \leqslant n, \quad n \in \mathbb{N},$$

здесь $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

В области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < \infty, \, 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$\mathbf{L}u(x,y) \equiv B_x u(x,y) - D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = 0, \tag{1}$$

где $B_x = x^{-b} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^b \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{b}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ — оператор Бесселя, $b, \alpha = \text{const}$.

Уравнение (1) при $\alpha = 1$ обращается в уравнение

$$u_{xx}(x,y) + \frac{b}{x} u_x(x,y) - u_y(x,y) = 0,$$

которое при $x > 0$, $|b| < 1$ было объектом исследования работы [3]. Последнее уравнение с помощью замены $\xi = [x/(1-b)]^{1-b}$ сводится к уравнению

$$\xi^q u_{\xi\xi}(\xi, y) - u_y(\xi, y) = 0, \quad q = 2b/(b-1),$$

Поступила 02.03.2016

которое при $\xi > 0$ было исследовано в [4], [5], а при $q = 1$ — в [6].

Уравнение (1) при $b = 0$, $0 < \alpha < 2$ совпадает с диффузионно-волновым уравнением, исследованным в работах многих авторов. Например, в [2] методом функции Грина построены решения первой, второй и смешанной краевых задач в прямоугольной области. В [7], [8] в терминах функции Райта построено фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения с оператором Римана–Лиувилля, в [9] построено фундаментальное решение многомерного диффузионно-волнового уравнения с оператором Джрбашяна–Нерсесяна. В работе [10] в терминах функции типа Райта найдено представление решения первой краевой задачи в полубесконечной области.

Уравнение вида (1)

$$D_{0t}^{2/d_w} P(r,t) = \frac{1}{r^{d_s-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d_s-1} \frac{\partial P(r,t)}{\partial r}\right),$$

где d_w и d_s характеризуют фрактальную размерность среды, $P(r,t)$ — плотность пространственного распределения частиц в момент времени t, было предложено в работе R. Metzler, W.G. Glöckle, T.F. Nonnenmacher [11] для описания процессов переноса в средах, имеющих фрактальную размерность. Интерес к изучению уравнения (1) также вызван его приложениями при решении задач физики, астрономии и других прикладных наук [12]–[14].

1. Постановка задачи

Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$. *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω будем называть функцию $u = u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω, и такую, что $y^{1-\alpha}u \in C(\overline{\Omega})$, $u_x, u_{xx}, D_{0y}^{\alpha}u \in C(\Omega)$, $\overline{\Omega}$ — замыкание области Ω.

Задача. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x,y) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 0} x^b u_x(x,y) = 0, \quad 0 < y < T, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция.

Первая краевая задача в полуполосе для уравнения (1) в случае, когда вместо условия (3) задается условие

$$u(0,y) = 0, \quad 0 < y < T,$$

а условие (2) остается неизменным, исследована в работе [15].

2. Вспомогательные сведения

Приведем здесь некоторые сведения из теории специальных функций и теории интегральных преобразований, которые понадобятся далее.

Функция

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n}$$

называется *модифицированной цилиндрической или бесселевой функцией первого рода порядка* ν (например, [16], [17]).

Для функции $I_\nu(z)$ имеют место формулы

$$\frac{d}{dz}[z^\nu I_\nu(z)] = z^\nu I_{\nu-1}(z), \tag{4}$$

$$\frac{d}{dz}[z^{-\nu}I_\nu(z)] = z^{-\nu}I_{\nu+1}(z), \tag{5}$$

$$zI'_\nu(z) - \nu I_\nu(z) = zI_{\nu+1}(z). \tag{6}$$

При $|z| \to 0$ функция $I_\nu(z)$ имеет следующее поведение:

$$I_\nu(z) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu. \tag{7}$$

При $|z| \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\big[1 + O(z^{-1})\big], \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Функция $I_\nu(z)$ порядка $\nu = -1/2$ выражается через элементарные функции

$$I_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{\sqrt{2\pi z}}. \tag{9}$$

Функция

$$\phi(\rho,\delta;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(\rho n+\delta)}, \quad \rho > -1,$$

называется *функцией Райта* (например, [18]).

При $\rho = -1/2$ и $\delta = 1/2$ функция $\phi(\rho,\delta;z)$ выражается через экспоненциальную функцию по формуле

$$\sqrt{\pi}\phi\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};-z\right) = e^{-\frac{z^2}{4}}. \tag{10}$$

В ([2], с. 72) определено интегральное преобразование для функции $v(y)$, заданной на положительной полуоси

$$A^{\alpha,\mu}v(y) = \int_0^\infty v(t)y^{\mu-1}\phi(-\alpha,\mu;-ty^{-\alpha})dt, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{11}$$

В случае, когда $\mu = 0$, введено обозначение $A^{\alpha,0}v(y) = A^\alpha v(y)$. Если преобразование $A^{\alpha,\mu}$ применяется к функции, зависящей от нескольких переменных, то в случае необходимости с помощью нижнего индекса обозначается переменная, по которой проводится преобразование. Например, $A_y^{\alpha,\mu}v(x,y)$.

Интеграл (11) будет сходиться, если функция $v(y)$ интегрируема на любом конечном отрезке положительной полуоси и выполняются асимптотические неравенства

$$|v(y)| < cy^\lambda, \quad \lambda > -1, \quad \mu \neq 0; \quad \lambda > -2, \quad \mu = 0, \quad y \to 0,$$

$$|v(y)| < c\exp\big(ky^\lambda\big), \quad \lambda < 1/(1-\alpha), \quad y \to \infty,$$

где c и k — положительные постоянные.

Приведем некоторые свойства преобразования $A^{\alpha,\mu}$ ([2], с. 78–83).

1°. Пусть $v(y)$ непрерывна в точке $y = 0$ и дифференцируема при $y > 0$. Тогда

$$D_{0y}^\alpha A^{\alpha,\mu}v(y) = A^{\alpha,\mu}v'(y) + \frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}v(0).$$

В частности, справедлива формула

$$D_{0y}^\alpha A^\alpha v(y) = A^\alpha v'(y). \tag{12}$$

2°. Пусть $0 \leqslant \mu \leqslant \alpha$ и $\lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{-\mu/\alpha} v(y) = v_0 < \infty$. Тогда

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1} A^{\alpha,\mu} v(y) = v_0. \tag{13}$$

3°. Если $u(y) \leqslant v(y)$ и $\mu \geqslant 0$, то

$$A^{\alpha,\mu} u(y) \leqslant A^{\alpha,\mu} v(y). \tag{14}$$

Для степенной функции и функции Райта справедливы формулы ([2], сс. 74, 84)

$$A^{\alpha,\mu} y^{\delta-1} = y^{\alpha\delta+\mu-1} \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha\delta+\mu)}, \quad \delta > 0, \quad \mu \neq 0; \quad \delta > -1, \quad \delta \neq 0, \quad \mu = 0, \tag{15}$$

$$A^{\alpha,\mu} y^{\delta-1} \phi(\rho, \delta; -cy^\rho) = y^{\alpha\delta+\mu-1} \phi(\alpha\rho, \alpha\delta+\mu; -cy^{\alpha\rho}), \quad \delta > \rho, \tag{16}$$

где c — положительная постоянная.

Докажем формулу

$$A^{\alpha,\mu} y^{\delta-1} e^{-\frac{c^2}{4y}} = y^{\alpha\delta+\mu-1} H_{1,2}^{2,0} \left[\frac{c^2}{4y^\alpha} \,\middle|\, \begin{matrix} (\alpha\delta+\mu, \alpha) \\ (0,1), (\delta,1) \end{matrix} \right], \tag{17}$$

где $H_{p,q}^{m,n}(z)$ — H-функция Фокса (см. [19]–[21]), $\delta \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Действительно, согласно определению (11), вычислим интеграл

$$A^{\alpha,\mu} y^{\delta-1} e^{-\frac{c^2}{4y}} = y^{\mu-1} \int_0^\infty t^{\delta-1} e^{-\frac{c^2}{4t}} \phi(-\alpha, \mu; -ty^{-\alpha}) dt.$$

Сделав замену $\tau = ty^{-\alpha}$ в интеграле, перепишем последнее равенство в виде

$$A^{\alpha,\mu} y^{\delta-1} e^{-\frac{c^2}{4y}} = y^{\alpha\delta+\mu-1} \int_0^\infty \tau^{\delta-1} e^{-\frac{c^2}{4y^\alpha \tau}} \phi(-\alpha, \mu; -\tau) d\tau. \tag{18}$$

Интеграл

$$J = \int_0^\infty \tau^{\delta-1} e^{-\frac{c^2}{4y^\alpha \tau}} \phi(-\alpha, \mu; -\tau) d\tau \tag{19}$$

вычислим, воспользовавшись методом, изложенным в ([22], с. 9). Положив

$$\mathcal{K}_1(\tau) = e^{-\tau}, \quad \mathcal{K}_2(\tau) = \tau^\delta \phi(-\alpha, \mu; -\tau), \quad x = \frac{c^2}{4y^\alpha},$$

преобразуем интеграл (19) к виду

$$J = \int_0^\infty \mathcal{K}_1\left(\frac{x}{\tau}\right) \mathcal{K}_2(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad x > 0.$$

Из строки 3.1 (1) ([22], § 10, с. 136) базовой таблицы найдем преобразование Меллина первой функции

$$\mathcal{K}_1^*(s) = \Gamma(s), \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Преобразование Меллина функции Райта можно найти из формулы (15), положив в ней $\delta = s$,

$$\int_0^\infty \tau^{s-1} \phi(-\alpha, \mu; -\tau) d\tau = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\mu+\alpha s)}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Тогда образ второй функции $\mathcal{K}_2(\tau)$ можно найти, если к подинтегральной функции в последнем равенстве добавить множитель τ^δ, а в правой части заменить s на $s+\delta$, т. е.

$$\mathcal{K}_2^*(s) = \frac{\Gamma(\delta+s)}{\Gamma(\mu+\alpha\delta+\alpha s)}, \quad \operatorname{Re} s > -\delta.$$

Перемножив образы $\mathcal{K}_i^*(s)$, $i=1,2$, придем к значению

$$\mathcal{K}^*(s)=\frac{\Gamma(s)\Gamma(\delta+s)}{\Gamma(\mu+\alpha\delta+\alpha s)},\quad \operatorname{Re}s>-\min\{\delta,0\}.$$

Вычисляя прообраз функции $\mathcal{K}^*(s)$, получим значение интеграла

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{i\infty}}\frac{\Gamma(s)\Gamma(\delta+s)}{\Gamma(\mu+\alpha\delta+\alpha s)}\left(\frac{c^2}{4y^\alpha}\right)^{-s}ds=H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{c^2}{4y^\alpha}\,\middle|\,\begin{matrix}(\mu+\alpha\delta,\alpha)\\(0,1),(\delta,1)\end{matrix}\right],$$

где $L_{i\infty}=(\omega-i\infty,\omega+i\infty)$, $\omega>-\min\{\delta,0\}$, $\delta\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots$. Подставляя найденное значение интеграла в (18), приходим к (17).

Для H-функции из формулы (17) приведем здесь еще асимптотическую оценку ([20], с. 18; [21], с. 20)

$$H_{1,2}^{2,0}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(\mu+\alpha\delta,\alpha)\\(0,1),(\delta,1)\end{matrix}\right]=O\left(z^{\frac{\delta(1-\alpha)-\mu}{2-\alpha}}\exp\left[-(2-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}z^{\frac{1}{2-\alpha}}\right]\right),\ z\to\infty. \tag{20}$$

3. Основные результаты

Положим $\beta=(1-b)/2$, $|b|<1$,

$$G(x,\xi,y)=A_y^\alpha g(x,\xi,y), \tag{21}$$

$$g(x,\xi,y)=\frac{x^\beta\xi^\beta}{2y}e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}}I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right). \tag{22}$$

Теорема 1. *Пусть $\varphi(x)\in C[0,\infty)$ и выполнено условие*

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)\exp\left(-\rho x^{\frac{2}{2-\alpha}}\right)=0,\quad \rho<(2-\alpha)2^{-\frac{2}{2-\alpha}}(\alpha/T)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}.$$

Тогда функция

$$u(x,y)=\int_0^\infty \xi^{1-2\beta}G(x,\xi,y)\varphi(\xi)d\xi \tag{23}$$

является решением задачи (1)–(3).

Доказательство. Докажем, что функция (23) удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2), (3). Перестановки знаков производных и интегралов при дифференцировании по x и взятии дробной производной по y порядка α допустимы в силу следующей леммы, которая следует из асимптотических формул (7), (8), (20), неравенства (14), а также формул (15) и (17).

Лемма. *Для функции $G(x,\xi,y)$ при $x\xi\leqslant 2y$ справедливы следующие оценки:*

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}G(x,\xi,y)\right|\leqslant \text{const}\ y^{\alpha\beta-\alpha n-1},\\ \left|\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}}G(x,\xi,y)\right|\leqslant \text{const}\ xy^{\alpha\beta-\alpha n-\alpha-1},\\ |D_{0y}^\alpha G(x,\xi,y)|\leqslant \text{const}\ y^{\alpha\beta-\alpha-1},\end{gathered} \tag{24}$$

а при $x\xi>2y$ — оценки

$$\left|\frac{\partial^{n}}{\partial x^{n}}G(x,\xi,y)\right|\leqslant \text{const}\ P_n(x,\xi,y)\exp\left[-\alpha_0|x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}y^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right], \tag{25}$$

$$|D_{0y}^\alpha G(x,\xi,y)|\leqslant \text{const}\ P_2(x,\xi,y)\exp\left[-\alpha_0|x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}y^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right],$$

где $\alpha_0 = (2-\alpha)2^{-\frac{2}{2-\alpha}}\alpha^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}$,

$$P_n(x,\xi,y) = x^{\beta+\frac{2n-1}{2}}\xi^{\beta-\frac{1}{2}}|x-\xi|^{-\frac{(2n-1)(1-\alpha)}{2-\alpha}}y^{-\frac{\alpha(2n-1)}{2(2-\alpha)}-1}, \quad n=0,1,2,\dots .$$

Продифференцируем равенство (23) по x, используя (5) при $\nu=-\beta$. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = \int_0^\infty \xi^{1-2\beta}\frac{\partial}{\partial x}G(x,\xi,y)\varphi(\xi)d\xi, \tag{26}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial x}G(x,\xi,y) = A_y^\alpha \frac{\partial}{\partial x}g(x,\xi,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x,\xi,y) = \left\{\frac{x^\beta\xi^{\beta+1}}{(2y)^2}I_{1-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) - \frac{x^{\beta+1}\xi^\beta}{(2y)^2}I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right)\right\}e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}}.$$

Умножим обе части (26) на $x^{1-2\beta}$ и продифференцируем полученное равенство по x, используя формулу (4) при $\nu=1-\beta$. Воспользуемся затем формулой (6) при $\nu=-\beta$ и умножим полученное равенство на $x^{2\beta-1}$. В итоге получим

$$B_x u(x,y) = \int_0^\infty \xi^{1-2\beta}B_x G(x,\xi,y)\varphi(\xi)d\xi, \tag{27}$$

где

$$B_x G(x,\xi,y) = A_y^\alpha B_x g(x,\xi,y), \tag{28}$$

$$B_x g(x,\xi,y) = \left\{\frac{x^{\beta+2}\xi^\beta}{(2y)^3}I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) + \frac{x^\beta\xi^{\beta+2}}{(2y)^3}I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{2x^\beta\xi^\beta}{(2y)^2}I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) - \frac{2x^{\beta+1}\xi^{\beta+1}}{(2y)^3}I'_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right)\right\}e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}}.$$

Далее, в силу формулы (12), можно записать

$$D_{0y}^\alpha u(x,y) = \int_0^\infty \xi^{1-2\beta}D_{0y}^\alpha G(x,\xi,y)\varphi(\xi)d\xi, \tag{29}$$

где

$$D_{0y}^\alpha G(x,\xi,y) = A_y^\alpha \frac{\partial}{\partial y}g(x,\xi,y), \tag{30}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}g(x,\xi,y) = \left\{\frac{x^{\beta+2}\xi^\beta}{(2y)^3}I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) + \frac{x^\beta\xi^{\beta+2}}{(2y)^3}I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{2x^\beta\xi^\beta}{(2y)^2}I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) - \frac{2x^{\beta+1}\xi^{\beta+1}}{(2y)^3}I'_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right)\right\}e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}}.$$

Подставляя (27) и (29) в уравнение (1), видим, что оно обращается в тождество.

Проверим теперь выполнимость условия (2). Из формулы (13) при $\mu=0$ следует

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y) = \lim_{y\to 0}\int_0^\infty \xi^{1-2\beta}g(x,\xi,y)\varphi(\xi)d\xi =$$
$$= \lim_{y\to 0}\left[\int_0^\infty \xi^{1-2\beta}g(x,\xi,y)[\varphi(\xi)-\varphi(x)]d\xi + \varphi(x)\int_0^\infty \xi^{1-2\beta}g(x,\xi,y)d\xi\right] =$$
$$= \lim_{y\to 0}[J_1(x,y)+J_2(x,y)].$$

Разбивая промежуток интегрирования на части, представим $J_1(x,y)$ в виде суммы трех слагаемых:

$$J_1(x,y) = \int_0^{x-\varepsilon} \xi^{1-2\beta} g(x,\xi,y)[\varphi(\xi)-\varphi(x)]d\xi + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \xi^{1-2\beta} g(x,\xi,y)[\varphi(\xi)-\varphi(x)]d\xi +$$
$$+ \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \xi^{1-2\beta} g(x,\xi,y)[\varphi(\xi)-\varphi(x)]d\xi = J_{11}(x,y) + J_{12}(x,y) + J_{13}(x,y),$$

где ε — произвольное малое положительное число.

Учитывая (8), из (22) при $y \to 0$ получим оценку

$$|g(x,\xi,y)| \leqslant \text{const } x^{\beta-1/2}\xi^{\beta-1/2}y^{-1/2}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}}, \tag{31}$$

откуда следует $\lim\limits_{y\to0} J_{11}(x,y) = \lim\limits_{y\to0} J_{13}(x,y) = 0$.

Далее обозначим $\omega(\varepsilon) = \sup|\varphi(x)-\varphi(\xi)|$, где $\xi \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. Так как функция $\varphi(x)$ непрерывна, то $\omega(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда в силу (31) имеем оценку

$$|J_{12}(x,y)| \leqslant \omega(\varepsilon)\frac{x^{\beta-1/2}}{\sqrt{y}} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \xi^{1/2-\beta} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} d\xi.$$

Сделав в последнем интеграле замену $\xi = x + 2\sqrt{y}t$, получим

$$|J_{12}(x,y)| \leqslant \omega(\varepsilon)x^{\beta-1/2} \int_{-\frac{\varepsilon}{2\sqrt{y}}}^{\frac{\varepsilon}{2\sqrt{y}}} (x+2\sqrt{y}t)^{1/2-\beta} e^{-t^2} dt. \tag{32}$$

С учетом формулы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ из (32) имеем $\lim\limits_{y\to0} J_{12}(x,y) = \text{const }\omega(\varepsilon)$. Отсюда в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ и произвольности выбора ε получаем $\lim\limits_{y\to0} J_{12}(x,y) = 0$.

Вычислим интеграл $J_2(x,y)$. Из представления (22) следует равенство

$$J_2(x,y) = \frac{x^\beta\varphi(x)}{2y} e^{-\frac{x^2}{4y}} \int_0^\infty \xi^{1-\beta} e^{-\frac{\xi^2}{4y}} I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) d\xi. \tag{33}$$

Далее воспользуемся формулой ([17], с. 306)

$$\int_0^\infty \xi^{\delta-1} e^{-p\xi^2} I_\nu(c\xi) d\xi = \frac{c^\nu p^{-(\delta+\nu)/2}\Gamma\big((\delta+\nu)/2\big)}{2^{1+\nu}\Gamma(1+\nu)} {}_1F_1\left(\frac{\delta+\nu}{2}; 1+\nu; \frac{c^2}{4p}\right),$$

где ${}_1F_1(a;b;z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Придавая параметрам в последней формуле значения $\delta = 2-\beta$, $p = 1/(4y)$, $\nu = -\beta$, $c = x/(2y)$, и учитывая представление ${}_1F_1\big(1-\beta; 1-\beta; \frac{x^2}{4y}\big) = e^{\frac{x^2}{4y}}$, получим

$$\int_0^\infty \xi^{1-\beta} e^{-\frac{\xi^2}{4y}} I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) d\xi = \frac{2y}{x^\beta} e^{\frac{x^2}{4y}}.$$

Подставляя полученное выражение в (33), имеем $J_2(x,y) = \varphi(x)$. Таким образом, показано, что $\lim\limits_{y\to0} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y) = \varphi(x)$.

Выполнимость однородного условия (3) следует из оценки (24) при $n = 0$ и условия $\beta < 1$. $\square$

Заметим, что из (9), (21) и (22) при $\beta = 1/2$ ($b = 0$) получим

$$G(x,\xi,y) = A_y^\alpha g(x,\xi,y), \quad g(x,\xi,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4y}}\right].$$

Учитывая (10), функцию $g(x,\xi,y)$ можно переписать в виде

$$g(x,\xi,y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\Big[\phi\Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};-\frac{|x-\xi|}{\sqrt{y}}\Big)+\phi\Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};-\frac{|x+\xi|}{\sqrt{y}}\Big)\Big].$$

Применяя к ней с помощью формулы (16) преобразование A^α по переменной y, из (23) получим представление решения второй краевой задачи в полуполосе для уравнения диффузии дробного порядка

$$u(x,y)=\int_0^\infty G(x,\xi,y)\varphi(\xi)d\xi,$$

где

$$G(x,\xi,y)=\frac{y^{\sigma-1}}{2}\Big[\phi\Big(-\sigma,\sigma;-\frac{|x-\xi|}{y^\sigma}\Big)+\phi\Big(-\sigma,\sigma;-\frac{|x+\xi|}{y^\sigma}\Big)\Big],\quad \sigma=\frac{\alpha}{2}.$$

Теорема 2. *Существует не более одного регулярного решения задачи* (1)–(3) *в классе функций, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{x\to\infty}y^{1-\alpha}u(x,y)\exp\big(-kx^{\frac{2}{2-\alpha}}\big)=0 \tag{34}$$

при некотором положительном k*, причем сходимость в* (34) *является равномерной на множестве* $\{y\in(0;T)\}$.

Доказательство. Пусть $h_r(\xi)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, обладающая свойствами

$$h_r(\xi)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\xi\leqslant r;\\ 0, & \xi\geqslant r+1,\end{cases} \tag{35}$$

$0\leqslant h_r(\xi)\leqslant 1$, $|h_r'(\xi)|+|h_r''(\xi)|\leqslant H$, где H — постоянная, не зависящая от r.

Из (28) и (30) следует, что функция $G(x,\xi,y)$, как функция переменных x и y, удовлетворяет уравнению $\mathbf{L}G(x,\xi,y)=0$, а функция $G(x,\xi,y-\eta)$, как функция переменных ξ и η, $0<\eta<y$, — сопряженному уравнению

$$\mathbf{L}^*G(x,\xi,y-\eta)\equiv B_\xi G(x,\xi,y-\eta)-D^\alpha_{y\eta}G(x,\xi,y-\eta)=0. \tag{36}$$

Рассмотрим функцию $v(x,\xi,y-\eta)=h_r(\xi)G(x,\xi,y-\eta)$. Учитывая (36), получим

$$\mathbf{L}^*v(x,\xi,y-\eta)=2h_r'(\xi)G_\xi(x,\xi,y-\eta)+\frac{b}{\xi}h_r'(\xi)G(x,\xi,y-\eta)+h_r''(\xi)G(x,\xi,y-\eta). \tag{37}$$

Докажем сначала, что, если $\varphi(x)\equiv 0$, то $u(x,y)\equiv 0$ при $0<y<\delta$ для достаточно малого δ. Согласно теореме об общем представлении решения уравнения (1) ([23]), регулярное в области $\Omega_r=\{(x,y):0<x<r,\ 0<y<\delta\}$ решение однородной задачи, соответствующей задаче (1)–(3), представимо в виде

$$u(x,y)=\int_0^{r+1}\int_0^y\xi^{1-2\beta}u(\xi,\eta)\mathbf{L}^*v(x,\xi,y-\eta)d\eta\,d\xi.$$

Из (35) и (37) следует, что $\mathbf{L}^*v(x,\xi,y-\eta)=0$, если $0\leqslant\xi\leqslant r$, откуда

$$u(x,y)=\int_r^{r+1}\int_0^y\xi^{1-2\beta}u(\xi,\eta)\mathbf{L}^*v(x,\xi,y-\eta)d\eta\,d\xi.$$

Далее, в силу свойств функции $h_r(\xi)$ и оценок (25), из (37) получим

$$|\mathbf{L}^*v(x,\xi,y-\eta)|\leqslant\text{const }P_1(x,\xi,y-\eta)\exp\big[-\alpha_0|x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(y-\eta)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\big].$$

Учитывая эту оценку, а также условие (34), находим

$$|u(x,y)| \leqslant \mathrm{const} \int_r^{r+1} \int_0^y P(x,\xi,y,\eta) \exp\big[-\alpha_0|x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(y-\eta)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}} + k\xi^{\frac{2}{2-\alpha}}\big] d\eta\, d\xi,$$

где $P(x,\xi,y,\eta) = \xi^{1-2\beta}\eta^{\alpha-1}P_1(x,\xi,y-\eta)$. При $\delta < (\alpha_0/k)^{(2-\alpha)/\alpha}$ и $r \to \infty$ правая часть последнего неравенства стремится к нулю. Это означает, что функция $u(x,y) \equiv 0$ в области

$$\Omega_1 = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < \delta\}.$$

Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ для любого $y > 0$. Пусть $t = y - \delta$, $\delta \leqslant y < 2\delta$. Рассмотрим функцию $w(x,t) = u(x,\delta+t)$. Так как $u(x,y) \equiv 0$ при $0 < y < \delta$, то

$$D_{0y}^{\alpha}u(x,y) = D_{\delta y}^{\alpha}u(x,y) = D_{0t}^{\alpha}w(x,t).$$

Отсюда следует, что функция $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$B_x w(x,t) - D_{0t}^{\alpha}w(x,t) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \delta,$$

условиям (34) и

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-1}w(x,t) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad \lim_{x\to 0} x^b w_x(x,t) = 0, \quad 0 < t < \delta.$$

Тогда согласно вышедоказанному $w(x,t) \equiv 0$ в $\Omega_2 = \{(x,t) : 0 < x < \infty,\ 0 < t < \delta\}$, т.е. $u(x,y) \equiv 0$ в области $\Omega_2 = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ \delta < y < 2\delta\}$. Точно так же доказывается, что $u(x,y) \equiv 0$ в полосах $(n-1)\delta \leqslant y < n\delta$, $n = 3, 4, \ldots$. □

Литература

[1] Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии* (Высш. шк., М., 1995).

[2] Псху А.В. *Уравнения в частных производных дробного порядка* (Наука, М., 2005).

[3] Терсенов С.А. *Параболические уравнения с меняющимся направлением времени* (Наука, М., Сиб. отд., 1985).

[4] Pagani C.D. *On the parabolic equation* $\mathrm{sgn}(x)x^p u_y - u_{xx} = 0$ *and a related one*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **99** (4), 333–339 (1974).

[5] Горьков Ю.П. *Построение фундаментального решения параболического уравнения с вырождением*, Вычисл. методы и программиров. **6**, 66–70 (2005).

[6] Arena O. *On a degenerate elliptic-parabolic equation*, Comm. Partial Diff. Equat. **3** (11), 1007–1040 (1978).

[7] Mainardi F. *The time fractional diffusion-wave equation*, Radiophys. and Quant. Electronics **38** (1–2), 13–24 (1995).

[8] Mainardi F. *The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation*, Appl. Math. Lett. **9** (6), 23–28 (1996).

[9] Псху А.В. *Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения*, Изв. РАН. Сер. матем. **73** (2), 141–182 (2009).

[10] Геккиева С.Х. *Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области*, Изв. Кабардино-Балкарск. научн. центра РАН **1** (8), 6–8 (2002).

[11] Metzler R., Glöckle W.G., Nonnenmacher T.F. *Fractional model equation for anomalous diffusion*, Physica A **211**, 13–24 (1994).

[12] Metzler R., Klafter J. *The restaurant at the end of the random walk*: *recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics*, Physica A: Math. Gen. **37**, R161–R208 (2004).

[13] Учайкин В.В. *Анизотропия космических лучей в дробно-дифференциальных моделях аномальной диффузии*, ЖЭТФ **143** (6), 1039–1047 (2013).

[14] Uchaikin V.V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers.* V. I (HEP/Springer, Background and Theory, 2013).

[15] Хуштова Ф.Г. *Первая краевая задача в полуполосе для вырождающегося уравнения параболического типа с дробной производной*, Докл. Адыгской (Черкесской) Международн. акад. наук **17** (3), 60–69 (2015).

[16] Кузнецов Д.С. *Специальные функции* (Высш. шк., М., 1965).

[17] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Специальные функции.* Т. 2 (Наука, М., 1983).

[18] Gorenflo R., Luchko Y., Mainardi F. *Analytical properties and applications of the Wright function*, Fract. Calc. Appl. Anal. **2** (4), 383–414 (1999).

[19] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды. Доп. гл.* Т. 3 (Наука, М., 1986).

[20] Kilbas A.A., Saigo M. *H-Transform. Theory and applications* (Boca Raton–London–New York–Washington, D.C. Chapman and Hall/CRC, 2004).

[21] Mathai A.M., Saxena R.K., Haubold H.J. *The H-function. Theory and applications* (Springer, New York, 2010).

[22] Маричев О.И. *Метод вычисления интегралов от специальных функций* (*теория и таблицы формул*) (Наука и техника, Мн., 1978).

[23] Хуштова Ф. Г. *Фундаментальное решение модельного уравнения аномальной диффузии дробного порядка*, Вестн. Самарск. гос. тенх. ун-та. Сер физ.-матем. наук **19** (4), 722–735 (2015).

Ф.Г. Хуштова

Институт прикладной математики и автоматизации,
ул. Шортанова, д. 89А, г. Нальчик, 360000, Россия,

`e-mail:` khushtova@ya.ru

F.G. Khushtova

Second boundary-value problem in a half-strip for equation of parabolic type with the Bessel operator and Riemann–Liouville derivative

Abstract. We investigate the second boundary-value problem in the half-strip for parabolic equation with the Bessel operator and Riemann–Liouville partial derivative. In terms of the integral transform with Wright function in the kernel, we find the representation of a solution in the case of zero edge condition. We prove the uniqueness of a solution in the class of functions satisfying an analog of the Tikhonov condition.

Keywords: differential equation with partial derivatives, parabolic equation, Bessel operator, modified Bessel function, fractional order derivative, Riemann–Liouville operator, Fox function, Wright function, integral transform with Wright function in kernel, uniqueness of solution, Tikhonov condition.

F.G. Khushtova

Institute of Applied Mathematics and Automation,
89A Shortanov str., Nalchik, 360000 Russia,

`e-mail:` khushtova@ya.ru