ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 11 (426)

УДК 512.542

А.Ф. ВАСИЛЬЕВ, Т.И. ВАСИЛЬЕВА

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, У КОТОРЫХ ГЛАВНЫЕ ФАКТОРЫ ЯВЛЯЮТСЯ ПРОСТЫМИ ГРУППАМИ

В настоящее время, когда классификация конечных простых групп считается законченной, становится актуальной задача изучения конечных составных групп. Для построения общей теории полезно накопление и изучение примеров как отдельных составных групп, так и их классов. В [1] В.А.Ведерниковым введен целый ряд классов составных групп и среди них класс c-сверхразрешимых групп. Группа называется c-сверхразрешимой, если она обладает главным рядом, все факторы которого являются простыми группами. Класс всех c-сверхразрешимых групп обозначается через $\mathfrak{U}_c$. Нетрудно заметить, что сверхразрешимые и квазинильпотентные группы c-сверхразрешимы, однако этими примерами не исчерпывается весь класс $\mathfrak{U}_c$. В [1] найдены некоторые свойства класса всех c-сверхразрешимых групп, в частности, отмечено, что $\mathfrak{U}_c$ образует S_n-замкнутую формацию.

В данной работе изучаются другие свойства формации всех c-сверхразрешимых групп. Хорошо известно (см., напр., [2], гл. VI), что формация всех сверхразрешимых групп насыщена, т.е. если фактор-группа $G/\Phi(G)$ сверхразрешима, то и группа G сверхразрешима. Следующий пример показывает, что формация $\mathfrak{U}_c$ не является насыщенной.

Пример. Пусть $G = A_5$ — знакопеременная группа степени 5, K — поле, состоящее из трех элементов. Обозначим через $A = A_K(G)$ фраттиниевый KG-модуль (см. [3]). Ввиду [3] A — неприводимый KG-модуль размерности четыре. По известной теореме Гашюца существует фраттиниево расширение $A \rightarrowtail E \twoheadrightarrow G$ такое, что $A \overset{G}{\simeq} \Phi(E)$ и $E/\Phi(E) \simeq G$. Очевидно, $E/\Phi(E) \simeq G$ c-сверхразрешима, но из перечисленных выше характеристик модуля A следует, что E c-сверхразрешимой не является. Следовательно, формация $\mathfrak{U}_c$ ненасыщена, а значит, нелокальна.

Вместе с тем для $\mathfrak{U}_c$ свойство, близкое к насыщенности, получается из следующего результата.

Теорема 1. *Формация $\mathfrak{U}_c$ является композиционной и имеет максимальный внутренний композиционный экран h такой, что*

$$h(N) = \begin{cases} \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1), & \text{если } N \text{ — простая } p\text{-группа;} \\ \mathfrak{U}_c, & \text{если } N \text{ — простая неабелева группа.} \end{cases}$$

Отсюда с учетом теоремы 4.12 из ([4] гл. IV) имеет место

Следствие. Если N — нормальная разрешимая подгруппа группы G и $G/\Phi(N)$ c-сверхразрешима, то G c-сверхразрешима.

Заметим, что формация $\mathfrak{U}_c$ не является радикальной, поскольку в противном случае группа, являющаяся произведением нормальных сверхразрешимых подгрупп, всегда была бы сверхразрешимой, что неверно. С другой стороны, известно, что группа $G = HK$, где H и K — нормальные сверхразрешимые подгруппы, сверхразрешима, если $(|G{:}H|, |G{:}K|) = 1$ (см., напр., [5]), или если G имеет нильпотентный коммутант [6]. В этом направлении нами получена

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

1) если группа $G = HK$, где H и K — нормальные c-сверхразрешимые подгруппы из G и фактор-группы G/H и G/K не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов, то G c-сверхразрешима;

2) если группа G есть расширение ca-разрешимой группы с помощью A-группы и $G = HK$, где H и K — нормальные c-сверхразрешимые подгруппы из G, то G c-сверхразрешима;

3) если группа $G = HK$, где H — нормальная ca-сверхразрешимая подгруппа и K — нормальная c-сверхразрешимая подгруппа из G, то G c-сверхразрешима.

Следствие 1. Если группа $G = HK$, где H и K — нормальные c-сверхразрешимые подгруппы из G и $(|G{:}H|, |G{:}K|) = 1$, то G c-сверхразрешима.

Следствие 2. Если группа G есть расширение квазинильпотентной группы с помощью A-группы и $G = HK$, где H и K — нормальные c-сверхразрешимые подгруппы из G, то G c-сверхразрешима.

Следствие 3. Если группа G есть расширение нильпотентной группы с помощью A-группы и $G = HK$, где H и K — нормальные сверхразрешимые подгруппы из G, то G сверхразрешима.

Следствие 4. Если группа представима в виде произведения нормальной квазинильпотентной подгруппы и нормальной c-сверхразрешимой подгруппы, то она c-сверхразрешима.

В работе рассматриваются только конечные группы. Используется стандартная теоретико-групповая терминология. Обозначения и определения, связанные с формациями конечных групп, можно найти в [5]. Через $\mathfrak{A}$ обозначается класс всех абелевых групп; через $\mathfrak{A}(p-1)$ — класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$. Напомним, что A-группой называется группа с абелевыми силовскими подгруппами. Обозначим через $\mathfrak{A}^{\mathbb{P}}$ класс всех A-групп. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{A}^{\mathbb{P}}$ является S-замкнутой формацией. Согласно [1] группа G называется ca-разрешимой, если G обладает главным рядом, каждый абелев фактор которого централен в G. Группа G называется ca-сверхразрешимой, если она c-сверхразрешима и обладает главным рядом, каждый абелев фактор которого централен в G. Через $\mathfrak{S}_{ca}$ обозначается класс всех ca-разрешимых групп; через $\mathfrak{U}_{ca}$ — класс всех ca-сверхразрешимых групп. В [1] установлено, что $\mathfrak{S}_{ca}$ и $\mathfrak{U}_{ca}$ являются формациями Фиттинга.

Доказательство теоремы 1. Пусть f — композиционный экран, обладающий следующими свойствами: для любой простой группы N значение экрана $f(N) = \mathfrak{A}(p-1)$, если N — p-группа, и $f(N) = \mathfrak{U}_c$, если N — неабелева группа. Обозначим $\mathfrak{X} = \langle f \rangle$. Покажем, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{U}_c$.

Предположим, что множество $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{U}_c$ непусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Так как $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{U}_c$ являются формациями, то в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и $N = G^{\mathfrak{U}_c}$.

Пусть N — неабелева группа. Если $N = G$, то G — простая группа и $G \in \mathfrak{U}_c$. Противоречие. Будем считать, что $N \neq G$. Заметим, что $C_G(N) \cap N \lhd G$. Из неабелевости и минимальности N следует, что $C_G(N) = 1$. Так как $G \in \mathfrak{X}$, то $G \simeq G/C_G(N) \in f(N) = \mathfrak{U}_c$. Получили противоречие с выбором G.

Пусть N — абелева p-группа для некоторого простого числа p. Из $G \in \mathfrak{X}$ следует, что $G/C_G(N) \in f(N) = \mathfrak{A}(p-1)$. По лемме Хупперта (см. лемму 4.1 из [5]) N является циклической группой порядка p. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{U}_c$ получаем $G \in \mathfrak{U}_c$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{U}_c$.

Докажем обратное включение. Предположим, что множество $\mathfrak{U}_c \setminus \mathfrak{X}$ непусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Можно считать, что в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа K такая, что $K = G^{\mathfrak{X}}$.

Если K — неабелева группа, то $C_G(K) = 1$. Тогда $G/C_G(K) \simeq G \in \mathfrak{U}_c = f(K)$, т.е. главный фактор K является f-центральным в G. Отсюда и из $G/K \in \mathfrak{X}$ следует, что $G \in \mathfrak{X}$. Противоречие с выбором G.

Пусть K — абелева p-группа для некоторого простого p. Так как $G \in \mathfrak{U}_c$, то K — группа порядка p. Ввиду того, что $G/C_G(K)$ изоморфно вкладывается в группу $\operatorname{Aut} K$, получаем $G/C_G(K) \in \mathfrak{A}(p-1)$. Отсюда и из $G/K \in \mathfrak{X}$ следует, что $G \in \mathfrak{X}$. Противоречие. Итак, $\mathfrak{U}_c \subseteq \mathfrak{X}$, тем самым равенство $\mathfrak{X} = \mathfrak{U}_c$ доказано.

Из задания f следует, что f — внутренний экран. Значит, по теореме 3.2 из [5] формация $\mathfrak{U}_c$ обладает максимальным композиционным экраном h таким, что $h(N) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$, если N — простая абелева p-группа, и $h(N) = \mathfrak{U}_c$, если N — простая неабелева группа. $\square$

Доказательство теоремы 2 опирается на следующие результаты, некоторые из которых имеют самостоятельное значение.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и N — минимальная нормальная подгруппа группы G такая, что $|N| = p^\alpha$ для некоторого простого числа p. Если N содержится в подгруппе H из G и $H/C_H(U/V) \in \mathfrak{F}$ для любого H-главного фактора U/V группы N, то $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Рассмотрим любой H-главный фактор U/V группы N. Так как $H/C_H(U/V) \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — формация, то $H/B \in \mathfrak{F}$, где $B = \cap C_H(U/V)$ и U/V пробегает все H-главные факторы группы N. Группа автоморфизмов $B/C_B(N)$ действует тождественно на каждом факторе некоторого субнормального $B/C_B(N)$-допустимого ряда группы N. Поэтому $B/C_B(N)$ является p-группой по лемме 3.10 из [5]. Тогда $H/C_B(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$, т.к. она есть расширение p-группы $B/C_B(N)$ с помощью $\mathfrak{F}$-группы H/B. Отсюда и из $C_B(N) \subseteq C_H(N)$ получаем $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$. $\square$

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторая подформация из $\mathfrak{A}$. Если $G = HK$, где H и K — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G и $(|G{:}H|, |G{:}K|) = 1$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой лемма неверна. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G. Для G/N все условия леммы выполняются, поэтому $G/N \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $N = G^{\mathfrak{F}}$. Ясно, что $N \subseteq H \cap K$. Если N — p-группа, то из $G/N \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{X}$ следует, что $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит, N — q-группа для некоторого простого числа $q \neq p$ и $O_p(G) = 1$. Так как $O_p(H)$ характеристична в H и H нормальна в G, то $O_p(H)$ нормальна в G. Следовательно, $O_p(H) = 1$. Аналогично показывается, что $O_p(K) = 1$. Значит, $H \in \mathfrak{X}$ и $K \in \mathfrak{X}$. Так как $G = HK$, то G нильпотентна. Если R — силовская r-подгруппа из G для некоторого простого r, то $R = H_rK_r$, где H_r и K_r — силовские r-подгруппы из H и K соответственно. Поскольку $(|G{:}H|, |G{:}K|) = 1$, то либо $R = H_r$, либо $R = K_r$. Из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A}$ ввиду теоремы 2.4 из [5] следует, что $\mathfrak{X}$ — S-замкнутая формация. Таким образом, $R \in \mathfrak{X}$, откуда $G \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие с выбором G. $\square$

Лемма 3. *Пусть группа G имеет неабелеву единственную минимальную нормальную подгруппу N такую, что $G/N \in \mathfrak{U}_c$. Если $G = HK$, где H и K — нормальные c-сверхразрешимые подгруппы из G, то G c-сверхразрешима.*

Доказательство. Заметим, что $N \subseteq H \cap K$. Пусть R — минимальная нормальная подгруппа группы H, содержащаяся в N. Так как $H \in \mathfrak{U}_c$, то R — простая неабелева группа. Прямой проверкой устанавливается, что $R^g \lhd H$ для любого $g \in G$. Из $N \lhd G$ следует, что произведение $R^xR^y \cdots R^z \subseteq N$, где $x, y, \dots, z$ — все элементы группы G. Из минимальности N получаем $N = R^xR^y \cdots R^z$. Выберем элементы $g_1, g_2, \dots, g_n$ группы G так, чтобы $N = R^{g_1}R^{g_2} \cdots R^{g_n}$ и $R^{g_i} = R^{g_j}$ для любых $i \neq j$. Ввиду простоты R имеем $R^{g_i} \cap R^{g_j} = 1$ для $i \neq j$, т.е. $N = R^{g_1} \times R^{g_2} \times \cdots \times R^{g_n}$. Аналогично, минимальная нормальная подгруппа L группы K, содержащаяся в N, обладает следующими свойствами: L — простая неабелева группа; $L^h \lhd K$ для любого $h \in G$; $N =$

$L^{h_1}\times L^{h_2}\times\cdots\times L^{h_m}$, где $h_1,h_2,\ldots,h_m$ — элементы группы G такие, что $L^{h_i}\neq L^{h_j}$ для любых $i\neq j$. Ввиду утверждения а) леммы 13.16 ([7], гл. X) и простоты L для любого $i\in\{1,2,\ldots,m\}$ имеем $L^{h_i}=R^{g_k}$ для некоторого $k\in\{1,2,\ldots,n\}$. Тогда из $N=R^{g_1}\times R^{g_2}\times\cdots\times R^{g_n}=L^{h_1}\times L^{h_2}\times\cdots\times L^{h_m}$ получаем, что $n=m$, т.е. $\{R^{g_1},R^{g_2},\ldots,R^{g_n}\}=\{L^{h_1},L^{h_2},\ldots,L^{h_m}\}$. Так как $L^{h_1}=R^{g_k}$ для некоторого $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, то $N_G(L^{h_1})=N_G(R^{g_k})\supseteq HK=G$. Это означает, что $L^{h_1}\lhd G$. Отсюда и из минимальности N следует равенство $N=L^{h_1}$, т.е. N проста. Так как $G/N\in\mathfrak{U}_c$, то $G\in\mathfrak{U}_c$. $\square$

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{H}$ — подформация из $\mathfrak{A}$ и группа $G\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}^{\mathbb{P}}$. Если $G=HK$, где нормальные в G подгруппы H и K принадлежат $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$, то $G\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Пусть группа G — контрпример наименьшего порядка к лемме. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G. Тогда $G/N\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ и N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Если N — p-группа, то $(G/N)^{\mathfrak{H}}=G^{\mathfrak{H}}N/N\simeq G^{\mathfrak{H}}/G^{\mathfrak{H}}\cap N\in\mathfrak{N}_p$. Откуда $G^{\mathfrak{H}}\in\mathfrak{N}_p$, т.е. $G\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$. Противоречие. Таким образом, N не является p-группой. Это означает, что $O_p(G)=1$. Тогда $O_p(H)=O_p(K)=1$. Значит, $H^{\mathfrak{H}}=K^{\mathfrak{H}}=1$, т.е. $H\in\mathfrak{H}$ и $K\in\mathfrak{H}$. Отсюда и из $G=HK$ следует нильпотентность G. Более того, G является q-группой для некоторого простого $q\neq p$. Из $G\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}^{\mathbb{P}}$ и $O_p(G)=1$ получаем $G\in\mathfrak{A}$. Так как N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, то G — циклическая группа. Но тогда из $G=HK$ получаем либо $G=H\in\mathfrak{H}$, либо $G=K\in\mathfrak{H}$. Это противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Доказательство теоремы 2. Докажем справедливость утверждения 1). Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой утверждение 1) теоремы 2 неверно. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G. Легко показать, что для G/N все условия утверждения 1) выполняются. Поэтому $G/N\in\mathfrak{U}_c$. Так как $\mathfrak{U}_c$ является формацией, то N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, $N=G^{\mathfrak{U}_c}$ и $N\subseteq H\cap K$.

Пусть N — абелева p-группа для некоторого простого числа p. Рассмотрим максимальный внутренний композиционный экран h формации $\mathfrak{U}_c$. Тогда $h(p)=\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Пусть U/V — любой H-главный фактор группы N. Так как $H\in\mathfrak{U}_c$, то $H/C_H(U/V)\in h(p)$. По лемме 1 имеем $H/C_H(N)\in\mathfrak{N}_ph(p)$. Аналогично показывается, что $K/C_K(N)\in\mathfrak{N}_ph(p)$. Рассмотрим группу $G/C_G(N)=HC_G(N)/C_G(N)\cdot KC_G(N)/C_G(N)$. Из $HC_G(N)/C_G(N)\simeq H/C_H(N)\in\mathfrak{N}_ph(p)$ и $KC_G(N)/C_G(N)\simeq K/C_K(N)\in\mathfrak{N}_ph(p)$ ввиду леммы 2 получаем $G/C_G(N)\in\mathfrak{N}_ph(p)$. Следовательно, фактор N является h-центральным в G. Отсюда и из c-сверхразрешимости G/N следует c-сверхразрешимость G. Противоречие.

Если N — неабелева группа, то $G\in\mathfrak{U}_c$ по лемме 3. Это противоречие завершает доказательство утверждения 1).

Докажем утверждение 2). Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой утверждение 2) неверно. Можно считать, что G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N такой, что $N=G^{\mathfrak{U}_c}$ и $N\subseteq H\cap K$.

Пусть N — абелева p-группа для некоторого простого p. Покажем, что $G/C_G(N)\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}^{\mathbb{P}}$. Обозначим $\mathfrak{A}^{\mathbb{P}}$-корадикал группы G через T. Так как $T\in\mathfrak{S}_{ca}$, то $C_T(U/V)=T$ для любого T-главного фактора U/V группы N. Ввиду леммы 1 получаем $T/C_T(N)\in\mathfrak{N}_p$. Тогда группа $G/C_T(N)\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}^{\mathbb{P}}$, т.к. она есть расширение p-группы $T/C_T(N)$ с помощью A-группы G/T. Отсюда и из $C_T(N)\subseteq C_G(N)$ следует, что $G/C_G(N)\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}^{\mathbb{P}}$. Рассмотрим максимальный внутренний композиционный экран h формации $\mathfrak{U}_c$. Так как $H\in\mathfrak{U}_c$, то $H/C_H(U/V)\in h(p)$ для любого H-главного фактора U/V группы N. По лемме 1 $H/C_H(N)\in\mathfrak{N}_ph(p)=\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Аналогично $K/C_K(N)\in\mathfrak{N}_ph(p)=\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Поскольку $G/C_G(N)=HC_G(N)/C_G(N)\cdot KC_G(N)/C_G(N)$, где $HC_G(N)/C_G(N)\simeq H/C_H(N)\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$ и $KC_G(N)/C_G(N)\simeq K/C_K(N)\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$, то по лемме 4 заключаем $G/C_G(N)\in\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)=h(p)$. Это означает, что фактор N является h-центральным в G. Отсюда и из $G/N\in\mathfrak{U}_c$ получаем $G\in\mathfrak{U}_c$. Противоречие.

Если N неабелева, то по лемме 3 группа $G \in \mathfrak{U}_c$. Противоречие с выбором G. Утверждение 2) доказано.

Установим справедливость утверждения 3). Предположим, что G — группа наименьшего порядка, для которой утверждение 3) не выполняется. Тогда в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N = G^{\mathfrak{U}_c}$ и $N \subseteq H \cap K$.

Пусть N — p-группа для некоторого простого p. Ввиду $K \in \mathfrak{U}_c$ для максимального внутреннего композиционного экрана h формации $\mathfrak{U}_c$ и любого K-главного фактора U/V группы N имеем $K/C_K(U/V) \in h(p)$. Тогда, используя лемму 1, имеем $K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p h(p)$. Из $H \in \mathfrak{U}_{ca}$ для любого H-главного фактора U/V группы N получаем $C_H(U/V) = H$. Отсюда $H/C_H(N)$ является p-группой по лемме 1. Таким образом, группа $G/C_G(N)$ есть произведение p-группы $HC_G(N)/C_G(N)$ и $\mathfrak{N}_p h(p)$-группы $KC_G(N)/C_G(N)$, т.е. $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p h(p)$. Это означает, что фактор $N = G^{\mathfrak{U}_c}$ является h-центральным в G. Тем самым получаем противоречие с $G \notin \mathfrak{U}_c$.

Если N неабелева, то G c-сверхразрешима по лемме 3. Это противоречие с выбором G завершает доказательство утверждения 3). □

Литература

1. Ведерников В.А. *О некоторых классах конечных групп* // ДАН БССР. – 1988. – Т. 32. – № 10. – С. 872–875.
2. Huppert B. *Endliche Gruppen* I. – Berlin e.a.: Springer, 1967. – 793 s.
3. Griess R.L., Schmid P. *The Frattini module* // Arch. Math. – 1978. – V. 30. – № 3. — P. 256–266.
4. Doerk K., Hawkes T. *Finite Soluble Groups.* – Berlin e.a.: Walter de Gruyter, 1992. – 897 s.
5. Шеметков Л.А. *Формации конечных групп.* – М.: Наука, 1978. – 271 с.
6. Baer R. *Classes of finite groups and their properties* // Illinois J. Math. – 1957. – V. 1. – P. 115–187.
7. Huppert B., Blackburn N. *Finite groups* III. – Berlin e.a.: Springer, 1982. – 454 s.

Гомельский государственный университет

Поступила
14.04.1995