УДК 519.85

Кашина О.А, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт вычислительной математики и информационных технологий ФГАОУ ВПО «Казанский федеральный университет».

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ РЕШЕНИЯ ДВУХУРОВНЕВОЙ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В БЕСПРОВОДНЫХ СЕТЯХ

Аннотация: Работа посвящена исследованию свойств решений задачи оптимального распределения ресурса в беспроводных сетях с мобильными абонентами на бесконечном горизонте планирования. Актуальность задачи обусловлена быстрым развитием систем мобильной связи, в том числе беспроводных распределённых самоорганизующихся сетей, состоящих из большого количества элементов, каждый из которых может выступать как в качестве источника, так и в качестве получателя пакетов данных. Передача данных осуществляется посредством радиоканала, ширина которого и подлежит распределению.

Ключевые слова: беспроводная сеть; мобильные абоненты; радиоканал; задача распределения ресурса; двухуровневая оптимизация; декомпозиция; функция Лагранжа; одномерная минимизация; стабилизация решения.

Рассмотрим «двухуровневую» задачу распределения ресурса в сетях с мобильными абонентами [1], состоящую в оптимальном распределении ресурса сети (ширины частотной полосы радиоканала) между зонами, на которые разбивается область покрытия сети. Значение целевой функции задачи в каждой точке вычисляется, исходя из предположения о том, что распределение выделенного зоне ресурса между абонентами, находящимися в этой зоне, также осуществляется оптимально. Предполагается, что лицо, принимающее решение (ЛПР) на верхнем уровне – уровне сети («менеджер сети»), периодически получает информацию о фактических координатах абонентов сети и решает задачу с обновлёнными данными. Некоторые параметры задачи также подвержены изменениям во времени. Нас интересуют свойства последовательности решений задачи при стремлении номера наблюдения к бесконечности.

Введём обозначения (для краткости будем опускать обозначение момента времени решения задачи, когда речь идёт об одном фиксированном моменте) –

все дальнейшие обозначения (там, где это не оговаривается особо) относятся к фиксированному моменту времени.

Пусть C – общее количество распределяемого ресурса (ширина частотной полосы радиоканала); Z – количество зон, на которые разбивается область покрытия сети; a_z – искомое количество ресурса, выделяемое зоне z; величина $h_z\left(a_z\right)$ – расходы, связанные с выделением зоне z ресурса в количестве a_z; $f_z\left(a_z\right)$ – доход, получаемый ЛПР от выделения зоне z ресурса в количестве a_z (при оптимальном распределении этого количества ресурса между абонентами, находящимися в зоне z), $z = 1,...,Z$.

Задача, решаемая в некоторый момент времени, состоит в том, чтобы *оптимально распределить ресурс между зонами, при условии, что выделенный зоне ресурс оптимально распределяется между её абонентами*:

$$\max \to \sum_{z=1}^{Z}\left(f_z\left(a_z\right) - h_z\left(a_z\right)\right) \tag{1}$$

$$\sum_{z=1}^{Z} a_z \le C, \tag{2}$$

$$a_z \ge 0,\ z = 1,...,Z. \tag{3}$$

Будем считать, что для всех $z = 1,...,Z$ функции h_z выпуклые, возрастающие при $a_z \ge 0$; функции f_z заданы алгоритмически – посредством решения задачи:

$$\sum_{j \in I_z} U_j\left(x_j\right) \to \max \tag{4}$$

$$\sum_{j \in I_z} x_j \le a_z, \tag{5}$$

$$\alpha_j \le x_j \le \beta_j, \forall j \in I_z \tag{6}$$

Здесь z – номер зоны ($z \in \{1, \dots, Z\}$), I_z – множество номеров абонентов, находящихся в зоне z; величина x_j – искомое количество ресурса, получаемого абонентом j; величина $U_j\left(x_j\right)$ – плата абонента j за полученный им ресурс в количестве x_j; величины α_j и β_j – нижнее и верхнее допустимые значения переменной x_j, $j \in I_z$. Здесь функции U_j предполагаются вогнутыми на $[\alpha_j, \beta_j]$, $j \in I_z$, $z=1,\dots,Z$.

Таким образом,

$$f_z\left(a_z\right) \equiv \max_{x^z \in X_z} \sum_{j \in I_z} U_j\left(x_j\right), \tag{7}$$

где x^z – вектор, составленный из компонент x_j, $j \in I_z$; X_z – допустимое множество задачи (4) – (6) при фиксированном $z \in \{1, \dots, Z\}$.

Как уже отмечалось выше, в формулировке задачи (1) – (3) (а значит, и задачи (4) – (6) для всех z) момент времени предполагается фиксированным (обозначим его через k). Значения параметров задачи в момент k+1, вообще говоря, отличаются от значений, имевших место быть в момент k: ввиду мобильности абонентов изменяется состав множеств I_z, ввиду наличия случайных ошибок (неточностей измерений) меняются значения параметров функций h_z (тарифы).

Для решения задачи (1) – (3) в фиксированный момент времени применим декомпозиционный подход [2, 3].

Зафиксируем номер z, введём переменную μ и запишем функцию Лагранжа (например, [4, с. 196]) для задачи (4) – (6):

$$L_z\left(x^z, a_z, \mu\right) \equiv \sum_{j \in I_z}\left(-U_j\left(x_j\right)\right) + \mu \cdot \left(\sum_{j \in I_z} x_j - a_z\right). \tag{8}$$

С помощью функции (8) перепишем (7) в виде:

$$f_z\left(a_z\right) \equiv \min_{x^z \in \Pi_z} \max_{\mu \geq 0} L\left(x^z, a_z, \mu\right), \tag{9}$$

где Π_z – прямое произведение отрезков $\Omega_j \equiv [\alpha_j, \beta_j]$, $j \in I_z$. С помощью несложных преобразований функции (8) и изменения порядка оптимизации в_(9) запишем

$$f_z(a_z) \equiv \max_{\mu \geq 0} \left(-\mu \cdot a_z + \min_{x^z \in \Pi_z} \left(\sum_{j \in I_z} \left(\mu \cdot x_j - U_j(x_j) \right) \right) \right). \qquad (10)$$

«Внутренняя» задача в (10), т.е.

$$\min_{x^z \in \Pi_z} \left(\sum_{j \in I_z} \left(\mu \cdot x_j - U_j(x_j) \right) \right),$$

при фиксированных значениях z и μ распадается на одномерные задачи:

$$\min_{x_j \in \Omega_j} \left(\mu \cdot x_j - U_j(x_j) \right), \quad j \in I_z. \qquad (11)$$

Обозначим через $x_j^*(\mu)$ решение задачи (11) при фиксированных z, $j \in I_z$, μ. Тогда (10) примет вид:

$$f_z(a_z) \equiv \max_{\mu \geq 0} \left(-\mu \cdot a_z + \sum_{j \in I_z} \left(\mu \cdot x_j^*(\mu) - U_j\left(x_j^*(\mu)\right) \right) \right).$$

Обозначим здесь максимизируемую функцию через

$$\varphi_z(\mu, a_z) \equiv -\mu \cdot a_z + \sum_{j \in I_z} \left(\mu \cdot x_j^*(\mu) - U_j\left(x_j^*(\mu)\right) \right). \qquad (12)$$

Тогда

$$f_z(a_z) \equiv \max_{\mu \geq 0} \varphi_z(\mu, a_z). \qquad (13)$$

Таким образом, мы получили способ вычисления значения $f_z(a_z)$, предполагающий решение задачи (13) любым из методов одномерной минимизации нулевого порядка. На каждом шаге реализации этого метода для вычисления значения (12) при фиксированных μ, z и a_z необходимо решить $\left|I_z\right|$ задач вида (11), каждая из которых состоит в минимизации одномерной функции (функции от переменной x_j).

Теперь задача (1) – (3) может быть решена любым методом вогнутой максимизации (выпуклой минимизации) нулевого порядка. Однако при решении двухуровневых задач имеет смысл организовать параллельные вычисления, выполнив декомпозицию задачи. Для этого запишем (1) как

$$\min \to \sum_{z=1}^{Z}\left(-f_z\left(a_z\right)+h_z\left(a_z\right)\right). \tag{14}$$

Введём переменную λ и запишем функцию Лагранжа для задачи (14), (2), (3):

$$\Lambda\left(a,\lambda\right) \equiv \sum_{z=1}^{Z}\left(-f_z\left(a_z\right)+h_z\left(a_z\right)\right)+\lambda\left(\sum_{z=1}^{Z} a_z - C\right), \tag{18}$$

где $a=\left(a_1,\ldots,a_Z\right)$. Рассуждая как выше, получим задачу:

$$\max_{\lambda \geq 0} \xi\left(\lambda\right), \tag{15}$$

где

$$\xi\left(\lambda\right) \equiv -\lambda \cdot C + \sum_{z=1}^{Z}\left(\lambda \cdot a_z^*\left(\lambda\right) - f_z\left(a_z^*\left(\lambda\right)\right) + h_z\left(a_z^*\left(\lambda\right)\right)\right), \tag{16}$$

$a_z^*\left(\lambda\right)$ – решение задачи:

$$\min_{a_z \geq 0}(\lambda\, a_z - f_z(a_z) + h_z(a_z)) \tag{17}$$

при фиксированных z и λ. Понятно, что задача (17) может быть решена любым методом одномерной минимизации 0-го порядка, а задача (15) – любым методом одномерной максимизации 0-го порядка.

Итак, решая (каким-либо методом одномерной максимизации) задачу (15), получаем (с заданной точностью) оптимальное решение λ^*, оптимальное значение критерия задачи (1) – (3), равное $\xi(\lambda^*)$, оптимальное количество ресурса, выделяемое каждой зоне *z*, равное $a_z^*(\lambda^*)$, а также оптимальное количество ресурса, выделяемое абоненту *j*, равное $x_j^*(\mu_z^*)$, $j \in I_z$, где μ_z^* – решение задачи (16) при фиксированных z, a_z.

Обсудим вычислительные аспекты решения задачи (1) – (3). Реализация метода одномерной максимизации для задачи (15) предполагает вычисление величины $\xi(\lambda)$, что согласно (16) означает необходимость решения (каким-либо методом одномерной минимизации) *Z* задач (17) при фиксированном λ. В свою очередь, вычисление значения целевой функции задачи (17) при заданном a_z требует нахождения значения $f_z(a_z)$ путём решения задачи_(13), для чего нужно решить $|I_z|$ задач (11) (тем же или другим методом одномерной минимизации). При проведении численных экспериментов мы использовали один и тот же метод одномерной оптимизации – метод золотого сечения (см., например, [4, с. 84], там же можно найти некоторые другие методы одномерной оптимизации).

Модельные функции были выбраны следующим образом: функции U_j полагались квадратичными вогнутыми и такими, что $U_j(\alpha_j) < U_j(\beta_j)$; параметры функций U_j генерировались случайным образом (они оставались постоянными на всём временном горизонте); функции h_z были линейными, а именно, $h_z(a_z) \equiv w_z a_z$; все $\alpha_j \equiv 0$. Для проведения расчётов использовался пакет аналитических вычислений Wolfram Research Mathematica. Экспериментальным путём было получено правило согласования точности решения задачи одномерной минимизации на разных «уровнях вложенности»: ε_{i+1}=0,1*ε_i, где i – уровень задачи (i=1 обозначает задачу (11), i=2 – задачу (10), i=3 – задачу (17), i=4 – задачу (15)), ε_i – длина отрезка локализации задачи уровня i. Полученное правило означает, что чем точнее локализуется решение задачи «верхнего уровня», тем выше требования к точности решения «внутренней» задачи.

На Рис.1 приведён результат решения одной из тестовых задач. Столбцы первой из таблиц имеют следующий смысл (слева направо): номер зоны *z*; количество абонентов в зоне z; значение тарифа w_z (платы за использование единицы ресурса); искомая величина a_z; «чистый» доход зоны z – значение $f_z(a_z)$; расходы зоны z – значение $h_z(a_z)$; прибыль зоны z – разность $f_z(a_z)$ и $h_z(a_z)$. В последней строке указаны суммы значений соответствующих столбцов (последняя ячейка содержит найденное значение целевой функции задачи (1) – (3)). Столбцы второй таблицы, представленной на Рис. 1, имеют следующий смысл (слева направо): номер абонента; номер зоны, в которой находится абонент (на момент решения задачи); значение β_j; значение x_j, соответствующее решению, представленному в первой таблице.

Optimal resource distribution :

Zone #	N nodes	Tariff	Resource	Income	Expenses	Pure profit
1	3	19	45.4001	2532.92	862.601	1670.32
2	5	12	96.5001	3645.55	1158.	2487.55
3	4	17	64.6001	2948.68	1098.2	1850.48
	12		206.5	9127.15	3118.8	6008.35

Resource amount alloted to nodes :

#	№	beta	x
1	3	21.	5.20002
2	7	8.4	0
3	11	70.	40.2
4	1	56.	33.7
5	4	18.2	6.70002
6	8	35.	18.7
7	10	21.	8.70002
8	12	49.	28.7
9	2	7.	0
10	5	42.	21.2
11	6	63.	36.2
12	9	22.4	7.20002

Рис. 1. Результат решения одной из тестовых задач

Рассмотрим теперь поведение последовательности решений задачи (1) – (3) в бесконечности. Обозначим через k номер момента времени, в который решается задача; пусть I_z^k – множество номеров абонентов, находящихся в зоне z в момент k. Предположим, что тарифы подвержены затухающему «белому шуму», т.е. $w_z^k = w_z + \xi_k$, где w_z^k – значение тарифа в зоне z в момент k, а ξ_k представляет собой гауссову случайную величину с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением σ_k, таким что $\sigma_k \to 0$ при $k\to\infty$. Относительно поведения абонентов будем считать, что они могут свободно перемещаться между зонами в соответствии с заданными вероятностями: $p_{j,z}^k \equiv p\{в\ момент\ k\ абонент\ j\ находится\ в\ зоне\ z\}$. При проведении численных экспериментов эти вероятности генерировались случайным образом и сохранялись постоянными для всей серии экспериментов? т.е. $p_{j,z}^k \equiv p_{j,z}$ при всех k.

Обозначим через F_k оптимальное значение целевой функции задачи_ (1)_– (3) при $I_z = I_z^k$ и $w_z = w_z^k$; обозначим через $\nu_{j,z}^k$ относительную частоту нахождения абонента j в зоне z к моменту k; тогда $d_k \equiv \sum_{j\in I_z}(\frac{\nu_{j,z}^k}{k} - p_{j,z})^2$ есть «невязка», т.е. суммарная мера расхождения между относительными частотами и вероятностями событий «абонент j находится в зоне z». Положим $\overline{F^k} = \frac{\sum_{l=1}^k F^l}{k}$ – среднее значение целевой функции задачи (1) – (3), вычисленное на момент k; $S_F^k = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^k \left(F^l - \overline{F}^k\right)^2}{k}}$ – среднеквадратическое отклонение значений целевой функции от среднего на момент k; $v_k \equiv \frac{S_F^k}{\overline{F^k}}$ – значение коэффициента вариации на момент k.

Мы провели экспериментальное исследование поведения последовательностей $\{d_k\}$, $\{F_k\}$ и $\{v_k\}$ при $k\to\infty$. Результаты вычислений приведены на Рис._2 – 4. Ось абсцисс на всех трёх представленных графиках соответствует номеру k, по оси ординат отложены значения d_k, F_k и v_k, соответственно.

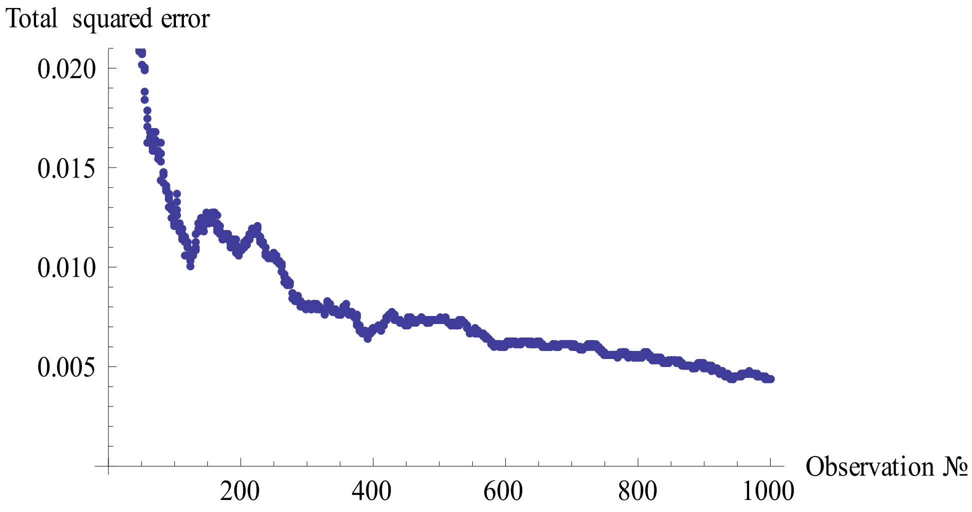

Рис. 2. График последовательности $\{d_k\}$

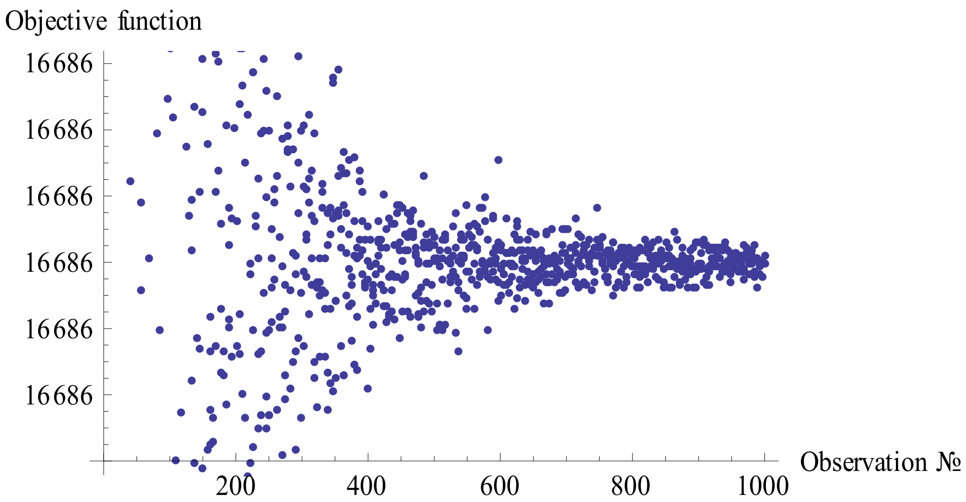

Рис. 3. График последовательности $\{F_k\}$

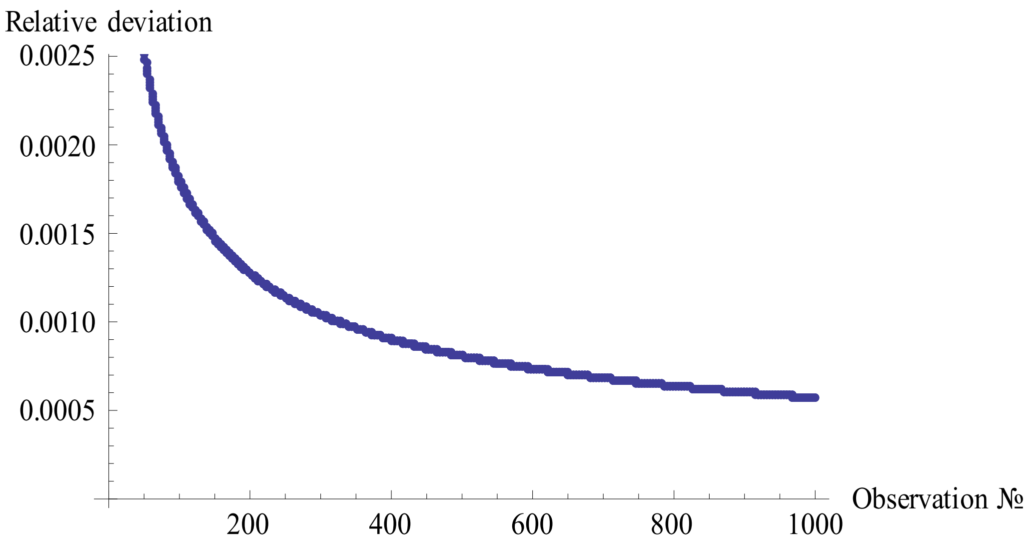

Рис. 4. График последовательности $\{v_k\}$

Стремление к 0 последовательности $\{d_k\}$ (см. Рис. 2) вполне ожидаемо – оно непосредственно следует из общеизвестного статистического определения вероятности. Более информативны графики, представленные на Рис. 3 и 4 – они свидетельствуют о том, что при стабилизации (стремлении к константе) тарифов w_z^k происходит стабилизация решения задачи (1) – (3). Для ЛПР это означает возможность на практике выбирать моменты решения задачи на основе анализа предыдущих решений и с использованием информации о фактическом местоположении абонентов (а не на основе вероятностных прогнозов).

Автор выражает благодарность профессору КФУ Игорю Васильевичу Коннову за идею и полезные обсуждения при выполнении работы и студентке КФУ Диане Хасановой за помощь в проведении численных экспериментов.

Литература

1._Konnov I.V., Kashina O.A., Laitinen E. Optimisation problems for control of distributed resources // International Journal of Modelling, Identification and Control. - 2011. - V.14, No 1-2. - P.65-72.

2._Konnov I.V., Kashina O.A., Laitinen E. Two-level decomposition method for resource allocation in telecommunication network // International Journal of Digital Information and Wireless Communications. - 2012. - V.2, No 2. - P. 150-155.

3._Konnov, Igor; Kashina, Olga; Laitinen, Erkki; Dual decomposition scheme for resource allocation problem in networks with moving nodes, 2012 Second International Conference on Digital Information Processing and Communications (ICDIPC), DOI: 10.1109/ICDIPC.2012.6257273. - 2012. - P. 31 – 35.

4. Коннов И.В. Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства. – Казань, КГУ, 2013. – 508 с.

Kashina, O.A, Candidate of Sciences (Mathematics and Physics), Associate Professor of Institute of Computer Mathematics and Information Technologies, Kazan Federal University

EXPERIMENTAL STUDY OF LIMIT PROPERTIES OF SOLUTIONS TO A TWO-LEVEL RESOURCE ALLOCATION PROBLEM IN WIRELESS NETWORKS

Abstract: We study properties of solutions to a resource allocation problem in wireless networks over an infinite planning horizon. The relevance of the problem is due to the rapid development of mobile communication networks, including distributed self-organizing ones consisting of a large number of elements, each of which can serve both as a source and as a receiver of data packets. Data are transmitted via a radio channel, whose width is to be distributed among zones.

Key words: wireless network; mobile nodes; radio channel; resource allocation problem; two-level optimization; decomposition; Lagrange function; one-dimensional minimization; solution stabilization.