ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 10 (449)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.954

В.И. ЖЕГАЛОВ, Е.А. УТКИНА

ОБ ОДНОМ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В области $D = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1\}$ рассмотрим уравнение

$$L(U) \equiv U_{xxy} + aU_{xx} + bU_{xy} + cU_x + dU_y + eU = f, \tag{1}$$

частные случаи которого встречаются при изучении поглощения почвенной влаги растениями ([1], с. 261). Будем считать, что $a, \dots, f \in C^{2+1}(D)$, где класс C^{k+l} означает существование и непрерывность всех производных $\partial^{r+s}/\partial x^r \partial y^s$ ($r = 0, \dots, k$; $s = 0, \dots, l$). Наиболее исследованной для (1) является задача Гурса об отыскании в D решения по условиям, задаваемым на части Γ границы области, образованной пересекающимися в точке (x_0, y_0) характеристиками этого уравнения,

$$\begin{aligned} &U(x_0, y) = \varphi(y), \quad U_x(x_0, y) = \varphi_1(y), \quad y \in p = [y_0, y_1], \quad \varphi, \varphi_1 \in C^1(p); \\ &U(x, y_0) = \psi(x), \quad x \in q = [x_0, x_1], \quad \psi \in C^2(q). \end{aligned} \tag{2}$$

Соотношения (2) предполагают, что отыскивается решение из $C^{2+1}(D) \cap C^{1+0}(D \cup p) \cap C^{0+0}(D \cup q)$. Из этого же класса тогда берутся и коэффициенты в (1). В [2]–[4] решение этой задачи (называемой еще характеристической) строится с помощью функции Римана R, которая вводится как решение некоторой специальной задачи Гурса, причем граничные условия указанной специальной задачи должны быть получены с помощью определенной задачи Коши. Такой способ обеспечивает существование функции R, но вопрос о ее явном построении остается открытым. В данной работе предлагается другой вариант введения функции Римана, позволяющий в ряде случаев записать ее в квадратурах. Кроме того, изучаются характеристические задачи с несколько иными, чем (2) граничными условиями.

1. Предлагаемый здесь способ введения функции Римана развивался ранее для других уравнений в ([5], с. 24; [6], с. 63; [7]–[9])

Будем называть функцией Римана для (1) решение интегрального уравнения

$$v(x,y) - \int_\eta^y a(x,\tau) v(x,\tau) d\tau - \int_\xi^x [b(t,y) - (x-t) d(t,y)] v(t,y) dt + \\ + \int_\xi^x \int_\eta^y [c(t,\tau) - (x-t) e(t,\tau)] v(t,\tau) d\tau\, dt = 1, \tag{3}$$

которое существует и единственно ([10], сс. 154, 164). В случаях, когда нужно подчеркнуть зависимость v не только от (x, y), но и от (ξ, η), будем ее, как обычно, обозначать $R(x, y; \xi, \eta)$.

Заметим, что v не совпадает с R из [2]–[4]. Например, здесь $R(x, y; x, y) = 1$, а в указанных работах $R(x, y; x, y) = 0$. В то же время, $v(x, y)$ остается решением сопряженного к (1) уравнения.

Введем обозначения

$$M = R_x - bR, \quad N = R_y - aR, \quad P = R_{xy} - (aR)_x - (bR)_y + cR, \quad Q = R_{xx} - (bR)_x + dR, \tag{4}$$

где аргументами у a, b, c, d являются (x,y), а у R и ее производных — $(x,y;\xi,\eta)$. Из (3) легко усматривается, что

$$M(x,y;x,y)\equiv N(x,y;x,y)\equiv P(x,y;x,y)\equiv Q(x,y;x,y)\equiv 0. \tag{5}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в выполнении тождества

$$(UR)_{xxy}=(MU)_{xy}+(NU)_{xx}-(PU)_x-(QU)_y+RL(U)+[U(aR)_x+U_yR_x]_x.$$

Поменяем здесь ролями переменные x с ξ и y с η и вычислим от правой и левой части интеграл в пределах $x_0\le\xi\le x$, $y_0\le\eta\le y$. Учитывая формулу

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}d\eta\,d\xi=\omega(x,y)-\omega(x,y_0)-\omega(x_0,y)+\omega(x_0,y_0)$$

и соотношения (2), (4), (5), находим

$$\begin{aligned}U_x(x,y)&=R(x,y_0;x,y)\psi'(x)+R(x_0,y;x,y)\varphi_1(y)-M(x,y_0;x,y)\psi(x)-\\&-M(x_0,y;x,y)\varphi(y)+M(x_0,y_0;x,y)\psi(x_0)-R(x_0,y_0;x,y)\psi'(x)+\\&+\int_{y_0}^{y}\{[P(x_0,\eta;x,y)-2N_\xi(\xi,\eta;x,y)|_{\xi=x_0}]\varphi(\eta)-N(x_0,\eta;x,y)\varphi_1(\eta)\}d\eta+\\&+\int_{x_0}^{x}Q(\xi,y_0;x,y)\psi(\xi)d\xi+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}R(\xi,\eta;x,y)L[U(\xi,\eta)]d\eta\,d\xi.\end{aligned}\tag{6}$$

Отсюда решение задачи (1)–(2) получается в виде

$$U(x,y)=\varphi(y)+\int_{x_0}^{x}h(\xi,\eta)d\xi+\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\xi}\int_{y_0}^{y}R(t,\eta;\xi,y)f(t,\eta)d\eta\,dt\,d\xi,$$

где $h(x,y)$ есть правая часть (6) без последнего слагаемого.

2. Очевидно, последняя формула дает решение задачи (1)–(2) в квадратурах, если известен явный вид функции R. Приведем некоторые такие случаи, полученные путем непосредственного решения (3).

а) $a\equiv c\equiv e\equiv b+xd\equiv 0$, $d\ne 0$,

$$R=1-x\int_{\xi}^{x}d(t,y)\left[\exp\int_{x}^{t}sd(s,y)ds\right]dt;$$

б) $a\equiv b\equiv c\equiv d\equiv 0$, $e(x,y)=e(y)\ne 0$,

$$R=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\int_{\eta}^{y}e(\tau)d\tau\right]^k\frac{(x-\xi)^{2k}}{(2k)!};$$

в) $a\equiv b\equiv d\equiv 0$, $c(x,y)\equiv xe(x,y)=m(x)n(y)$,

$$R=1-\Im_0\left\{2\left[\int_{\xi}^{x}m(t)dt\int_{\eta}^{y}n(\tau)d\tau\right]^{1/2}\right\}-\int_{\xi}^{x}\int_{\eta}^{y}\Im_0\left\{2\left[\int_{t}^{x}m(s)ds\int_{\tau}^{y}n(\sigma)d\sigma\right]^{1/2}\right\}m(t)n(\tau)d\tau\,dt;$$

г) $d\equiv e\equiv 0$, $a=a_1(y)+\lambda x$, $b=b_1(x)+\lambda y$, $c-ab-\lambda=m(x)n(y)$, $\lambda=\mathrm{const}$,

$$R=\Im_0\left\{2\left[\int_{\xi}^{x}m(t)dt\int_{\eta}^{y}n(\tau)d\tau\right]^{1/2}\right\}\exp\left[\lambda(xy-\xi\eta)+\int_{\xi}^{x}b_1(t)dt+\int_{\eta}^{y}a_1(\tau)d\tau\right].$$

При получении R в случаях в)–г) использованы результаты из [9] и [11]. $\Im_0$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

3. Предлагаемые новые варианты характеристических задач получаются заменой в (1)–(2) по крайней мере одного граничного значения на его нормальную производную. Остановимся на одной из них.

Задача 1. Найти функцию $U \in C^{2+1}(D) \cap C^{1+0}(D \cup p) \cap C^{0+1}(D \cup q)$, являющуюся в D регулярным решением уравнения (1), удовлетворяющую первым двум соотношениям (2) и условию

$$U_y(x, y_0) = \psi_0(x), \quad \psi_0 \in C^2(q).$$

Сформулированную задачу можно редуцировать к задаче Гурса. Для этого дважды проинтегрируем (1) по x в пределах от x_* до x $((x_*, y), (x, y) \in D)$, затем в полученном соотношении устремим x_* к x_0, а y — к y_0. Учитывая граничные условия, получим интегральное уравнение

$$a(x, y_0)\psi(x) + \int_{x_0}^{x} [(x-t)A(t) + B(t)]\psi(t)dt = r(x), \tag{7}$$

$$A(x) = a_{xx}(x, y_0) - c_x(x, y_0) + e(x, y_0), \quad B(x) = c(x, y_0) - 2a_x(x, y_0),$$

$$r(x) = \int_{x_0}^{x} \{(x-t)[b_t(t, y_0) - d(t, y_0)] - b(t, y_0)\}\psi_0(t)dt - \psi_0(x) +$$

$$+(x-x_0)[a(x_0, y_0)\varphi_1(y_0) + b(x_0, y_0)\varphi'(y_0) + c(x_0, y_0)\varphi(y_0) + \varphi_1'(y_0) + a_x(x_0, y_0)\varphi(y_0)] +$$

$$+\varphi'(y_0) + a(x_0, y_0)\varphi(y_0).$$

Здесь $\psi(x)$ — функция из третьего условия в (2). На основе анализа уравнения из (7) устанавливается

Теорема. *Если коэффициенты уравнения* (1) *принадлежат классу искомых решений и, кроме того,* $a(x, y_0) \neq 0$, $a \in C^{2+0}(D \cup q)$, $b, c \in C^{1+0}(D \cup q)$, *то задача* 1 *однозначно редуцируется к задаче Гурса. При этом* $\psi(x)$ *записывается через резольвенту уравнения* (7).

Если к условиям теоремы добавить любое из тождеств $A(x) \equiv 0$, $B(x) - xA(x) \equiv 0$, то $\psi(x)$ записывается в квадратурах.

В случае первого тождества

$$\psi(x) = \frac{r(x)}{a(x, y_0)} - \frac{1}{a(x, y_0)} \int_{x_0}^{x} \frac{B(\xi)r(\xi)}{a(\xi, y_0)} \left[\exp \int_{x}^{\xi} \frac{B(t)dt}{a(t, y_0)}\right] d\xi,$$

а в случае второго —

$$\psi(x) = \frac{r(x)}{a(x, y_0)} - \frac{x}{a(x, y_0)} \int_{x_0}^{x} \frac{A(\xi)r(\xi)}{a(\xi, y_0)} \left[\exp \int_{x}^{\xi} \frac{tA(t)dt}{a(t, y_0)}\right] d\xi.$$

При $a(x, y_0) \equiv 0$ тоже имеются две возможности явного решения (7), обеспечиваемые любым из двух наборов требований:

1) $c(x, y_0) \neq 0$ и $d \in C^{1+0}(D \cup q)$, $b, c \in C^{2+0}(D \cup q)$, $\psi_0 \in C^3(q)$. Тогда

$$\psi(x) = \frac{1}{c(x, y_0)} \left\{ r'(x) - \int_{x_0}^{x} T(\xi, y_0)r'(\xi) \left[\exp \int_{x}^{\xi} T(t, y_0)dt\right] d\xi \right\}, \quad T(x, y_0) = \frac{-c_x(x, y_0) + e(x, y_0)}{c(x, y_0)}.$$

2) $c(x, y_0) \equiv 0$, $e(x, y_0) \neq 0$, $b \in C^{3+0}(D \cup q)$, $e, d \in C^{2+0}(D \cup q)$, $\psi_0 \in C^4(q)$. Здесь $\psi(x) = r''(x)[e(x, y_0)]^{-1}$.

Условия принадлежности всех коэффициентов уравнения (1) классу искомых решений при этом должны сохраняться.

Аналогично могут быть исследованы и другие из указанных в начале данного пункта задач.

В заключение отметим, что подобные задачи для уравнений второго порядка изучались в [12], [13].

Литература

1. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии.* – М.: Высш. школа, 1995. – 301 с.
2. Rundell W., Stecher M. *Remarks concerning the supports of solutions of pseudoparabolic equation* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 63. – № 1. – P. 77–81.
3. Шхануков М.Х. *О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах* // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 4. – С. 689–699.
4. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. *Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка* // Докл. РАН. – 1987. – Т. 297. – № 3. – С. 547–552.
5. Векуа И.Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений.* – М-Л: ГТТИ, 1948. – 296 с.
6. Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М: Наука, 1981. – 448 с.
7. Жегалов В.И. *Трехмерный аналог задачи Гурса* // Неклассич. уравнения и уравнения смешан. типа. – Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1990. – С. 94–98.
8. Жегалов В.И., Севастьянов В.А. *Задача Гурса в четырехмерном пространстве* // Дифференц. уравнения. - 1996. – Т. 32. – № 10. – С. 1429–1430.
9. Жегалов В.И., Котухов М.П. *Об интегральных уравнениях для функции Римана* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 1. – С. 26-30.
10. Мюнтц Г. *Интегральные уравнения.* Т. 1. – М.: ГТТИ, 1934. – 330 с.
11. Чуриков В.С., Мащенко И.П. *Построение функции Римана для уравнения* $U_{xy}+\varphi(x)\psi(y)U=0$ // Научн. тр. Краснодарск. политехн. ин-та. – Краснодар, 1970. – Вып. 30. – С. 19–25.
12. Zhegalov V.I. *Relation between the boundary values of Goursat problem and the normal derivatives* // Conditionally Well-Posed Problems. – Moscow: TVP Sc. Publ., 1994. – P. 346–349.
13. Котухов М.П. *О некоторых дифференциальных свойствах решений одного уравнения в частных производных* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 5. – С. 59–62.

Казанский государственный университет

Поступили
полный текст 17.12.1997
краткое сообщение 11.11.1998