ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 9 (532)

УДК 510.5

Д.И. ИВАНОВ

О СЛАБО ИМПЛИКАТИВНО-СЕЛЕКТОРНЫХ МНОЖЕСТВАХ

В работе [1] авторами по n-местной булевой функции β были определены классы $K(\beta)$ слабо β-импликативно-селекторных множеств, где размерность этого класса — число существенных переменных в β, и описаны с точностью до включения все классы размерности 2 и 3. Данная статья является продолжением этой работы. Доказана

Теорема. *Если β — монотонная булева функция, зависящая существенно не более чем от четырех переменных, то класс $K(\beta)$ совпадает с одним из следующих классов*:

$$K(x \vee y) \subset K(xy \vee xz \vee yz) \subset K(u(xy \vee xz \vee yz) \vee xyz) \subset K(x),$$

где все включения строгие.

Пусть $A \subseteq N = \{0, 1, 2, \dots\}$ и β – n-местная булева функция (БФ) без фиктивных переменных. Если $x \in N$, то положим $\overline{x} = 1$, если $x \in A$ и $\overline{x} = 0$ иначе. Назовем A слабо β-импликативно-селекторным (β-ИС) множеством [1], если существует n-местная частично-рекурсивная функция (ЧРФ) f такая, что

$$(\forall x_1, x_2, \dots, x_n)\beta(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n) = 1 \Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) \downarrow \& f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cap A).$$

Будем говорить, что f соответствует A. Полагаем $K(\beta) = \{A \subseteq N : A$ — β-ИС множество$\}$, а число n назовем размерностью класса $K(\beta)$. В данной статье рассматриваются только монотонные булевы функции, число переменных в которых не превышает 4.

Лемма 1 ([1]). *$K(x \vee y) \subseteq K(\beta)$ для любой БФ β.*

Лемма 2 ([1]). *Если γ получена из БФ β в результате отождествления некоторых переменных, то $K(\beta) \subseteq K(\gamma)$.*

Лемма 3 ([1]). *Если $\beta \to \gamma$ — тождественно истинная БФ, то $K(\gamma) \subseteq K(\beta)$.*

Лемма 4 ([1]). *Если $\beta(x_1, x_2, \dots, x_n) \le x_i$ для подходящего $i \le n$, то $K(\beta) = \{A : A \subseteq N\} = K(x)$.*

Следствие 1. Если в каждой конъюнкции дизъюнктивной нормальной формы функции β встречается одна и та же переменная, то $K(\beta) = \{A : A \subseteq N\}$.

Следствие 2. Среди всех классов класс $K_0 = K(x \vee y) = K(x \vee y \vee z) = K(x \vee y \vee z \vee u)$ является наименьшим, а класс $K_\infty = K(x) = K(xy) = K(xyz) = K(xyzu)$ — наибольшим по включению.

Доказательство. Отождествим в $\beta = x \vee y \vee z$ переменную z с y, тогда согласно лемме 2 $K(x \vee y \vee z) \subseteq K(x \vee y)$, а по лемме 1 $K(x \vee y)$ — наименьший класс, следовательно, $K(x \vee y \vee z) = K(x \vee y)$. Аналогично доказывается, что $K(x \vee y \vee z \vee u) = K(x \vee y)$. С другой стороны, по лемме 4 любое множество $A \subseteq N$ принадлежит классу $K(x) = K(xy) = K(xyz) = K(xyzu)$. $\square$

Всякую монотонную БФ размерности 4 можно представить в виде $\gamma = uf(x,y,z) \vee g(x,y,z)$. Как известно, всевозможных различных монотонных БФ размерности 3 (исключая константы), в точности восемнадцать, значит, $g \in \{x, y, z, xy, xz, yz, x\vee y, x\vee z, z\vee y, x(y\vee z), y(x\vee z), z(x\vee y), x\vee yz, y\vee xz, z\vee xy, x\vee y\vee z, xy\vee xz\vee zy, xyz\}$. А так как БФ будем рассматривать с точностью до переименования переменных, то для функции f достаточно рассмотреть восемь возможностей, т. е. $f \in \{x, xy, x\vee y, x(y\vee z), x\vee y\vee z, x\vee yz, xy\vee xz\vee zy, xyz\}$. Кроме того, будем пользоваться известным утверждением: *сокращенная дизъюнктивная нормальная форма монотонной булевой функции, отличной от константы, единственна и не содержит отрицаний переменных.* Следующие леммы позволяют упростить процедуру выписывания монотонных БФ, зависящих от четырех переменных.

Лемма 5. *Если в дизъюнктивной нормальной форме функции β одна из конъюнкций есть переменная, скажем x, и хотя бы одна не содержит x, то $K(\beta) = K(x \vee y)$.*

Доказательство. Если функция удовлетворяет условию леммы, то реализующая ее формула может быть представлена в виде $\beta = x(1\vee g(u,y,z))\vee g'(u,y,z) = x\vee g'(u,y,z)$. Отождествим в β переменные z и u с y, получим $K(\beta) \subseteq K(x\vee y)$, а $K(x\vee y)$ — наименьший класс. □

Лемма 6. *Если $\beta_1 = uf(x,y,z)\vee g_1(x,y,z)$, $\beta_2 = uf(x,y,z)\vee g_2(x,y,z)$ и $f(x,y,z)$ — симметрическая функция, а $g_1(x,y,z)$ получена из $g_2(x,y,z)$ с помощью переименования переменных, то $K(\beta_1) = K(\beta_2)$.*

Учитывая вышесказанное, выпишем всевозможные различные монотонные БФ размерности 4, исключая те из них, которые заведомо совпадают с уже выписанными (с точностью до переименования переменных), а также заведомо принадлежат K_0 и K_∞. Получим

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= ux\vee yz, & \gamma_{14} &= u(x\vee y\vee z)\vee xz,\\
\gamma_2 &= ux\vee z(x\vee y), & \gamma_{15} &= u(x\vee y\vee z)\vee x(y\vee z),\\
\gamma_3 &= ux\vee y(x\vee z), & \gamma_{16} &= u(x\vee y\vee z)\vee xy\vee yz\vee zx,\\
\gamma_4 &= ux\vee xy\vee xz\vee yz, & \gamma_{17} &= u(x\vee y\vee z)\vee xyz,\\
\gamma_5 &= uxy\vee z(x\vee y), & \gamma_{18} &= u(x\vee yz)\vee xy,\\
\gamma_6 &= u(x\vee y)\vee xz, & \gamma_{19} &= u(x\vee yz)\vee yz,\\
\gamma_7 &= u(x\vee y)\vee x(y\vee z), & \gamma_{20} &= u(x\vee yz)\vee x(y\vee z),\\
\gamma_8 &= u(x\vee y)\vee z(x\vee y), & \gamma_{21} &= u(x\vee yz)\vee y(x\vee z),\\
\gamma_9 &= u(x\vee y)\vee xy\vee xz\vee yz, & \gamma_{22} &= u(x\vee yz)\vee xy\vee xz\vee yz,\\
\gamma_{10} &= u(x\vee y)\vee xyz, & \gamma_{23} &= u(x\vee yz)\vee xyz,\\
\gamma_{11} &= ux(y\vee z)\vee yz, & \gamma_{24} &= u(xy\vee yz\vee xz)\vee xy,\\
\gamma_{12} &= ux(y\vee z)\vee y(x\vee z), & \gamma_{25} &= u(xy\vee yz\vee xz)\vee x(y\vee z),\\
\gamma_{13} &= ux(y\vee z)\vee z(x\vee y), & \gamma_{26} &= u(xy\vee yz\vee xz)\vee xyz.
\end{aligned}$$

Заметим, что т. к. БФ рассматриваются с точностью до переименования переменных, то
$K(\gamma_{11}) = K(\gamma_{23}) = K(\gamma_{24})$,
$K(\gamma_{17}) = K(\gamma_{20})$,
$K(\gamma_9) = K(\gamma_{15})$,
$K(\gamma_5) = K(\gamma_{10}) = K(\gamma_{12}) = K(\gamma_{13}) = K(\gamma_{18}) = K(\gamma_{19}) = K(\gamma_{25})$,
$K(\gamma_4) = K(\gamma_{14}) = K(\gamma_{22})$.

Лемма 7. *$K(\beta) = K(x\vee y)$ как только β есть одна из следующих функций: γ_1, γ_2, γ_3, γ_6, γ_7, γ_8, γ_9, γ_{16}, γ_{21}, γ_{22}.*

Доказательство. Отождествим переменную u с переменной y и переменную z с переменной x в γ_2, γ_3 и отождествим переменную u с переменной x, переменную z с переменной y в остальных случаях. $\square$

Осталось рассмотреть четыре БФ, к которым добавим те функции, которые зависят менее, чем от четырех переменных и образуют различные классы [1].

$\beta_0 = x \vee y$,
$\beta_1 = \gamma_{17} = u(x \vee y \vee z) \vee xyz$,
$\beta_2 = xy \vee xz \vee yz$,
$\beta_3 = \gamma_{26} = u(xy \vee xz \vee yz) \vee xyz$,
$\beta_4 = \gamma_{10} = u(x \vee y) \vee xyz$,
$\beta_5 = \gamma_{23} = u(x \vee yz) \vee xyz$,
$\beta_\infty = x$.

Лемма 8. $K(\beta_2) = K(\beta_4) = K(\beta_5)$.

Доказательство. Отождествив в β_4 и β_5 переменную z с переменной y и переименовав u на z, получим функцию β_2. По лемме 2 $K(\beta_4) \subseteq K(\beta_2)$ и $K(\beta_5) \subseteq K(\beta_2)$. Переименовав в β_4 и β_5 u на z, получим функцию $\varphi = zx \vee zy \vee xyz$ такую, что $K(\varphi) = K(\beta_5) = K(\beta_6)$. Очевидно, $\varphi \to \beta_2$ является тождественно истинной БФ. По лемме 3 $K(\beta_2) \subseteq K(\varphi)$, а значит, $K(\beta_2) \subseteq K(\beta_4)$ и $K(\beta_2) \subseteq K(\beta_5)$. $\square$

Лемма 9. $K(\beta_1) \subseteq K(\beta_2) \subseteq K(\beta_3)$.

Доказательство. Отождествив в β_1 переменную z с переменной y и переименовав u на z, получим β_2. По лемме 2 $K(\beta_1) \subseteq K(\beta_2)$. С другой стороны, БФ $\beta_3 \to \beta_2$ тождественно истинная, и по лемме 3 $K(\beta_2) \subseteq K(\beta_3)$. $\square$

Следствие 3. Если β — монотонная функция, отличная от констант, зависящая не более чем от четырех переменных, то $K(\beta)$ совпадает с одним из следующих классов $K(\beta_0) \subseteq K(\beta_1) \subseteq K(\beta_2) \subseteq K(\beta_3) \subseteq K(\beta_\infty)$.

Осталось ответить на вопрос: все ли из приведенных включений строгие?

Предложение 1. $K(\beta_3) \subset K(\beta_\infty)$.

Доказательство. Достаточно построить множество, не являющееся слабо β_3-ИС множеством.

Для любого n из четырех чисел $\{4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3\}$, отнесем к A только одно число, причем, если $\varphi_n(4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3) \downarrow$ (где φ_n — четырехместная ЧРФ с клиниевским номером n) и

$$\varphi_n(4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3) \in \{4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3\},$$

то $\varphi_n(4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3)$ отнесем к A.

Предположим, что $\overline{A}$ является слабо β_3-ИС множеством с ЧРФ $f(x,y,z,t)$. Значит, существует номер k такой, что $f(x,y,z,t) = \varphi_k(x,y,z,t)$. По определению $\overline{A}$ $\beta_3(\overline{4k}, \overline{4k+1}, \overline{4k+2}, \overline{4k+3})$=1 (т. к. по меньшей мере три из четырех чисел $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ принадлежат $\overline{A}$). Значит,

$$\varphi_k(4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3) \downarrow \& \varphi_k(4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3) \in \{4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3\} \cap \overline{A}.$$

Но в этом случае по определению множества A

$$\varphi_k(4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3) \in A,$$

что противоречит соответствию f множеству $\overline{A}$. $\square$

Обозначим через $K^{(m)}$ класс всех слабо β_m-импликативно-селекторных множеств, где

$$\beta_m = \bigvee_{1 \le i \le m+1} (x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_{m+1}).$$

Предложение 2. *Для любых $m \in N$, $m \geq 2$, справедливо включение $K^{(m-1)} \subset K^{(m)}$.*

Доказательство. Будем по шагам определять m одноместных общерекурсивных функций (ОРФ) $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ и положим по определению $A_i = \{x : (\exists y > x)(g_i(y) \leq g_i(x))\}$, $0 \leq i < m$.

Если каждая функция g_i будет ОРФ, то каждое множество A_i будет рекурсивно-перечислимым и иметь ретрассируемое дополнение [2]. Следовательно, они и их дополнения будут полурекурсивными [3]. Если $x \equiv i \pmod m$, $0 \leq i < m$, то $x = my + i$ для подходящего $y \in N$. Тогда положим $x \in B \Leftrightarrow y \in \overline{A}_i$. Определим $(m+1)$-местную ОРФ f так: если среди чисел $x_0, x_1, \ldots, x_m \in N$ какие-то два равны, скажем, числу x, то положим $f(x_0, x_1, \ldots, x_m) = x$. Иначе два различные числа, например x_0, x_1 будут сравнимы по $\bmod m$. Значит, $x_0 = my_0 + i$ и $x_1 = my_1 + i$ для подходящих $y_0, y_1 \in N$, $0 \leq i < m$. Так как $\overline{A}_i$ — полурекурсивное множество, то найдется двухместная селекторная ОРФ p такая, что

$$(\forall x, y)(x \in \overline{A}_i \vee y \in \overline{A}_i \Leftrightarrow p(x, y) \in \overline{A}_i).$$

Положим $f(x_0, x_1, \ldots, x_m) = mp(y_0, y_1) + i$. Тогда очевидно, если среди чисел $x_0, x_1, \ldots, x_m$ не менее m принадлежат B, то $f(x_0, x_1, \ldots, x_m) \in B$, т.е. B является β_m-импликативно-селекторным множеством.

Теперь достаточно определить g_i, $0 \leq i < m$, так, чтобы для каждой m-местной ЧРФ f нашлись бы z и $i = 0, 1, \ldots, m-1$ такие, что $|\{y, y+1, \ldots, y+m-1\} \cap B| = m-1$ и либо $f(y, y+1, \ldots, y+m-1) \uparrow$, либо $f(y, y+1, \ldots, y+m-1) \notin \{y, y+1, \ldots, y+m-1\}$, либо $f(y, y+1, \ldots, y+m-1) = y + i \notin B$, где $y = mz$ и $|D|$ — число элементов конечного множества D.

Для достижения этого достаточно, чтобы

$$(\exists x > z)(g_i(x) \leq g_i(z)),$$
$$(\forall j \neq i)(\forall x > z)(i < m \Rightarrow g_j(x) > g_j(z)).$$

Пусть φ_e — m-местная ЧРФ с клиниевским номером e. Некоторые из чисел будем отмечать метками с номерами $0, 1, \ldots$, обозначая через $S(t)$ число, отмеченное меткой с номером S на шаге t. Перед шагом $t \geq 1$ ОРФ $g_0(x), g_1(x), \ldots, g_{m-1}(x)$ будут определены для всех $x < t$. На шаге 0 полагаем $g_0(0) = g_1(0) = \cdots = g_{m-1}(0) = 0 \& (\forall S)(S(0) = S)$.

Шаг $t > 0$. Ищем наименьшее число e такое, что $z = e(t) < t$ и для всех $j = 0, 1, \ldots, m-1$

$$(\forall x)(z < x < t \Rightarrow g_j(x) > g_j(z)),$$
$$\varphi_e(y, y+1, \ldots, y+m-1) = y + i,$$

для некоторого $i < m$ и $y = mz$. Если такое число есть, что выясняется эффективно, то для всех $j = 0, 1, \ldots, m-1$ и $S \geq 0$ полагаем

$$g_j(t) = \begin{cases} g_j(z), & \text{если } j = i; \\ g_j(t-1) + 1, & \text{если } j \neq i, \end{cases}$$

$$S(t) = \begin{cases} S(t-1), & \text{если } S \leq e; \\ S(t-1) + 1, & \text{если } S > e. \end{cases}$$

Далее переходим к шагу $t+1$. Если же такого числа e нет, то для всех $j = 0, 1, \ldots, m-1$ и $S \geq 0$ полагаем $g_j(t) = g_j(t-1)$, $S(t) = S(t-1)$ и тоже переходим к шагу $t+1$.

Заметим, что если на некотором шаге t метка с номером e была сопоставлена числу z и на дальнейших шагах больше не перемещалась, то либо $\varphi_e(y, y+1, \ldots, y+m-1) \uparrow$, либо $\varphi_e(y, y+1, \ldots, y+m-1) \notin \{y, y+1, \ldots, y+m-1\}$, либо $\varphi_e(y, y+1, \ldots, y+m-1) = y + i \in B$ для $y = mz$, $i < m$. Индукцией по e можно показать, что для каждого e такой шаг t найдется. Таким образом, B не является слабо β_{m-1}-ИС множеством. $\square$

Следствие 4. $K(\beta_2) \subset K(\beta_3)$.

Следствие 5. $K(\beta_0) \subset K(\beta_2)$.

Предложение 3. $K(\beta_1) = K(\beta_2)$.

Доказательство. Пусть $A \in K(\beta_2)$ и ЧРФ g соответствует A. Так как $K(\beta_1) \subseteq K(\beta_2)$, то необходимо построить ЧРФ f такую, что

$$(\forall x, y, z, u)(\beta_1(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{u}) = 1 \Rightarrow f(x, y, z, u) \downarrow \& f(x, y, z, u) \in \{x, y, z, u\} \cap A).$$

Предположим, что $\beta_1(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{u}) = 1$. Тогда $u \in A$ и $\{x, y, z\} \cap A \neq \varnothing$, или $x, y, z \in A$. В обоих случаях хотя бы два из трех значений $g(u, x, y)$, $g(u, x, z)$, $g(u, y, z)$ должны быть определены. Если в процессе их вычисления этого не случится, то считаем $f(x, y, z, u) \uparrow$. В противном случае, без потери общности, можно считать, что вычислены значения $g(u, x, y)$ и $g(u, x, z)$. Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. $g(u, x, y) = u$ или $g(u, x, z) = u$. Полагаем $f(x, y, z, u) = u$. Действительно, если $u \notin A$, то $x \notin A \vee y \notin A$ или $x \notin A \vee z \notin A$ и тогда $\beta_1(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{u}) = 0$.

Случай 2. $g(u, x, y) = g(u, x, z) = x$. Полагаем $f(x, y, z, u) = x$. Действительно, если $x \notin A$, то $u \notin A$ или $y, z \notin A$. В обоих случаях $\beta_1(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{u}) = 0$.

Случай 3. $g(u, x, y) = x$ и $g(u, x, z) = z$. Полагаем $f(x, y, z, u) = z$. Действительно, если $z \notin A$, то $u \notin A$ или $x \notin A$. Если $u \notin A$, то $\beta_1(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{u}) = 0$. Если же $u \in A$ и $x \notin A$, то $\beta_1(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{u}) = 0$, т.к. $g(u, x, y) = x \notin A$, а значит, $y \notin A$. Аналогично, если $g(u, x, y) = y$ и $g(u, x, z) = x$, то полагаем $f(x, y, z, u) = y$.

Случай 4. $g(u, x, y) = y$ и $g(u, x, z) = z$. Если $\beta_1(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{u}) = 1$, то $x, y, z \in A$, тогда $g(u, y, z) \downarrow$, или $u \in A$ и $y \in A$, или $z \in A$, и опять $g(u, y, z) \downarrow$, если же $u \in A$ и $x \in A$, то из равенства $g(u, x, z) = z$ заключаем, что $z \in A$. Поэтому продолжаем вычислять $g(u, y, z)$ и если $g(u, y, z) \uparrow$, то считаем $f(x, y, z, u) \uparrow$. Пусть $g(u, y, z) = v$. Если $v = u$, то возвращаемся к случаю 1, меняя x и y соответственно. Если же $v = y$ или $v = z$, то возвращаемся к случаю 2, меняя x и y или x и z. Поэтому полагаем $f(x, y, z, u) = v$. $\square$

Литература

1. Дегтев А.Н., Иванов Д.И. *Слабо импликативно-селекторные множества размерности* 3 // Дискр. матем. – 1999. – Т. 11. – № 3. – С. 126–132.
2. Yates C.E.M. *Recursively enumerable sets and retracing functions* // Zeitsehr. f. Math. Logic und Grundlagen d. Math. – 1962. – Bd. 8. – № 4. – P. 331–345.
3. Jockusch C. G. *Semirecursive sets and positive reducibility* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – V. 131. – № 2. – P. 420–436.

Тюменский государственный университет

Поступила 01.02.2004