ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 5 (444)

УДК 517.958:533.7

А.А. АМОСОВ, А.А. ЗЛОТНИК

ПОЛУДИСКРЕТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА С НЕГЛАДКИМИ ДАННЫМИ. РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ

В работе [1] построен и изучен полудискретный разностный по переменной x метод решения неоднородных начально-краевых задач для уравнений одномерного движения вязкого совершенного политропного газа с разрывными данными. Доказаны глобальные оценки приближенных решений и их сходимость к обобщенным решениям рассматриваемых задач. Одновременно установлено и существование обобщенных решений.

В данной работе продолжено исследование этого метода и получены оценки, выражающие регулярность решений. В § 1, 2 сформулированы рассматриваемые начально-краевые задачи и полудискретный метод. В § 3 получен ряд оценок решений вспомогательных полудискретных линейных параболических задач. В § 4 для приближенных решений при разрывных данных выведены оценки энергетических норм и L_∞-норм напряжения и теплового потока для $t \geq \delta > 0$ и (при дополнительных условиях на данные) для $t \geq 0$. Как следствие, аналогичные результаты получены в § 5 и для обобщенных решений начально-краевых задач. В § 6 дано доказательство оценок кинетической энергии и температуры в энергетической норме.

1. Начально-краевые задачи для уравнений движения вязкого газа

Рассмотрим систему квазилинейных дифференциальных уравнений одномерного движения вязкого совершенного политропного газа

$$D_t\eta = Du \quad \text{в} \ \ Q, \tag{1.1}$$

$$D_tu = D\sigma + g[x_e], \quad \sigma = \nu\rho Du - p, \quad p = k\rho\theta, \quad \rho = 1/\eta \quad \text{в} \ \ Q, \tag{1.2}$$

$$c_V D_t\theta = D\varpi + \sigma Du + f[x_e], \quad \varpi = \lambda\rho D\theta \quad \text{в} \ \ Q, \tag{1.3}$$

$$D_tx_e = u \quad \text{в} \ \ Q. \tag{1.4}$$

Искомые функции $\eta(x,t)$, $u(x,t)$, $\theta(x,t)$, $x_e(x,t)$ определены на $Q = Q_T = \Omega \times (0,T)$, где $\Omega = (0,X)$. Использованы обозначения $D = \frac{\partial}{\partial x}$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$. Кроме того, $g[x_e](x,t) = g(x_e(x,t),x,t)$, $f[x_e](x,t) = f(x_e(x,t),x,t)$. Данную систему уравнений дополним начальными условиями

$$(\eta,u,\theta,x_e)|_{t=0} = (\eta^0(x),u^0(x),\theta^0(x),x_e^0(x)) \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{1.5}$$

где $x_e^0(x) \equiv \int\limits_0^x \eta^0(x')\,dx'$, краевыми условиями

$$-\varpi|_{x=0} = \chi_0(t), \ \ \varpi|_{x=X} = \chi_X(t) \quad \text{на} \quad (0,T) \tag{1.6}$$

и одной из пар краевых условий

$$u|_{x=0} = u_0(t), \qquad u|_{x=X} = u_X(t) \qquad \text{на} \ \ (0,T), \tag{1.7$_1$}$$

$$\sigma|_{x=0} = -p_0(t), \quad u|_{x=X} = u_X(t) \qquad \text{на} \ \ (0,T), \tag{1.7$_2$}$$

$$\sigma|_{x=0} = -p_0(t), \quad \sigma|_{x=X} = -p_X(t) \quad \text{на} \ \ (0,T). \tag{1.7$_3$}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00214) и INTAS (код проекта 96-1061).

Задачу (1.1)–(1.6), (1.7$_m$) обозначим через $\mathcal{P}_m$, $m = \overline{1,3}$.

Считается, что функции $u_0, u_X, p_0, p_X, \chi_0, \chi_X$ определены при всех $m = \overline{1,3}$, причем те из них, которые не входят в краевые условия конкретной задачи $\mathcal{P}_m$, равны нулю. Введем обозначения $u_{0,X}$, $p_{0,X}$, $\chi_{0,X}$ для пар (u_0, u_X), (p_0, p_X), (χ_0, χ_X). Под нормой пары функций будем понимать сумму норм компонент.

Пусть $L_q(G)$ и $L_{q,r}(Q)$ — пространства Лебега с нормами $\|w\|_{L_q(G)}$ и $\|w\|_{L_{q,r}(Q)} = \big\| \|w\|_{L_q(\Omega)} \big\|_{L_r(0,T)}$, $q, r \in [1, \infty]$. Пусть $q' = q/(q-1)$. Положим $\|v\|_G = \|v\|_{L_2(G)}$, $(v, w)_G = \int\limits_G vw\, dG$. Пусть $W_2^{1,0}(Q)$, $V_q(Q)$ — банаховы пространства функций с нормами $\|w\|_{W_2^{1,0}(Q)} = (\|w\|_Q^2 + \|Dw\|_Q^2)^{1/2}$, $\|w\|_{V_q(Q)} = \|w\|_{L_{q,\infty}(Q)} + \|Dw\|_{L_q(Q)}$. Напомним неравенства

$$\|w\|_{L_{q,r}(Q)} \le c_0 \|w\|_{V_2(Q)}, \quad \|w|_{x=0}\|_{L_4(0,T)} + \|w|_{x=X}\|_{L_4(0,T)} \le c_0 \|w\|_{V_2(Q)},$$

где $q \in [2, \infty]$, $r \in [4, \infty]$, $(2q)^{-1} + r^{-1} = 1/4$. Через c (с индексами или без) обозначаются положительные постоянные, зависящие только от X и T, причем по T они неубывающие.

Пусть $\tau \in (0, T)$. Положим $w^{(\to\tau)}(t) = w(t + \tau)$, введем разность $\Delta^{(\tau)} w(t) = w(t + \tau) - w(t)$ и операторы усреднения и интегрирования $w_\tau(t) = \tau^{-1} \int\limits_t^{t+\tau} w(t')\, dt'$, $(I_t w)(t) = \int\limits_0^t w(t')\, dt'$. Пусть $V[0, T]$ — пространство функций ограниченной вариации на $[0, T]$ с нормой $\|w\|_{V[0,T]} = \sup\limits_{[0,T]} |w(t)| + \operatorname*{var}\limits_{[0,T]} w$. Определим полунорму $\|v\|^{\langle 0,1/2\rangle} = \sup\limits_{0<\tau<T} \tau^{-1/2} \|\Delta^{(\tau)} v\|_{Q_{T-\tau}}$ и норму $\|v\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} = \|v\|_{V_2(Q)} + \|v\|^{\langle 0,1/2\rangle}$.

Сформулируем условия на данные задачи $\mathcal{P}_m$. Пусть $N \ge 1$ — параметр.

- C$_1$) $\nu, k, c_V, \lambda \in L_\infty(\Omega)$ и $N^{-1} \le \nu(x) \le N$, $0 \le k(x) \le N$, $N^{-1} \le c_V(x) \le N$, $N^{-1} \le \lambda(x) \le N$ почти всюду (п. в.) в Ω.
- C$_2$) $\eta^0 \in L_\infty(\Omega)$, $u^0 \in L_2(\Omega)$, $\theta^0 \in L_1(\Omega)$ и $N^{-1} \le \eta^0(x) \le N$, $0 < \theta^0(x)$ п. в. в Ω, $\|u^0\|_{L_2(\Omega)} + \|\theta^0\|_{L_1(\Omega)} + \|\ln \theta^0\|_{L_1(\Omega)} \le N$. При $m = 1$ дополнительно предполагается, что $N^{-1} \le \|\eta^0\|_{L_1(\Omega)} + I_t(u_X - u_0)$ на $(0, T)$.
- C$_3$) $g(\chi, x, t)$, $f(\chi, x, t)$ — заданные на $\mathbb{R} \times Q$ измеримые функции, которые непрерывны по $\chi \in \mathbb{R}$ для почти всех $(x, t) \in Q$. Кроме того, $|g(\chi, x, t)| \le \overline{g}(x, t)$ и $0 \le f(\chi, x, t) \le \overline{f}(x, t)$ п. в. в $\mathbb{R} \times Q$, где $\|\overline{g}\|_{L_{2,1}(Q)} + \|\overline{f}\|_{L_1(Q)} \le N$.
- C$_4$) $\chi_{0,X} \in L_1(0, T)$, $u_{0,X} \in V[0, T]$, $p_{0,X} \in L_\infty(0, T)$, функции χ_0, χ_X, p_0, p_X неотрицательны. Кроме того, $\|\chi_{0,X}\|_{L_1(0,T)} \le N$, $\|u_{0,X}\|_{V[0,T]} \le N$, $\|p_{0,X}\|_{L_\infty(0,T)} \le N$. Предполагается также, что для всех $\tau \in (0, T)$ и почти всех $t \in (0, T - \tau)$ выполнено неравенство $p_\alpha(t + \tau) - p_\alpha(t) \le a^\tau(t) \int\limits_t^{t+\tau} p_\alpha(t')\, dt'$, $\alpha = 0, X$, где $a^\tau \in L_1(0, T)$, $a^\tau \ge 0$, и $\sup\limits_{0<\tau<T} \|a^\tau\|_{L_1(0,T)} \le N$.

В [1] в предположении, что выполнены условия C$_1$)–C$_4$), установлено существование глобального обобщенного решения задачи $\mathcal{P}_m$. Это решение удовлетворяет, в частности, оценкам

$$\begin{gathered} K(N)^{-1} \le \eta \ \text{ в } \ Q, \quad \|\eta\|_{L_\infty(Q)} + \|D_t \eta\|_Q + \|u\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} + \|x_e\|_{W_2^1(Q)} \le K(N), \\ 0 < \theta \ \text{ в } \ Q, \quad \|\theta\|_{V_1(Q)} \le K(N), \quad \|\theta\|_{L_{q_0, r_0}(Q)} + \|D\theta\|_{L_{q_1, r_1}(Q)} \le K_\varepsilon(N) \end{gathered} \tag{1.8}$$

с любыми $q_0, r_0 \in [1, \infty]$, $q_1, r_1 \in [1, 2]$ такими, что $(2q_0)^{-1} + r_0^{-1} = (1 + \varepsilon)/2$, $(2q_1)^{-1} + r_1^{-1} = 1 + \varepsilon/4$, $\varepsilon \in (0, 1)$. Через $K(N)$ (с индексами или без) обозначаем различные положительные неубывающие функции параметра N (в доказательствах аргумент N опускаем). Эти функции могут зависеть также от X и T, причем по T они неубывающие.

Ниже в § 5, 6 исследуется регулярность именно этого решения. Обратим внимание на то, что при выполнении условия

- C$_5$) $\|D_\chi g\|_{L_{\infty,2,1}((-a,a)\times Q)} + \|D_\chi f\|_{L_{\infty,1,1}((-a,a)\times Q)} \le C(a) \quad \forall a > 1$
  обобщенное решение единственно [2].

2. Полудискретный метод решения начально-краевых задач

Пусть $h = X/n$, $n \geq 2$. Введем узлы $x_i = ih$, $i = \overline{0,n}$, и $x_{i-1/2} = (i-1/2)h$, $i = \overline{1,n}$. Положим $\Omega_{1/2} = [0, x_1)$, $\Omega_{i-1/2} = (x_{i-1}, x_i)$ для $i = \overline{2, n-1}$ и $\Omega_{n-1/2} = (x_{n-1}, X]$. Положим также $\Omega_0 = [0, x_{1/2})$, $\Omega_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ для $i = \overline{1, n-1}$ и $\Omega_n = (x_{n-1/2}, X]$. Пусть $\Omega^{h;1} = (x_{1/2}, x_{n-1/2})$, $\Omega^{h;2} = (0, x_{n-1/2})$, $\Omega^{h;3} = \Omega$, $\Omega^{h;4} = (x_{1/2}, X)$ и $Q^{h;m} = Q_T^{h;m} = \Omega^{h;m} \times (0,T)$.

Введем пространства кусочно-постоянных функций $S^h = \{w \mid w(x) = w_i \text{ на } \Omega_i,\ i = \overline{0,n}\}$ и $S^h_{1/2} = \{v \mid v(x) = v_{i-1/2} \text{ на } \Omega_{i-1/2},\ i = \overline{1,n}\}$. Для $w \in S^h$ через $\widehat{w}$ обозначим функцию из $C(\overline{\Omega})$, совпадающую с w в узлах x_i, $i = \overline{0,n}$, и линейную на $\Omega_{i-1/2}$, $i = \overline{1,n}$. Для $v \in S^h_{1/2}$ через $\widehat{v}$ обозначим функцию из $C(\overline{\Omega})$, совпадающую с v в узлах $x_{i-1/2}$, $i = \overline{1,n}$, и линейную на Ω_i, $i = \overline{0,n}$. Предполагается, что функция $\widehat{v}$ доопределена некоторым образом при $x = 0,\ X$, причем если не задан иной способ доопределения, то $\widehat{v}(0) = v(0) = v_{1/2}$, $\widehat{v}(X) = v(X) = v_{n-1/2}$. При любом способе доопределения справедлива формула интегрирования по частям $(w, D\widehat{v})_\Omega = w\widehat{v}|_{x=0}^{x=X} - (D\widehat{w}, v)_\Omega$ $\forall w \in S^h$, $v \in S^h_{1/2}$. Для функций $w \in S^h, S^h_{1/2}$ верны неравенства $\|\widehat{w}\|_{L_q(\Omega)} \leq \|w\|_{L_q(\Omega)} \leq 2^{1/q}\|\widehat{w}\|_{L_q(\Omega)}$, $q \in [1,\infty]$.

Введем операторы $\pi^h : L_1(\Omega) \to S^h$, $\pi^h_{1/2} : L_1(\Omega) \to S^h_{1/2}$, сопоставляющие заданной функции ψ кусочно-постоянную функцию, равную на множествах Ω_i $(i = \overline{0,n})$, $\Omega_{i-1/2}$ $(i = \overline{1,n})$ соответствующим средним значениям функции ψ. Справедливы неравенства

$$\|\pi^h\psi\|_{L_q(\Omega)} \leq \|\psi\|_{L_q(\Omega)}, \quad \|\pi^h_{1/2}\psi\|_{L_q(\Omega)} \leq \|\psi\|_{L_q(\Omega)} \quad \forall\psi \in L_q(\Omega),\ \ q \in [1,\infty].$$

Для $v \in S^h_{1/2}$ положим $(I_h v)(x) = \int\limits_0^{x_i} v(x')\,dx'$ на Ω_i, $i = \overline{0,n}$.

Рассмотрим полудискретный аналог [1] системы уравнений (1.1)–(1.4)

$$D_t\eta^h = D\widehat{u}^h \quad \text{в} \quad Q, \tag{2.1}$$

$$D_t u^h = D\widehat{\sigma}^h + g^h \ \text{ в } \ Q^{h;m}, \quad \sigma^h = \nu^h\rho^h D\widehat{u}^h - p^h, \quad p^h = k^h\rho^h\theta^h \ \text{ в } \ Q, \tag{2.2}$$

$$c_V^h D_t\theta^h = D\widehat{\varpi}^h + \sigma^h D\widehat{u}^h + f^h \quad \text{в} \quad Q, \quad \varpi^h = \lambda^h\widetilde{\rho}^h D\widehat{\theta}^h \quad \text{в} \quad Q^{h;1}, \tag{2.3}$$

$$D_t x_e^h = u^h \quad \text{в} \quad Q. \tag{2.4}$$

Здесь $\nu^h = \pi^h_{1/2}\nu$, $k^h = \pi^h_{1/2}k$, $c_V^h = \pi^h_{1/2}c_V$, $\lambda^h = \pi^h\lambda$, $\rho^h = 1/\eta^h$, $\widetilde{\rho}^h = [\pi^h\eta^h]^{-1}$, $g^h = \pi^h g[\widehat{x}_e^h]$, $f^h = \pi^h_{1/2} f[\widehat{x}_e^h]$. Искомой является вектор-функция $(\eta^h, u^h, \theta^h, x_e^h)$ со свойствами $\eta^h, \theta^h \in C([0,T]; S^h_{1/2})$; $D_t\eta^h, D_t\theta^h \in L_1(Q)$; $u^h \in L_\infty(0,T;S^h)$, $D_t u^h \in L_1(Q^{h;m})$, $x_e \in C([0,T];S^h)$; $D_t x_e^h \in L_1(Q)$ и $\eta^h > 0$, $\theta^h > 0$ в Q. Ясно, что $u^h \in C([0,T]; L_\infty(\Omega^{h;m}))$. Систему уравнений (2.1)–(2.4) дополним начальными условиями

$$(\eta^h, u^h, \theta^h, x_e^h)|_{t=0} = (\eta^{0,h}, u^{0,h}, \theta^{0,h}, x_e^{0,h}) \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{2.5}$$

краевыми условиями

$$-\varpi^h|_{x=0} = \chi_0, \quad \varpi^h|_{x=X} = \chi_X \quad \text{на} \ \ (0,T) \tag{2.6}$$

и одной из пар краевых условий

$$u^h|_{x=0} = u_0, \qquad u^h|_{x=X} = u_X \qquad \text{на} \ \ (0,T), \tag{2.7_1}$$

$$\widehat{\sigma}^h|_{x=0} = -p_0, \quad u^h|_{x=X} = u_X \qquad \text{на} \ \ (0,T), \tag{2.7_2}$$

$$\widehat{\sigma}^h|_{x=0} = -p_0, \quad \widehat{\sigma}^h|_{x=X} = -p_X \quad \text{на} \ \ (0,T). \tag{2.7_3}$$

Здесь $\eta^{0,h} = \pi^h_{1/2}\eta^0$; $u^{0,h}(x) = (\pi^h u^0)(x)$ на $\Omega^{h;m}$, $u^{0,h}(x) = u_0(0^+)$ на Ω_0 при $m = 1$, $u^{0,h}(x) = u_X(0^+)$ на Ω_n при $m = 1,2$; $\theta^{0,h} = \pi^h_{1/2}\theta^0$ и $x_e^{0,h} = I_h\eta^{0,h}$. Задачу (2.1)–(2.6), (2.7_m) назовем *задачей* $\mathcal{P}_m^h$ $(m = 1,2,3)$.

При выполнении условий C_1)–C_4) существует решение этой задачи, для которого справедливы, в частности, оценки [1]

$$K(N)^{-1} \le \eta^h \le K(N), \tag{2.8}$$

$$\|D_t\eta^h\|_Q + \|\widehat{u}^h\|_{V_2^{(1,1/2)}(Q)} + \|\widehat{x}_e^h\|_{W_2^1(Q)} \le K(N), \tag{2.9}$$

$$\|\widehat{\theta}^h\|_{V_1(Q)} \le K(N), \quad \|\theta^h\|_{L_{q_0,r_0}(Q)} + \|D\widehat{\theta}^h\|_{L_{q_1,r_1}(Q)} \le K_\varepsilon(N) \tag{2.10}$$

с теми же q_0, r_0, q_1, r_1, ε, что и в (1.8). Ниже в § 4, 6 устанавливаются дополнительные оценки именно этого решения. Отметим, что выполнение условия C_5) гарантирует единственность решения задачи $\mathcal{P}_m^h$ (в этом случае правая часть системы (2.1)–(2.4) удовлетворяет локальному условию Липшица по переменным η^h, u^h, θ^h, x_e^h).

Замечание 2.1. Обратим внимание на то, что в [1] в краевых условиях задачи $\mathcal{P}_m^h$ вместо данных $u_{0,X}$, $p_{0,X}$ использовались их усреднения $(u_{0,X})_\tau$, $(p_{0,X})_\tau$. Полученные в [1] априорные оценки позволяют перейти к пределу при $\tau \to 0$ и заметить, что все результаты работы [1] верны и для задач $\mathcal{P}_m^h$ с неусредненными граничными данными.

3. Оценки решений полудискретных параболических задач

Рассмотрим полудискретное параболическое уравнение

$$D_t(\alpha v) = D\widehat{s} + f \quad \text{в} \quad Q^{h;m}, \quad s = \varkappa D\widehat{v} - \psi \quad \text{в} \quad Q, \tag{3.1}$$

где $v \in L_\infty(0,T;S^h)$, $D_t v \in L_1(Q^{h;m})$, а $s \in L_2(0,T;S^h_{1/2})$. Пусть $\alpha \in L_\infty(0,T;S^h)$, $\varkappa \in L_\infty(0,T;S^h_{1/2})$, $f \in L_1(0,T;S^h)$, $\psi \in L_2(0,T;S^h_{1/2})$, причем

$$N^{-1} \le \alpha \le N, \quad N^{-1} \le \varkappa \le N, \quad \|D_t\alpha\|_{L_{q_\alpha,r_\alpha}(Q)} \le N \tag{3.2}$$

с некоторыми $q_\alpha, r_\alpha \in [1,\infty]$, $(2q_\alpha)^{-1} + r_\alpha^{-1} = 1$. Дополним уравнение (3.1) начальным условием

$$v|_{t=0} = v^0 \quad \text{на} \quad \Omega^{h;m} \tag{3.3}$$

и одной из пар краевых условий

$$v|_{x=0} = v_0, \quad v|_{x=X} = v_X \quad \text{на} \ (0,T), \tag{3.4_1}$$

$$\widehat{s}|_{x=0} = s_0, \quad v|_{x=X} = v_X \quad \text{на} \ (0,T), \tag{3.4_2}$$

$$\widehat{s}|_{x=0} = s_0, \quad \widehat{s}|_{x=X} = s_X \quad \text{на} \ (0,T). \tag{3.4_3}$$

Здесь $v^0 \in S^h$, $v_{0,X} = (v_0, v_X) \in V[0,T]$, $s_{0,X} = (s_0, s_X) \in L_{4/3}(0,T)$. Задачу (3.1), (3.3), ($3.4_m$) обозначим через $\mathcal{L}_m^h$, $m = 1,2,3$.

Рассмотрим также полудискретное параболическое уравнение

$$D_t(\alpha v) = D\widehat{s} + f \quad \text{в} \quad Q, \quad s = \varkappa D\widehat{v} - \psi \quad \text{в} \quad Q^{h;\widetilde{m}}, \tag{3.5}$$

где $v \in L_\infty(0,T;S^h_{1/2})$, $D_t v \in L_1(Q)$, а $s \in L_2(0,T;S^h)$. Здесь $\widetilde{m} = 3$ при $m = 1$, $\widetilde{m} = 4$ при $m = 2$ и $\widetilde{m} = 1$ при $m = 3$. Предполагается, что $\alpha \in L_\infty(0,T;S^h_{1/2})$, $\varkappa \in L_\infty(0,T;S^h)$, $f \in L_1(0,T;S^h_{1/2})$, $\psi \in L_2(0,T;S^h)$, причем выполнены условия (3.2). Дополним уравнение (3.5) начальным условием

$$v|_{t=0} = v^0 \quad \text{на} \quad \Omega \tag{3.6}$$

и одной из пар краевых условий

$$\widehat{v}|_{x=0} = v_0, \quad \widehat{v}|_{x=X} = v_X \quad \text{на} \ (0,T), \tag{3.7_1}$$

$$\widehat{v}|_{x=0} = v_0, \quad s|_{x=X} = s_X \quad \text{на} \ (0,T), \tag{3.7_2}$$

$$s|_{x=0} = s_0, \quad s|_{x=X} = s_X \quad \text{на} \ (0,T). \tag{3.7_3}$$

Здесь $v^0 \in S^h_{1/2}$, а $v_{0,X}$, $s_{0,X}$ такие же, как и в задаче $\mathcal{L}^h_m$. Задачу (3.5), (3.6), (3.7$_m$) обозначим через $\overline{\mathcal{L}}^h_m$, $m = 1, 2, 3$.

Отметим, что способ доопределения $\widehat{s}|_{x=0,X}$ в задаче $\mathcal{L}_m$ и $\widehat{v}|_{x=0,X}$ в задаче $\overline{\mathcal{L}}_m$, вообще говоря, отличается от стандартного (см. § 2).

Введем функции $x^h \in S^h$ и $x^h_{1/2} \in S^h_{1/2}$ такие, что $x^h(x) = x_i$ на Ω_i, $i = \overline{0,n}$, и $x^h_{1/2}(x) = x_{i-1/2}$ на $\Omega_{i-1/2}$, $i = \overline{1,n}$. Положим $\widehat{x}^h_{1/2}(0) = 0$, $\widehat{x}^h_{1/2}(X) = X$. При рассмотрении задачи $\mathcal{L}^h_m$ положим $v_\Gamma = (1 - x^h/X)v_0 + (x^h/X)v_X$ и $s_\Gamma = 0$ при $m = 1$, $v_\Gamma = v_X$ и $s_\Gamma = s_0$ при $m = 2$, а также $v_\Gamma = 0$ и $s_\Gamma = (1 - x^h_{1/2}/X)s_0 + (x^h_{1/2}/X)s_X$ при $m = 3$. При рассмотрении задачи $\overline{\mathcal{L}}^h_m$ положим $v_\Gamma = (1 - x^h_{1/2}/X)v_0 + (x^h_{1/2}/X)v_X$ и $s_\Gamma = 0$ при $m = 1$, $v_\Gamma = v_0$ и $s_\Gamma = s_X$ при $m = 2$, а также $v_\Gamma = 0$ и $s_\Gamma = (1 - x^h/X)s_0 + (x^h/X)s_X$ при $m = 3$.

Ниже в § 3 под v понимается решение любой из задач $\mathcal{L}^h_m$, $\overline{\mathcal{L}}^h_m$.

Предложение 3.1. *Пусть $f = f^{(1)} + f^{(2)}$, где $f^{(1)} \in L_{q,r}(Q)$ с некоторыми $q, r \in [1, 2]$, $(2q)^{-1} + r^{-1} = 5/4$. Тогда справедливы оценки*

$$\|\widehat{v}\|_{V_2(Q)} \le K(N)\big(\|v^0\|_\Omega + \|\psi\|_Q + \|f^{(1)}\|_{L_{q,r}(Q)} + \max_{0\le t\le T} |(f^{(2)}, v - v_\Gamma)_{Q_t}|^{1/2} + \\ + \|s_{0,X}\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|v_{0,X}\|_{V[0,T]}\big), \tag{3.8}$$

$$\|\widehat{v}\|^{\langle 0,1/2\rangle} \le K(N)\big(\|\widehat{v}\|_{V_2(Q)} + \|\psi\|_Q + \|f^{(1)}\|_{L_{q,r}(Q)} + \|I_t f^{(2)}\|^{\langle 0,1/2\rangle} + \\ + \|s_{0,X}\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|v_{0,X}\|_{V[0,T]}\big). \tag{3.9}$$

Доказательство. Пусть v — решение задачи $\mathcal{L}^h_m$. Рассмотрим сначала случай $v_{0,X} \in W^1_1(0,T)$. Положим $w = v - v_\Gamma$, $\psi' = \psi - \varkappa D\widehat{v}_\Gamma$, $f' = f - D_t(\alpha v_\Gamma)$ и запишем уравнение (3.1) в виде

$$D_t(\alpha w) = D\widehat{s} + f' \quad \text{в} \quad Q^{h;m}, \qquad s = \varkappa D\widehat{w} - \psi' \quad \text{в} \quad Q. \tag{3.10}$$

Ясно, что $w|_{x=0} = 0$ при $m = 1$ и $w|_{x=X} = 0$ при $m = 1, 2$. Умножим уравнение (3.10) на w и проинтегрируем результат по $Q^{h;m}_t$. Интегрируя затем по частям, получим

$$\frac{1}{2}(\alpha w, w)_\Omega + (\varkappa D\widehat{w}, D\widehat{w})_{Q_t} = \frac{1}{2}(\alpha w, w)_\Omega|_{t=0} - \frac{1}{2}((D_t\alpha)w, w)_{Q_t} + \\ + (\psi', D\widehat{w})_{Q_t} + (f', w)_{Q_t} + (s_X, \widehat{w}|_{x=X})_{(0,t)} - (s_0, \widehat{w}|_{x=0})_{(0,t)}.$$

Отсюда следует

$$(8N)^{-1}\|\widehat{w}\|^2_{V_2(Q_t)} \le N\|w|_{t=0}\|^2_\Omega + (\|\psi\|_Q + N\|D\widehat{v}_\Gamma\|_Q)\|D\widehat{w}\|_{Q_t} + \\ + I_t\big[\|D_t\alpha\|_{L_{q_\alpha}(\Omega)}\big(\|w^2\|_{L_{q'_\alpha}(\Omega)} + \|v_\Gamma w\|_{L_{q'_\alpha}(\Omega)}\big)\big] + N\|D_t v_\Gamma\|_{L_{2,1}(Q)}\|w\|_{L_{2,\infty}(Q_t)} + \\ + \|f^{(1)}\|_{L_{q,r}(Q)}\|w\|_{L_{q',r'}(Q_t)} + \min_{0\le t\le T}\big|(f^{(2)}, v - v_\Gamma)_{Q_t}\big| + \|s_{0,X}\|_{L_{4/3}(0,T)}\|\widehat{w}\|_{L_{\infty,4}(Q_t)}.$$

Учитывая, что $\|D_t v_\Gamma\|_{L_{2,1}(Q)} + \|v_\Gamma\|_{L_\infty(Q)} \le c\|v_{0,X}\|_{V[0,T]}$, имеем

$$\|\widehat{w}\|^2_{V_2(Q_t)} \le K_1 I_t\big[\|D_t\alpha\|_{L_{q_\alpha}(\Omega)}\|w\|^2_{L_{2q'_\alpha}(\Omega)}\big] + K_2 d^2,$$

где d — сумма слагаемых, стоящая в правой части оценки (3.8).

Воспользовавшись мультипликативной оценкой

$$\|w\|^2_{L_{2q'_\alpha}(\Omega)} \le c_X\, \|\widehat{w}\|^{2-1/q_\alpha}_\Omega (\|\widehat{w}\|_\Omega + \|D\widehat{w}\|_\Omega)^{1/q_\alpha}$$

и неравенством Гёльдера, придем к неравенству

$$\|\widehat{w}\|^2_{V_2(Q_t)} \le K_3 I_t\big[(\|D_t\alpha\|^{r_\alpha}_{L_{q_\alpha}(\Omega)} + \|D_t\alpha\|_{L_{q_\alpha}(\Omega)})\|\widehat{w}\|^2_\Omega\big] + K_4 d^2.$$

Из него в силу леммы Гронуолла следует оценка $\|\widehat{w}\|_{V_2(Q)} \le K_5 d$. Осталось заметить, что $\|\widehat{v}\|_{V_2(Q)} \le \|\widehat{w}\|_{V_2(Q)} + c\|v_{0,X}\|_{L_\infty(0,T)} \le K_6 d$.

Докажем теперь оценку (3.9). Применяя к уравнению (3.1) оператор $\varDelta^{(\tau)}I_t$ и пользуясь формулой $\varDelta^{(\tau)}I_t\varphi = \tau\varphi_\tau$, приходим к равенству

$$\alpha^{(\to\tau)}\varDelta^{(\tau)}v + (\varDelta^{(\tau)}\alpha)v = \tau D\widehat{s}_\tau + \tau f_\tau^{(1)} + \varDelta^{(\tau)}g \quad \text{в} \quad Q_{T-\tau}^{h;m},$$

где $g = I_t f^{(2)}$. Умножая это равенство скалярно в $L_2(Q_{T-\tau}^{h;m})$ на $\varDelta^{(\tau)}w$ и учитывая, что $v = w + v_\Gamma$, получим

$$\begin{aligned}(\alpha^{(\to\tau)}\varDelta^{(\tau)}w, \varDelta^{(\tau)}w)_{Q_{T-\tau}} &= -(\alpha^{(\to\tau)}\varDelta^{(\tau)}v_\Gamma, \varDelta^{(\tau)}w)_{Q_{T-\tau}} - \\ &- ((\varDelta^{(\tau)}\alpha)v, \varDelta^{(\tau)}w)_{Q_{T-\tau}} - \tau(s_\tau, \varDelta^{(\tau)}D\widehat{w})_{Q_{T-\tau}} + \tau((s_X)_\tau, \varDelta^{(\tau)}\widehat{w}|_{x=X})_{(0,T-\tau)} - \\ &- \tau((s_0)_\tau, \varDelta^{(\tau)}\widehat{w}|_{x=0})_{(0,T-\tau)} + \tau(f_\tau^{(1)}, \varDelta^{(\tau)}w)_{Q_{T-\tau}} + (\varDelta^{(\tau)}g, \varDelta^{(\tau)}w)_{Q_{T-\tau}}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}N^{-1}\|\varDelta^{(\tau)}w\|_{Q_{T-\tau}}^2 &\le N\|\varDelta^{(\tau)}v_\Gamma\|_{Q_{T-\tau}}\|\varDelta^{(\tau)}w\|_{Q_{T-\tau}} + \\ &+ \sqrt{2}\|\alpha\|_{L_\infty(Q)}^{1/2}\|\varDelta^{(\tau)}\alpha\|_{L_{q_\alpha,r_\alpha}(Q_{T-\tau})}^{1/2}\|v\|_{L_{2q'_\alpha,2r'_\alpha}(Q)}\|\varDelta^{(\tau)}w\|_{Q_{T-\tau}} + \\ &+ 2\tau\|s\|_Q\|D\widehat{w}\|_Q + 2\tau\|s_{0,X}\|_{L_{4/3}(0,T)}\|\widehat{w}\|_{L_{\infty,4}(Q)} + \\ &+ 2\tau\|f^{(1)}\|_{L_{q,r}(Q)}\|w\|_{L_{q',r'}(Q)} + \tau^{1/2}\|g\|^{\langle 0,1/2\rangle}\|\varDelta^{(\tau)}w\|_{Q_{T-\tau}}.\end{aligned}$$

Принимая во внимание оценки

$$\|\varDelta^{(\tau)}\alpha\|_{L_{q_\alpha,r_\alpha}(Q_{T-\tau})} \le \tau\|D_t\alpha\|_{L_{q_\alpha,r_\alpha}(Q)},$$
$$\|v\|_{L_{2q'_\alpha,2r'_\alpha}(Q)} \le \mathrm{c}_0\|\widehat{v}\|_{V_2(Q)}, \quad \|\widehat{w}\|_{L_{\infty,4}(Q)} \le c\|\widehat{v}\|_{V_2(Q)} + \|v_{0,X}\|_{L_4(0,T)}$$

и условие (3.2), имеем

$$\begin{aligned}\|\widehat{w}\|^{\langle 0,1/2\rangle} &\le K_7\big(\|v_\Gamma\|^{\langle 0,1/2\rangle} + \|\widehat{v}\|_{V_2(Q)} + \|\widehat{w}\|_{V_2(Q)} + \\ &+ \|\psi\|_Q + \|s_{0,X}\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|f^{(1)}\|_{L_{q,r}(Q)} + \|g\|^{\langle 0,1/2\rangle}\big).\end{aligned}$$

Отсюда в силу оценки $\|v_\Gamma\|^{\langle 0,1/2\rangle} \le c\|v_{0,X}\|_{V[0,T]}$ следует (3.9).

Рассмотрим теперь случай $v_{0,X} \in V[0,T]$. Пусть $v^{(\tau)}$ — решение задачи $\mathcal{L}_m^h$, в которой данные $v_{0,X}$ заменены на $(v_{0,X})_\tau$ (при $t > T$ полагаем $v_{0,X}(t) = v_{0,X}(T)$). Поскольку $\|(v_{0,X})_\tau\|_{V[0,T]} \le \|v_{0,X}\|_{V[0,T]}$, то для решений $v^{(\tau)}$ справедлива равномерная по τ оценка

$$\|\widehat{v}^{(\tau)}\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} \le K\big(\|v^0\|_\Omega + \|\psi\|_Q + \|f\|_{L_{2,1}(Q)} + \|s_{0,X}\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|v_{0,X}\|_{V[0,T]}\big),$$

являющаяся частным случаем оценки (3.8). В силу этой оценки существуют последовательность $\tau_k \to 0$ и функция $v \in L_\infty(0,T;S^h)$ такие, что $v^{(\tau_k)} \to v$ сильно в $L_p(0,T;S^h)$ для всех $p \in [1,\infty)$ и $*$-слабо в $L_\infty(0,T;S^h)$. Переходя к пределу в уравнениях

$$\alpha v^{(\tau_k)} = \alpha|_{t=0}v^0 + DI_t\widehat{s}^{(\tau_k)} + I_t f \quad \text{в} \quad Q^{h;m}, \quad s^{(\tau_k)} = \varkappa D\widehat{v}^{(\tau_k)} - \psi \quad \text{в} \quad Q$$

и учитывая краевые условия задачи для $v^{(\tau_k)}$, убеждаемся в том, что функция v является решением задачи $\mathcal{L}_m^h$. Неравенства (3.8), (3.9) для этой функции получаются предельным переходом в соответствующих неравенствах для функций $v^{(\tau_k)}$.

Получение оценок (3.8), (3.9) для решения задачи $\overline{\mathcal{L}}_m^h$ проводится точно так же.

Введем $\zeta \in W_1^1(0,T)$ — функцию, играющую роль весовой.

Предложение 3.2. *Пусть $f = f^{(1)} + f^{(2)}$, где $\zeta f^{(1)} \in L_{q,r}(Q)$ с некоторыми $q, r \in [1,2]$, $(2q)^{-1} + r^{-1} = 5/4$. Тогда справедливы оценки*

$$\|\zeta\widehat{v}\|_{V_2(Q)} \le K(N)\big(\|\zeta(0)v^0\|_\Omega + \|\zeta\psi\|_Q + \|(D_t\zeta)v\|_{L_{q_0,r_0}(Q)} + \|\zeta f^{(1)}\|_{L_{q,r}(Q)} + \\ + \max_{0\le t\le T}\big|(\zeta^2 f^{(2)}, v - v_\Gamma)_{Q_t}\big|^{1/2} + \|\zeta s_{0,X}\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|\zeta v_{0,X}\|_{V[0,T]}\big),$$

$$\|\zeta v\|^{\langle 0,1/2\rangle} \le K(N)\big(\|\zeta\widehat{v}\|_{V_2(Q)} + \|\zeta\psi\|_Q + \|(D_t\zeta)v\|_{L_{q_0,r_0}(Q)} + \|\zeta f^{(1)}\|_{L_{q,r}(Q)} + \\ + \|I_t(\zeta f^{(2)})\|^{\langle 0,1/2\rangle} + \|\zeta s_{0,X}\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|\zeta v_{0,X}\|_{V[0,T]}\big)$$

с произвольными $q_0, r_0 \in [1,2]$, $(2q_0)^{-1} + r_0^{-1} = 5/4$.

Доказательство. Пусть v — решение задачи $\mathcal{L}_m^h$ (или задачи $\overline{\mathcal{L}}_m^h$). Как нетрудно видеть, функция ζv является решением задачи $\mathcal{L}_m^h$ (или задачи $\overline{\mathcal{L}}_m^h$), в которой функции ψ, f, v^0, $v_{0,X}$, $s_{0,X}$ заменены на $\zeta\psi$, $\zeta f + (D_t\zeta)\alpha v$, $\zeta(0)v^0$, $\zeta v_{0,X}$, $\zeta s_{0,X}$ соответственно. Поэтому сформулированные оценки верны в силу предложения 3.1 (и линейности сответствующей задачи).

Получим для функции s оценки типа указанных в предложении 3.2. Для параболических задач подобные оценки содержатся в [3].

Положим $\widehat{v}^0|_{x=0} = v_0(0^+)$ при $m = 1$ и $\widehat{v}^0|_{x=X} = v_X(0^+)$ при $m = 1, 2$.

Предложение 3.3. *Пусть $\|D_t\varkappa\|_{L_{q_\varkappa,r_\varkappa}(Q)} \le N$ с некоторыми $q_\varkappa, r_\varkappa \in [1,\infty]$, $(2q_\varkappa)^{-1} + r_\varkappa^{-1} = 1$. Пусть $D_t(\zeta\varkappa^{-1}\psi) \in L_1(Q)$, $\zeta v_{0,X} \in W^1_{4/3}(0,T)$, $\zeta s_{0,X} \in V[0,T]$. Тогда справедлива оценка*

$$\|\zeta\widehat{s}\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} \le K(N)\big(\|(\zeta s)^0\|_\Omega + \|\zeta f\|_Q + \|(D_t\alpha)\zeta v\|_Q + \|(D_t\zeta)v\|_Q + \\ + \|(D_t(\zeta\varkappa^{-1}\psi))\zeta(s - s_\Gamma)\|^{1/2}_{L_1(Q)} + \|\zeta\varkappa^{-1}\psi\|^{\langle 0,1/2\rangle} + \|D_t(\zeta v_{0,X})\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|\zeta s_{0,X}\|_{V[0,T]}\big), \quad (3.11)$$

где $(\zeta s)^0 = \varkappa|_{t=0}(\zeta D\widehat{v^0} - \zeta\varkappa^{-1}\psi)|_{t=0}$.

Доказательство. Рассмотрим задачу $\mathcal{L}_m^h$. Умножим обе части равенства $s = \varkappa D\widehat{v} - \psi$ на $\varkappa^{-1}\zeta$, продифференцируем результат по t и получим

$$D_t(\varkappa^{-1}\zeta s) = DD_t(\zeta\widehat{v}) + \widetilde{f} \quad \text{в} \quad Q,$$

где $\widetilde{f} = -D_t(\varkappa^{-1}\zeta\psi)$. Поскольку в силу уравнения (3.1) верно равенство

$$D_t(\zeta v) = \alpha^{-1}D(\zeta\widehat{s}) + \widetilde{\psi} \quad \text{в} \quad Q^{h;m},$$

где $\widetilde{\psi} = \alpha^{-1}\zeta f - \alpha^{-1}(D_t\alpha)\zeta v + (D_t\zeta)v$, то, принимая во внимание начальные и краевые условия задачи $\mathcal{L}_m^h$, замечаем, что функция ζs является решением задачи типа $\overline{\mathcal{L}}_{4-m}^h$

$$D_t(\varkappa^{-1}\zeta s) = D\widehat{\omega} + \widetilde{f} \quad \text{в} \quad Q, \quad \omega = \alpha^{-1}D(\zeta\widehat{s}) + \widetilde{\psi} \quad \text{в} \quad Q^{h;m}, \quad (3.12)$$

$$(\zeta s)|_{t=0} = (\zeta s)^0, \quad (3.13)$$

$$\omega|_{x=0} = D_t(\zeta v_0), \quad \omega|_{x=X} = D_t(\zeta v_X) \quad \text{на } (0,T) \quad \text{при } m = 1, \quad (3.14_1)$$

$$\zeta\widehat{s}|_{x=0} = \zeta s_0, \quad \omega|_{x=X} = D_t(\zeta v_X) \quad \text{на } (0,T) \quad \text{при } m = 2, \quad (3.14_2)$$

$$\zeta\widehat{s}|_{x=0} = \zeta s_0, \quad \zeta\widehat{s}|_{x=X} = \zeta s_X \quad \text{на } (0,T) \quad \text{при } m = 3. \quad (3.14_3)$$

Применяя предложение 3.1, приходим к оценке (3.11).

Аналогичным образом выводится оценка (3.11) в случае задачи $\overline{\mathcal{L}}_m^h$.

Перейдем к оценкам v и s в L_∞-норме.

Предложение 3.4. *Пусть $\|D_t\alpha\|_{L_{q_\alpha,r_\alpha}(Q)} \le N$ с некоторыми $q_\alpha, r_\alpha \in [1,\infty]$, $(2q_\alpha)^{-1} + r_\alpha^{-1} = 1 - \varepsilon_\alpha/2$, $\varepsilon_\alpha \in (0,1)$. Тогда справедлива оценка*

$$\|v\|_{L_\infty(Q)} \le K_\varepsilon(N)(\|v^0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\psi\|_{L_{2q_1,2r_1}(Q)} + \|f\|_{L_{q_2,r_2}(Q)} + \|v_{0,X}\|_{L_\infty(0,T)} + \|s_{0,X}\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)}) \quad (3.15)$$

для всех $q_i, r_i \in [1,\infty]$ $(i = 1,2)$ таких, что $(2q_i)^{-1} + r_i^{-1} = 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_\alpha$, и $r_\varepsilon = 2/(1-\varepsilon)$. Оценка (3.15) верна и для $q_2 = \infty$, $r_2 = 1$.

Доказательство оценки проводится методом Мозера ([4], с. 221-223) аналогично тому, как доказаны соответствующие оценки в [5], [6], [1].

Предложение 3.5. *Пусть* $\|D_t\varkappa\|_{L_{q_\varkappa,r_\varkappa}(Q)} \le N$ *с некоторыми* $q_\varkappa, r_\varkappa \in [1,\infty]$, $(2q_\varkappa)^{-1}+r_\varkappa^{-1} = 1-\varepsilon_\varkappa/2$, $\varepsilon_\varkappa \in (0,1)$ *и* $D_t(\zeta\varkappa^{-1}\psi) \in L_1(Q)$, $D_t(\zeta v_{0,X}) \in L_1(0,T)$. *Тогда справедливы оценки*

$$\|\zeta s\|_{L_\infty(Q)} \le K_\varepsilon(N)(\|(\zeta s)^0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\zeta f\|_{L_{2q_1,2r_1}(Q)} + \|(D_t\alpha)\zeta v\|_{L_{2q_2,2r_2}(Q)} + \|(D_t\zeta)v\|_{L_{2q_3,2r_3}(Q)} + \\ + \|D_t(\zeta\varkappa^{-1}\psi)\|_{L_{q_4,r_4}(Q)} + \|D_t(\zeta v_{0,X})\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)} + \|\zeta s_{0,X}\|_{L_\infty(0,T)}), \tag{3.16}$$

$$\|\zeta s\|_{L_\infty(Q)} \le K_\varepsilon(N)(\|(\zeta s)^0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|\zeta f\|_{L_{2q_1,2r_1}(Q)} + \\ + \|(D_t\alpha)\zeta v\|_{L_{2q_2,2r_2}(Q)} + \|(D_t\zeta)D\widehat{v}\|_{L_{q_3,r_3}(Q)} + \|D_t(\zeta\varkappa^{-1}\psi)\|_{L_{q_4,r_4}(Q)} + \\ + \|D_t(\zeta v_{0,X}) - (D_t\zeta)v_{0,X}\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)} + \|\zeta s_{0,X}\|_{L_\infty(0,T)}) \tag{3.17}$$

для всех $q_i, r_i \in [1,\infty]$ $(1 \le i \le 4)$ *таких, что* $(2q_i)^{-1} + r_i^{-1} = 1-\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_\varkappa$, *и* $r_\varepsilon = 2/(1-\varepsilon)$. *Они справедливы и для* $q_4 = \infty$, $r_4 = 1$, *а оценка* (3.17) — *и для* $q_3 = \infty$, $r_3 = 1$.

Доказательство. Рассмотрим случай задачи $\mathcal{L}_m^h$. Для вывода оценки (3.16) следует воспользоваться тем, что функция ζs является решением задачи (3.12), (3.13), (3.14$_m$) (типа $\overline{\mathcal{L}}_{4-m}^h$), и применить предложение 3.4. Оценка (3.17) получится, если в уравнениях (3.12) взять $\widetilde{\psi} = \alpha^{-1}\zeta f - \alpha^{-1}(D_t\alpha)\zeta v$, $\widetilde{f} = -D_t(\varkappa^{-1}\zeta\psi) + (D_t\zeta)D\widehat{v}$, а в краевых условиях (3.14$_m$) заменить $D_t(\zeta v_{0,X})$ на $D_t(\zeta v_{0,X}) - (D_t\zeta)v_{0,X}$.

Аналогично рассматривается случай задачи $\overline{\mathcal{L}}_m^h$.

4. Оценки решений полудискретных задач $\mathcal{P}_m^h$

Сформулируем результаты об оценках в нормах $V_2^{\langle 1,1/2\rangle}$ и L_∞ напряжения σ^h и теплового потока ϖ^h для $t \ge \delta > 0$ и (при дополнительных условиях на данные) для $t \ge 0$, а также некоторые их следствия для функций u^h, θ^h.

Пусть функция $\zeta \in W_2^1(0,T)$ такова, что $\|D_t\zeta\|_{L_2(0,T)} \le N$ и $\zeta\,|_{t=0} = 0$.

Теорема 4.1. 1. *Пусть выполнены условия* C$_1$)–C$_4$) *и условия*

$$\|\zeta\,\overline{g}\|_Q + \|\zeta^2\overline{f}\|_Q \le N, \tag{4.1}$$

$$\|D_t(\zeta u_{0,X})\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|\zeta p_{0,X}\|_{V[0,T]} + \|\zeta^2\chi_{0,X}\|_{V[0,T]} \le N. \tag{4.2}$$

Тогда справедлива оценка

$$\|D_t(\zeta u^h)\|_{Q^{h;m}} + \|D_t(\zeta^2\theta^h)\|_Q + \|\zeta\widehat{\sigma}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} + \|\zeta^2\widehat{\varpi}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} \le K(N). \tag{4.3}$$

Как следствие,

$$\|\zeta u^h\|_{L_\infty(Q)} + \|\zeta^2\theta^h\|_{L_\infty(Q)} + \|D(\zeta\widehat{u}^h)\|_{L_{q,r}(Q)} + \|D(\zeta^2\widehat{\theta}^h)\|_{L_{q,r}(Q)} \le K(N) \tag{4.4}$$

для всех $q, r \in [1,\infty]$, $(2q)^{-1} + r^{-1} = 1/4$.

2. *Если дополнительно*

$$\|\zeta^2\,\overline{g}\|_{L_{2q_1,2r_1}(Q)} + \|\zeta^3\overline{f}\|_{L_{2q_2,2r_2}(Q)} \le N,\ \|D_t(\zeta^2 u_{0,X}) - D_t(\zeta^2)u_{0,X}\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)} \le N \tag{4.5}$$

при некоторых $q_i, r_i \in [1,\infty]$ $(i = 1,2)$ *таких, что* $(2q_i)^{-1} + r_i^{-1} = 1-\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$, $r_\varepsilon = 2/(1-\varepsilon)$, *то верна оценка*

$$\|\zeta^2\sigma^h\|_{L_\infty(Q)} + \|\zeta^3\varpi^h\|_{L_\infty(Q)} \le K_\varepsilon(N). \tag{4.6}$$

Теорема 4.2. 1. *Пусть выполнены условия* C_1)–C_4) *и условия*

$$\|\overline{g}\|_Q + \|\overline{f}\|_Q \le N, \quad \|Du^0\|_\Omega + \|D\theta^0\|_\Omega \le N, \tag{4.7}$$

$$\|D_t u_{0,X}\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|p_{0,X}\|_{V[0,T]} + \|\chi_{0,X}\|_{V[0,T]} \le N. \tag{4.8}$$

Пусть также выполнены условия согласования

$$u_0(0^+) = u^0(0) \ \text{ при } \ m = 1 \ \text{ и } \ u_X(0^+) = u^0(X) \ \text{ при } \ m = 1, 2. \tag{4.9}$$

Тогда справедлива оценка

$$\|D_t u^h\|_{Q^{h;m}} + \|D_t\theta^h\|_Q + \|\widehat{\sigma}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} + \|\widehat{\varpi}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} \le K(N).$$

Как следствие,

$$\|u^h\|_{L_\infty(Q)} + \|\theta^h\|_{L_\infty(Q)} + \|D\widehat{u}^h\|_{L_{q,r}(Q)} + \|D\widehat{\theta}^h\|_{L_{q,r}(Q)} \le K(N)$$

для всех $q, r \in [1, \infty]$, $(2q)^{-1} + r^{-1} = 1/4$.

2. *Пусть дополнительно выполнены условия*

$$\|\overline{g}\|_{L_{2q_1,2r_1}(Q)} + \|\overline{f}\|_{L_{2q_2,2r_2}(Q)} \le N, \quad \|D_t u_{0,X}\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)} \le N \tag{4.10}$$

при некоторых $q_i, r_i \in [1, \infty]$, $(i = 1, 2)$ *таких, что* $(2q_i)^{-1} + r_i^{-1} = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, 1]$, $r_\varepsilon = 2/(1 - \varepsilon)$. *Пусть также*

$$\|Du^0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|D\theta^0\|_{L_\infty(\Omega)} \le N. \tag{4.11}$$

Тогда верна оценка $\|\sigma^h\|_{L_\infty(Q)} + \|\varpi^h\|_{L_\infty(Q)} \le K_\varepsilon(N)$.

Доказательство теоремы 4.1 представим в виде последовательности лемм. Пусть сначала выполнены условия п. 1.

Лемма 4.1. *Справедливы оценки*

$$\|\zeta\widehat{\theta}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} \le K(\|\zeta\sigma^h\|_{L_{\infty,2}(Q)} + 1), \tag{4.12}$$

$$\|\zeta^2\widehat{\varpi}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} \le K(\varepsilon^{-1}\|\zeta\sigma^h\|^2_{L_{\infty,2}(Q)} + \varepsilon\|\zeta\sigma^h\|^2_{L_{2,\infty}(Q)} + 1) \ \ \forall\varepsilon \in (0, 1]. \tag{4.13}$$

Доказательство. Функцию θ^h можно рассматривать как решение задачи $\overline{\mathcal{L}}_3^h$ с $\alpha = c_V^h$, $\varkappa = \lambda^h\widetilde{\rho}^h$, $\psi = 0$ и с $\sigma^h D\widehat{u}^h + f^h$ в роли f. Заметим, что $N^{-1} \le \alpha \le N$, $\|D_t\varkappa\|_Q \le N^3\|D_t\eta^h\|_Q \le K$ (см. (2.8), (2.9)). Применяя сначала предложение 3.2, пользуясь оценками (2.9), (2.10) и условиями на данные, имеем

$$\begin{aligned}
\|\zeta\widehat{\theta}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} &\le K\big(\|\zeta\sigma^h D\widehat{u}^h\|_{L_{2,1}(Q)} + \|\zeta f^h\|_{L_{6/5}(Q)} + \|(D_t\zeta)\theta^h\|_{L_{2,1}(Q)} + \\
&+ \|\zeta\chi_{0,X}\|_{L_{4/3}(0,T)}\big) \le K\big(\|\zeta\sigma^h\|_{L_{\infty,2}(Q)}\|D\widehat{u}^h\|_Q + \|\zeta^2\overline{f}\|^{1/2}_{L_{3/2}(Q)}\|\overline{f}\|^{1/2}_{L_1(Q)} + \\
&+ \|D_t\zeta\|_{(0,T)}\|\theta^h\|_Q + \|\zeta^2\chi_{0,X}\|^{1/2}_{L_2(0,T)}\|\chi_{0,X}\|^{1/2}_{L_1(0,T)}\big) \le K_1(\|\zeta\sigma^h\|_{L_{\infty,2}(Q)} + 1).
\end{aligned}$$

Оценка (4.12) доказана.

Применяя предложение 3.3 (с заменой ζ на ζ^2) и учитывая, что

$$D\widehat{u}^h = (\eta^h/\nu^h)\sigma^h + (k^h/\nu^h)\theta^h, \tag{4.14}$$

и принимая во внимание оценки (2.8), (4.12), имеем

$$\begin{aligned}
\|\zeta^2\widehat{\varpi}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} &\le K\big(\|(\zeta\sigma^h)\zeta D\widehat{u}^h\|_Q + \|\zeta^2 f^h\|_Q + \|(D_t\zeta)\zeta\theta^h\|_Q + \\
&+ \|\zeta^2\chi_{0,X}\|_{V[0,T]}\big) \le K_1(\|\zeta\sigma^h\|_{L_{\infty,2}(Q)}\|\eta^h\|_{L_\infty(Q)}\|\zeta\sigma^h\|_{L_{2,\infty}(Q)} + \\
&+ \|\zeta\sigma^h\|_{L_{\infty,2}(Q)}\|\zeta\theta^h\|_{L_{2,\infty}(Q)} + \|D_t\zeta\|_{(0,T)}\|\zeta\theta^h\|_{L_{2,\infty}(Q)} + 1) \le \\
&\le K_2(\varepsilon^{-1}\|\zeta\sigma^h\|^2_{L_{\infty,2}(Q)} + \varepsilon\|\zeta\sigma^h\|^2_{L_{2,\infty}(Q)} + 1). \quad \square
\end{aligned}$$

Лемма 4.2. *Справедливы оценки* (4.3) *и*

$$\|\zeta\widehat{\theta}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} \le K(N). \tag{4.15}$$

Доказательство. Функция u^h является решением задачи $\mathcal{L}_m^h$ с $\alpha = 1$, $\varkappa = \nu^h\rho^h$, $\psi = k^h\rho^h\theta^h$, $f = g^h$. Поскольку $K^{-1} \le \varkappa \le K$, $\|D_t\varkappa\|_Q \le N^3\|D_t\eta^h\|_Q \le K_0$, то в силу предложения 3.3 и условий (4.1), (4.2) справедлива оценка

$$\begin{aligned}\|\zeta\widehat{\sigma}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} \le K_1\big(\|\zeta\overline{g}\|_Q + \|(k^h/\nu^h)D_t[\zeta\theta^h]\zeta(\sigma^h - \sigma_\Gamma^h)\|_{L_1(Q)}^{1/2} + \\ + \|(k^h/\nu^h)\zeta\theta^h\|^{\langle 0,1/2\rangle} + \|(D_t\zeta)u^h\|_Q + \|D_t(\zeta u_{0,X})\|_{L_{4/3}(0,T)} + \|\zeta p_{0,X}\|_{V[0,T]}\big) \le \\ \le K_2(\|\zeta D_t(\zeta\theta^h)\|_Q^{1/2}\|\sigma^h - \sigma_\Gamma^h\|_Q^{1/2} + \|\zeta\theta^h\|^{\langle 0,1/2\rangle} + \|D_t\zeta\|_{(0,T)}\|u^h\|_{L_{2,\infty}(Q)} + 1).\end{aligned}$$

Здесь $\sigma_\Gamma^h = 0$ при $m = 1$, $\sigma_\Gamma^h = -p_0$ при $m = 2$ и $\sigma_\Gamma^h = -(1 - x_{1/2}^h/X)p_0 - (x_{1/2}^h/X)p_X$ при $m = 3$. Учитывая оценки $\|\sigma^h\|_Q \le K$, $\|u^h\|_{L_{2,\infty}(Q)} \le K$, имеем

$$\|\zeta\widehat{\sigma}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} \le K_3\big(\|\zeta D_t(\zeta\theta^h)\|_Q^{1/2} + \|\zeta\theta^h\|^{\langle 0,1/2\rangle} + 1\big). \tag{4.16}$$

Из уравнения (2.3), умноженного на ζ^2, и равенства (4.14) следует

$$c_V^h\zeta D_t(\zeta\theta^h) = D(\zeta^2\widehat{\varpi}) + (\eta^h/\nu^h)(\zeta\sigma^h)^2 + \zeta\sigma^h(k^h/\nu^h)\zeta\theta^h + \zeta^2 f^h + c_V^h(D_t\zeta)\zeta\theta^h.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\|\zeta D_t(\zeta\theta^h)\|_Q \le K_4(\|D(\zeta^2\widehat{\varpi}^h)\|_Q + \|\zeta\sigma^h\|_{L_{\infty,2}(Q)}\|\zeta\sigma^h\|_{L_{2,\infty}(Q)} + \\ + \|\zeta\sigma^h\|_{L_{\infty,2}(Q)}\|\zeta\theta^h\|_{L_{2,\infty}(Q)} + \|\zeta^2\overline{f}\|_Q + \|D_t\zeta\|_{(0,T)}\|\zeta\theta^h\|_{L_{2,\infty}(Q)}) \le \\ \le K_5\big(\|\zeta^2\widehat{\varpi}^h\|_{V_2(Q)} + \varepsilon\|\zeta\sigma^h\|_{L_{2,\infty}(Q)}^2 + \varepsilon^{-1}\|\zeta\sigma^h\|_{L_{\infty,2}(Q)}^2 + \|\zeta\widehat{\theta}^h\|_{L_{2,\infty}(Q)}^2 + 1\big).\end{aligned}$$

Комбинируя последнюю оценку с оценкой (4.16), имеем

$$\|\zeta D_t(\zeta\theta^h)\|_Q + \|\zeta\widehat{\sigma}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)}^2 \le K_6\big(\|\zeta^2\widehat{\varpi}^h\|_{V_2(Q)} + \|\zeta\sigma^h\|_{L_{\infty,2}(Q)}^2 + \|\zeta\widehat{\theta}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)}^2 + 1\big).$$

Принимая во внимание неравенства (4.12), (4.13), имеем

$$\|D_t(\zeta^2\theta^h)\|_Q + \|\zeta\widehat{\theta}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)}^2 + \|\zeta\sigma^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)}^2 \le K_7(\|\zeta\sigma^h\|_{L_{\infty,2}(Q)}^2 + 1). \tag{4.17}$$

Поскольку $\|\sigma^h\|_Q \le K$, то

$$\|\zeta\sigma^h\|_{L_{\infty,2}(Q)}^2 \le c\|\zeta\sigma^h\|_Q\big(\|\zeta\sigma^h\|_Q + \|D(\zeta\widehat{\sigma}^h)\|_Q\big) \le K_8\|\zeta\widehat{\sigma}^h\|_{V_2(Q)} + K_9,$$

и из неравенства (4.17) следует оценка

$$\|D_t(\zeta^2\theta^h)\|_Q + \|\zeta\widehat{\theta}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} + \|\zeta\widehat{\sigma}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} \le K_{10}.$$

Принимая во внимание неравенство (4.13), имеем $\|\zeta^2\widehat{\varpi}^h\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} \le K_{11}$. В силу равенства (которое следует из уравнения (2.2))

$$D_t(\zeta u^h) = D(\zeta\widehat{\sigma}^h) + \zeta g^h + (D_t\zeta)u^h \quad \text{в} \quad Q^{h;m} \tag{4.18}$$

верна также оценка $\|D_t(\zeta u^h)\|_{Q^{h;m}} \le K_{12}$. $\square$

Лемма 4.3. *Справедлива оценка* (4.4).

Доказательство. Из равенства (4.14) и оценок (4.3), (4.15) следует

$$\|D(\zeta\widehat{u}^h)\|_{L_{q,r}(Q)} \le K(\|\zeta\sigma^h\|_{L_{q,r}(Q)} + \|\zeta\theta^h\|_{L_{q,r}(Q)}) \le K_1,$$
$$\|D(\zeta^2\widehat{\theta}^h)\|_{L_{q,r}(Q)} \le K\|\zeta^2\varpi^h\|_{L_{q,r}(Q)} \le K_2$$

с q,r, заявленными в оценке (4.4). Выбирая $q=2$, $r=\infty$ и учитывая оценки $\|u^h\|_{L_{2,\infty}(Q)} \le K$, $\|\theta^h\|_{L_{1,\infty}(Q)} \le K$, имеем также $\|\zeta u^h\|_{L_\infty(Q)} + \|\zeta^2\theta^h\|_{L_\infty(Q)} \le K_3$. □

Лемма 4.4. *В условиях п. 2 теоремы* 4.1 *верна оценка* (4.6).

Доказательство. Рассматривая снова (как в доказательстве леммы 4.2) функцию u^h как решение задачи $\mathcal{L}_m^h$, в силу предложения 3.5 имеем оценку

$$\|\zeta^2\sigma^h\|_{L_\infty(Q)} \le K(\|\zeta^2\overline{g}\|_{L_{2q,2r}(Q)} + \|D_t\zeta\|_{(0,T)}\|D(\zeta\widehat{u}^h)\|_{L_{2,\infty}(Q)} + \\ + \|D_t(\zeta^2\theta^h)\|_Q + \|D_t(\zeta^2 u_{0,X}) - D_t(\zeta^2)u_{0,X}\|_{L_{r_\varepsilon}(0,T)} + \|\zeta^2 p_{0,X}\|_{L_\infty(0,T)}) \le K_1.$$

Рассматривая функцию θ^h как решение задачи $\overline{\mathcal{L}}_3^h$ (как в доказательстве леммы 4.1) и применяя предложение 3.5, имеем

$$\|\zeta^3\varpi^h\|_{L_\infty(\Omega)} \le K(\|\zeta^3\sigma^h D\widehat{u}^h\|_{L_4(Q)} + \|\zeta^3\overline{f}\|_{L_{2q,2r}(Q)} + \|(D_t\zeta)D(\zeta^2\widehat{\theta}^h)\|_Q + \\ + \|\zeta^3\chi_{0,X}\|_{L_\infty(0,T)}) \le K_2(\|\zeta^2\sigma^h\|_{L_\infty(Q)}\|\zeta D\widehat{u}^h\|_{L_4(Q)} + \|D_t\zeta\|_{(0,T)}\|D(\zeta^2\widehat{\theta}^h)\|_{L_{2,\infty}(Q)} + 1) \le K_3.$$

Теорема 4.1 доказана.

Доказательство теоремы 4.2 проводится по той же схеме с тем отличием, что вместо предложения 3.2 нужно использовать предложение 3.1, а предложения 3.3 и 3.5 нужно применять с $\zeta \equiv 1$. Кроме того, следует воспользоваться оценками $\|D\widehat{u}^{0,h}\|_{L_p(\Omega)} \le c\|Du^0\|_{L_p(\Omega)} \le cN$ (здесь используется условие согласования (4.9)), $\|D\widehat{\theta}^{0,h}\|_{L_p(\Omega)} \le \|D\theta^0\|_{L_p(\Omega)} \le N$, с $p=2$ в п. 1 и с $p=\infty$ в п. 2.

5. Дополнительные оценки обобщенных решений задач $\mathcal{P}_m$

Аналоги доказанных в § 4 оценок верны и для начально-краевых задач $\mathcal{P}_m$. Некоторые их варианты были анонсированы в [7], [8].

Пусть $\zeta \in W_2^1(0,T)$, $\|D_t\zeta\|_{L_2(0,T)} \le N$ и $\zeta|_{t=0} = 0$.

Теорема 5.1. 1. *Если выполнены условия* C$_1$)–C$_4$) *и условия* (4.1), (4.2), *то для решения задачи* $\mathcal{P}_m$ *справедлива оценка*

$$\|D_t(\zeta u)\|_Q + \|D_t(\zeta^2\theta)\|_Q + \|\zeta\sigma\|_{V_2^{(1,1/2)}(Q)} + \|\zeta^2\varpi\|_{V_2^{(1,1/2)}(Q)} \le K(N). \tag{5.1}$$

Как следствие, справедлива оценка

$$\|\zeta u\|_{C(\overline{Q})} + \|\zeta^2\theta\|_{C(\overline{Q})} + \|D(\zeta u)\|_{L_{q,r}(Q)} + \|D(\zeta^2\theta)\|_{L_{q,r}(Q)} \le K(N) \tag{5.2}$$

для всех $q,r \in [1,\infty]$, $(2q)^{-1} + r^{-1} = 1/4$. *Кроме того, в* $L_2(Q)$ *выполняются уравнения*

$$D_t(\zeta u) = D(\zeta\sigma) + \zeta g[x_e] + (D_t\zeta)u, \tag{5.3}$$
$$c_V D_t(\zeta^2\theta) = D(\zeta^2\varpi) + \zeta^2\sigma Du + \zeta^2 f[x_e] + c_V D_t(\zeta^2)\theta. \tag{5.4}$$

2. *Если дополнительно выполнены условия* (4.5), *то верна оценка*

$$\|\zeta^2\sigma\|_{L_\infty(Q)} + \|\zeta^3\varpi\|_{L_\infty(Q)} \le K_\varepsilon(N). \tag{5.5}$$

Доказательство. В силу [1] из последовательности приближенных решений η^h, u^h, θ^h, x_e^h можно выбрать такую подпоследовательность (сохраним за ней прежнее обозначение), что, в частности, $\widehat{u}^h \to u$ и $\widehat{\theta}^h \to \theta$ сильно в $L_2(Q)$, $D\widehat{u}^h \to Du$ и $\sigma^h \to \sigma$ слабо в $L_2(Q)$, $\varpi^h \to \varpi$ слабо в $L_{4/3}(Q^{h_0;1})$ для всякого фиксированного $h_0 > 0$. В силу оценок (4.3), (4.4) имеем дополнительно следующие свойства: $\zeta D\widehat{u}^h \to \zeta Du$ слабо в $L_6(Q)$, $\zeta\widehat{\sigma}^h \to \zeta\sigma$ и $\zeta^2\widehat{\varpi}^h \to \zeta^2\varpi$ сильно в $L_4(Q)$ и $*$-слабо в $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$; $\zeta D\widehat{\sigma}^h \to \zeta D\sigma$ и $\zeta^2 D\widehat{\varpi}^h \to \zeta^2 D\varpi$ слабо в $L_2(Q)$; $D_t(\zeta u^h) \to D_t(\zeta u)$ слабо в $L_2(Q^{h_0;m})$ и $D_t(\zeta^2\theta^h) \to D_t(\zeta^2\theta)$ слабо в $L_2(Q)$, и одновременно верны оценки (5.1). Как следствие, верна оценка (5.2).

Слабый предельный переход в $L_2(Q^{h_0;m})$ в уравнении (4.18) и в $L_2(Q)$ в уравнении

$$c_V^h D_t(\zeta^2\theta^h) = D(\zeta^2\widehat{\varpi}^h) + \zeta^2\sigma^h D\widehat{u}^h + \zeta^2 f^h + \mathrm{c}_V^h D_t(\zeta^2)\theta^h$$

показывает, что уравнения (5.3), (5.4) выполняются в $L_2(Q)$.

В условиях п. 2 из оценки (4.6) следует, что $\zeta^2\sigma^h \to \zeta^2\sigma$ и $\zeta^3\varpi^h \to \zeta^3\varpi$ $*$-слабо в $L_\infty(Q)$ и верна оценка (5.5). Теорема 5.1 доказана.

Обобщенное решение η, u, θ, x_e задачи $\mathcal{P}_m$ назовем *почти регулярным обобщенным решением*, если выполнены дополнительные требования

1) функции $\sigma = \nu\rho Du - p$, $\varpi = \lambda\rho D\theta$ принадлежат пространству $W_2^{1,0}(Q)$; кроме того, $D_t u, D_t\theta \in L_2(Q)$;
2) уравнения (1.2) и (1.3) удовлетворяются в $L_2(Q)$;
3) начальные условия $u|_{t=0} = u^0$, $\theta|_{t=0} = \theta^0$ выполняются в смысле пространств $C([0,T]; L_2(\Omega))$; краевые условия (1.7), условие $\sigma|_{x=0} = -p_0$ при $m = 2,3$ и условие $\sigma|_{x=X} = -p_X$ при $m = 3$ выполняются в смысле следов функций из пространств $W_2^{1,0}(Q)$.

Теорема 5.2. 1. *Пусть выполнены условия* C_1)–C_4), *условия* (4.7), (4.8) *и условия согласования* (4.9). *Тогда существует почти регулярное обобщенное решение задачи* $\mathcal{P}_m$, *удовлетворяющее оценкам*

$$\|\sigma\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} + \|\varpi\|_{V_2^{\langle 1,1/2\rangle}(Q)} \le K(N), \qquad \|D_t u\|_Q + \|D_t\theta\|_Q \le K(N),$$
$$\|u\|_{C(\overline{Q})} + \|\theta\|_{C(\overline{Q})} \le K(N), \quad \|Du\|_{L_{q,r}(Q)} + \|D\theta\|_{L_{q,r}(Q)} \le K(N)$$

для всех $q, r \in [1,\infty]$, $(2q)^{-1} + r^{-1} = 1/4$.

2. *Пусть дополнительно выполнены условия* (4.10), (4.11). *Тогда*

$$\|\sigma\|_{L_\infty(Q)} + \|\varpi\|_{L_\infty(Q)} \le K_\varepsilon(N).$$

3. *Пусть выполнены условия п. 2 и* $\sigma^0 \equiv \nu\rho^0 Du^0 - k\rho^0\theta^0 \in C(\overline{\Omega})$, $\varpi^0 \equiv \lambda\rho^0 D\theta^0 \in C(\overline{\Omega})$ *(где* $\rho^0 = 1/\eta^0$*)*, $p_{0,X}, \chi_{0,X} \in C[0,T]$. *Пусть выполнены условия согласования* $\sigma^0(0) = -p_0(0)$ *при* $m = 2,3$, $\sigma^0(X) = -p_X(0)$ *при* $m = 3$, *а также* $\varpi^0(0) = -\chi(0)$, $\varpi^0(X) = \chi_X(0)$. *Тогда* $\sigma, \varpi \in C(\overline{Q})$.

Доказательства пп. 1, 2 этой теоремы проводятся аналогично доказательству теоремы 5.1 (с использованием теоремы 4.2 вместо теоремы 4.1). Пункт 3 справедлив в силу свойств решений линейных параболических задач [3], [6].

Обратим внимание на то, что в теореме 5.2 функции ν, k, c_V, λ и η^0 по-прежнему удовлетворяют лишь условиям C_1), C_2) и могут быть разрывными.

6. Некоторые оценки решений в случае $\mathrm{c}_V = \mathrm{const}$

Дополним полученные выше результаты оценками энергетических норм кинетической энергии и температуры (последнюю удается доказать лишь при дополнительном предположении $\mathrm{c}_V = \mathrm{const}$). В основе их вывода лежит методика ([9], с. 57-59). В разностном варианте для задачи $\mathcal{P}_1$ с постоянными коэффициентами при $u_0 = u_X = 0$ эти оценки получены в [10].

Предложение 6.1. *Пусть выполнены условия* C_1)–C_4) *и условие*

$$\|u^0\|_{L_4(\Omega)} \le N, \quad \|\overline{g}\|_{L_{2,8/7}(Q)} \le N. \tag{6.1}$$

1. *Справедлива оценка* $\|\widehat{(u^h)^2}\|_{V_2(Q)} \le K(N)$.
2. *Пусть дополнительно* $c_V = \mathrm{const}$ *и*

$$\|\theta^0\|_\Omega \le N, \quad \|\overline{f}\|_{L_{2,1}(Q)} \le N, \quad \|\chi_{0,X}\|_{L_{4/3}(0,T)} \le N. \tag{6.2}$$

Тогда справедлива оценка

$$\|\widehat{\theta}^h\|_{V_2(Q)} \le K(N). \tag{6.3}$$

Доказательство. Положим $v^h = u^h - u_\Gamma^h$, $w^h = 0.5|v^h|v^h$, где $u_\Gamma^h = (1 - x^h/X)u_0 + (x^h/X)u_X$ при $m = 1$, $u_\Gamma^h = u_X$ при $m = 2$, а также $u_\Gamma^h = 0$ при $m = 3$. Предположим дополнительно, что $u_{0,X} \in W_1^1(0,T)$. (Это ограничение снимается, как и выше, с помощью предельного перехода.)

1. Записав уравнение (2.2) в виде

$$D_t v^h = D\widehat{\sigma}^h + g^h - D_t u_\Gamma^h \quad \text{в} \quad Q^{h;m}, \tag{6.4}$$

умножив его на $(v^h)^3$ и проинтегрировав результат по $Q_t^{h;m}$, получим

$$\frac{1}{4}\|v^h\|_{L_4(\Omega)}^4 + (\nu^h\rho^h D\widehat{v}^h, D\widehat{(v^h)^3})_{Q_t} = \frac{1}{4}\|v^{0,h}\|_{L_4(\Omega)}^4 - (\nu^h\rho^h D\widehat{u}_\Gamma^h - p^h, D\widehat{(v^h)^3})_{Q_t} -$$
$$- (p_X, (v^h|_{x=X})^3)_{(0,t)} + (p_0, (v^h|_{x=0})^3)_{(0,t)} + (g^h - D_t u_\Gamma^h, (v^h)^3)_{Q_t}.$$

Используя неравенства $3(D\widehat{w}^h)^2 \le (D\widehat{v}^h)D\widehat{(v^h)^3}$, $|D\widehat{(v^h)^3}| \le 4\sqrt{2}(\pi_{1/2}^h|w^h|)^{1/2}|D\widehat{w}^h|$, а также оценки (2.8), (2.10) с $q_0 = r_0 = 12/5$, выводим оценку

$$\|\widehat{w}^h\|_{V_2(Q)}^2 \le K_1\big[\|u^0\|_{L_4(\Omega)}^4 + |u_{0,X}(0)|^4 +$$
$$+ (\|u_{0,X}\|_{L_\infty(0,T)} + \|\theta^h\|_{L_{12/5}(Q)})\|w^h\|_{L_6(Q)}^{1/2}\|D\widehat{w}^h\|_Q + \|p_{0,X}\|_{L_\infty(0,T)}\|w^h\|_{L_{\infty,3/2}(Q)}^{3/2} +$$
$$+ \|\overline{g}\|_{L_{2,8/7}(Q)}\|w^h\|_{L_{3,12}(Q)}^{3/2} + \|D_t u_{0,X}\|_{L_1(0,T)}\|w^h\|_{L_{2,\infty}(Q)}^{3/2}\big] \le K_2\|\widehat{w}^h\|_{V_2(Q)}^{3/2} + K_3.$$

Следовательно, $\|\widehat{w}^h\|_{V_2(Q)} \le K_4$. Отсюда

$$\|\widehat{(u^h)^2}\|_{V_2(Q)} \le 2\|\widehat{w}^h\|_{V_2(Q)} + 2\|\widehat{v^h u_\Gamma^h}\|_{V_2(Q)} + \|\widehat{(u_\Gamma^h)^2}\|_{V_2(Q)} \le K.$$

2. Положим $e^h = c_V\theta^h + \pi_{1/2}^h|w^h|$, $\overline{e}^h = c_V\pi^h\theta^h + |w^h|$ (ясно, что $|w^h| = 0.5(v^h)^2$). Умножим уравнение (6.4) скалярно в $L_2(\Omega^{h;m})$ на $v^h\overline{e}^h$, уравнение (2.3) скалярно в $L_2(\Omega)$ на e^h и сложим результаты

$$(D_t|w^h|, \overline{e}^h)_\Omega + (c_V D_t\theta^h, e^h)_\Omega + (\lambda^h\rho^h D\widehat{\theta}^h, c_V D\widehat{\theta}^h)_\Omega = -(\lambda^h\rho^h D\widehat{\theta}^h, \pi^h D\widehat{|w^h|})_\Omega -$$
$$- (\sigma^h, D(\widehat{v^h\overline{e}^h}) - (D\widehat{v}^h + D\widehat{u}_\Gamma^h)e^h)_\Omega + (g^h - D_t u_\Gamma^h, v^h\overline{e}^h)_\Omega +$$
$$+ (f^h, e^h)_\Omega - p_X(v^h\overline{e}^h)|_{x=X} + p_0(v^h\overline{e}^h)|_{x=0} + \chi_X e^h|_{x=X} + \chi_0 e^h|_{x=0}.$$

Применяя соотношения [10]

$$0.5D_t\big[\|e^h\|_\Omega^2 + 0.25h^2\|D\widehat{|w^h|}\|_\Omega^2\big] \le (D_t|w^h|, \overline{e}^h)_\Omega + (c_V D_t\theta^h, e^h)_\Omega,$$
$$D(\widehat{v^h\overline{e}^h}) - (D\widehat{v}^h)e^h = (\pi_{1/2}^h v^h)D\widehat{|w^h|} + c_V\pi_{1/2}^h(v^h D\widehat{\theta}^h),$$
$$\sigma^h\pi_{1/2}^h v^h = \rho^h\big[\nu^h D|\widehat{w}^h| + (\nu^h D\widehat{u}_\Gamma^h - k^h\theta^h)\pi_{1/2}^h v^h\big],$$
$$|D\widehat{u}^h|\pi_{1/2}^h|v^h| \le 4|D\widehat{w}^h| + 2\sqrt{2}|D\widehat{u}_\Gamma^h|(\pi_{1/2}^h|w^h|)^{1/2}$$

и используя неравенства $N^{-1}\theta^h \le e^h$, $K^{-1} \le \rho^h \le K$, $\|\widehat{w}^h\|_{V_2(Q)} \le K$, $\|\sigma^h\|_Q \le K$, приходим к оценке

$$\begin{aligned}\|\widehat{\theta}^h\|^2_{V_2(Q)} \le K_1 \big[&\|e^h|_{t=0}\|^2_\Omega + h^2\|D\widehat{w}^h|_{t=0}\|^2_\Omega + \|D\widehat{\theta}^h\|_Q\|D\widehat{w}^h\|_Q + \|D\widehat{w}^h\|^2_Q + \\ &+ (\|u_{0,X}\|^2_{L_\infty(0,T)} + \|\theta^h\|^2_{L_{12/5}(Q)})\|w^h\|_{L_6(Q)} + \|\sigma^h\|_Q\|D\widehat{u}^h_\Gamma\|_{L_\infty(Q)}\|e^h\|_Q + \\ &+ (\|D\widehat{w}^h\|_Q + \|D\widehat{u}^h_\Gamma\|_{L_\infty(Q)}\|w^h\|^{1/2}_{L_4(Q)} + \|\theta^h\|_{L_{12/5}(Q)}\|w^h\|^{1/2}_{L_6(Q)})\|D\widehat{\theta}^h\|_Q + \\ &+ (\|\overline{g}\|_{L_{2,8/7}(Q)}\|w^h\|^{1/2}_{L_{\infty,4}(Q)} + \|D_t u_{0,X}\|_{L_1(0,T)}\|w^h\|^{1/2}_{L_{2,\infty}(Q)})\|\overline{e}^h\|_{L_{2,\infty}(Q)} + \\ &+ \|\overline{f}\|_{L_{2,1}(Q)}\|e^h\|_{L_{2,\infty}(Q)} + \|p_{0,X}\|_{L_\infty(0,T)}\|w^h\|^{1/2}_{L_{\infty,4}(Q)}\|\overline{e}^h\|_{L_{\infty,2}(Q)} + \\ &+ \|\chi_{0,X}\|_{L_{4/3}(0,T)}\|e^h\|_{L_{\infty,4}(Q)}\big] \le K_2\|\widehat{\theta}^h\|_{V_2(Q)} + K_3.\end{aligned}$$

Из нее следует неравенство (6.3). □

Предложение 6.2. *Пусть выполнены условия* $\mathrm{C}_1)$–$\mathrm{C}_4)$ *и условие* (6.1).

1. *Справедлива оценка* $\|u^2\|_{V_2(Q)} \le K(N)$.

2. *Пусть дополнительно* $c_V = \mathrm{const}$ *и выполнено условие* (6.2). *Тогда справедлива оценка* $\|\theta\|_{V_2(Q)} \le K(N)$.

Для доказательства достаточно при предельном переходе к обобщенному решению в [1] воспользоваться оценками предложения 6.1.

Обратим внимание на то, что в условиях предложения 6.2 обобщенное решение обладает свойствами $\theta, e \equiv c_V\theta + 0.5u^2 \in V_2(Q)$ [7].

Литература

1. Амосов А.А., Злотник А.А. *Полудискретный метод решения уравнений одномерного движения неоднородного вязкого теплопроводного газа с негладкими данными* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 4. – С. 3–19.
2. Злотник А.А., Амосов А.А. *Об устойчивости обобщенных решений уравнений одномерного движения вязкого теплопроводного газа* // Сиб. матем. журн. – 1997. – Т. 38. – № 4. – С. 767–789.
3. Амосов А.А., Злотник А.А. *О свойствах обобщенных решений одномерных линейных параболических задач с негладкими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 1. – С. 83–95.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* – М.: Наука, 1967. – 736 с.
5. Амосов А.А., Злотник А.А. *Разностная схема для уравнений одномерного движения вязкого баротропного газа* // Вычисл. процессы и системы. / Под ред. Г.И. Марчука. – М.: Наука, 1986. – Вып. 4. – С. 192–218.
6. Амосов А.А., Злотник А.А. *Замечания о свойствах обобщенных решений из $V_2(Q)$ одномерных линейных параболических задач* // Вестн. Моск. энерг. ин-та. – 1996. – № 6. – С. 15–29.
7. Амосов А.А., Злотник А.А. *Обобщенные решения “в целом” уравнений одномерного движения вязкого теплопроводного газа* // ДАН СССР. – 1988. – Т. 301. – № 1. – С. 11–15.
8. Амосов А.А., Злотник А.А. *Свойства “в целом” квазиосредненных уравнений одномерного движения вязкого теплопроводного газа* // Докл. РАН. – 1996. – Т. 346. – № 2. – С. 151–154.
9. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей.* – Новосибирск: Наука, 1983. – 320 с.
10. Amosov A.A., Zlotnik A.A. *A study of a finite-difference method for the one-dimensional viscous heat-conductive gas flow equations.* Part 1: *A priori estimates and stability* // Sov. J. Numer. Anal. and Math. Model. – 1987. – V. 2. – № 3. – P. 159–178.

Московский энергетический институт
(технический университет)

Поступила
28.01.1999