ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 7 (434)

УДК 539.3

И.Г. ТЕРЕГУЛОВ, С.Н. ТИМЕРГАЛИЕВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Данная работа посвящена исследованию разрешимости задачи геометрически нелинейной теории пологих оболочек, заключающейся в определении напряженно-деформированного состояния свободных оболочек, не подчиненных никаким геометрическим граничным условиям. Необходимость изучения задач для таких оболочек была отмечена И.И. Воровичем в [1]. Для исследования задач предлагается метод, основанный на решении задачи в деформациях [2].

1. В этом пункте будут выведены формулы для вектора перемещения через компоненты деформаций. Для этого воспользуемся соотношениями для компонент конечной деформации, полученными И.И. Воровичем [1] на основе гипотез Кирхгофа–Лява

$$\begin{aligned} &\varepsilon^0_{jj} = w_{j\alpha^j} - B_{jj}w - G^k_{jj}w_k + \tfrac{1}{2}w^2_{\alpha^j}, \quad j=1,2,\\ &\varepsilon^0_{12} = \tfrac{1}{2}(w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1}) - B_{12}w - G^k_{12}w_k + \tfrac{1}{2}w_{\alpha^1}w_{\alpha^2},\\ &\varepsilon^1_{ij} = -w_{\alpha^i\alpha^j} + G^k_{ij}w_{\alpha^k}, \quad i\le j, \ \ i,j=1,2, \end{aligned} \tag{1}$$

где ε^0_{ij}, ε^1_{ij} — компоненты тангенциальной и изгибной деформации срединной поверхности S_0; w_i, w — тангенциальные и нормальное перемещения точек S_0; B_{ij} — составляющие тензора кривизны S_0; G^k_{ij} — символы Кристоффеля второго рода; α^1, α^2 рассматриваются как декартовы координаты на плоскости, изменяющиеся в некоторой плоской области Ω.

Систему (1) будем решать относительно w_i, w, предполагая ε^0_{ij}, ε^1_{ij} известными функциями. Для этого от (1) перейдем к системе

$$w_{1\alpha^1} - w_{2\alpha^2} + (B_{22}-B_{11})w + (G^k_{22}-G^k_{11})w_k + \tfrac{1}{2}(w^2_{\alpha^1} - w^2_{\alpha^2}) = \varepsilon^0_{11} - \varepsilon^0_{22}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2B_{12}w - 2G^k_{12}w_k + w_{\alpha^1}w_{\alpha^2} = 2\varepsilon^0_{12},\\ -w_{\alpha^1\alpha^1} - w_{\alpha^2\alpha^2} + (G^k_{11}+G^k_{22})w_{\alpha^k} = \varepsilon^1_{11} + \varepsilon^1_{22}. \end{aligned} \tag{3}$$

Решение системы (2)-(3) начнем с решения уравнения (3). Введем обозначения: $a = -(G^1_{11}+G^1_{22})$, $b = G^2_{11}+G^2_{22}$, $\varepsilon_3 = \varepsilon^1_{11}+\varepsilon^1_{22}$, $u = -w_{\alpha^1}$, $v = w_{\alpha^2}$. Тогда уравнение (3) будет эквивалентно системе

$$\begin{aligned} u_{\alpha^1} - v_{\alpha^2} + au + bv = \varepsilon_3,\\ u_{\alpha^2} + v_{\alpha^1} = 0, \end{aligned}$$

которую с помощью комплексной функции $W(z) = u(\alpha^1,\alpha^2) + iv(\alpha^1,\alpha^2)$, $z = \alpha^1 + i\alpha^2$ можно представить в виде

$$W_{\overline{z}} + AW + B\overline{W} = F, \tag{4}$$

где $A = \frac{1}{4}(a-ib)$, $B = \frac{1}{4}(a+ib)$, $F = \varepsilon_3/2$, $W_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(W_{\alpha^1} + iW_{\alpha^2})$.

Уравнения вида (4) изучены И.Н. Векуа [3]. При нахождении решения уравнения (4) будем следовать [3]. Предположим, что $\varepsilon_3 \in L_2(\overline{\Omega})$, функции G^k_{ij}, B_{ij} ограничены в $\overline{\Omega}$; вне области $\overline{\Omega}$:

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96-01-00518, и Академии наук Татарстана.

$\varepsilon_3 = G_{ij}^k = B_{ij} \equiv 0$. При этих условиях решение (обобщенное) уравнения (4) можно получить в виде

$$W(z) = W_0(z) + (T_1\varepsilon_3)(z), \tag{5}$$

где $W_0(z)$ — обобщенная аналитическая функция [3], зависящая от произвольной голоморфной внутри Ω функции; оператор $T_1 f$ дается формулой

$$T_1 f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} \chi_1(z,\zeta;\Omega) f(\zeta) d\xi\, d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta, \tag{6}$$

где $\chi_1(z,\zeta;\Omega)$ — известная функция, называемая главной функцией [3].

Зная $W(z)$, решение $w(z)$ уравнения (3) можно найти по формуле

$$w(\alpha^1,\alpha^2) = c_0 - \operatorname{Re}\int_{z_0}^{z} W(\zeta) d\zeta, \quad c_0 = \text{const}, \tag{7}$$

z_0 — произвольно фиксированная точка Ω.

Если Ω — односвязная область, то правая часть (7) является однозначной функцией при фиксированных c_0, z_0. Если Ω — многосвязная область, то правая часть (7) будет, вообще говоря, многозначной функцией. Пусть Γ_j $(j = 0,1,\dots,m)$ — замкнутые кривые, ограничивающие область Ω, причем $\Gamma_1,\dots,\Gamma_m$ лежат внутри Γ_0. Тогда для однозначности правой части (7) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\operatorname{Re}\int_{\Gamma_j} W(\zeta) d\zeta = 0, \quad j = \overline{1,m}.$$

Перейдем к системе (2). При помощи комплексной функции $W_1 = w_1 + iw_2$ систему (2), как и выше, можно записать в виде

$$W_{1\bar z} + A_1 W_1 + B_1 \overline{W}_1 = F_1 - K\varepsilon_3, \tag{8}$$

где $F_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_{12}^0$; $K\varepsilon_3 = \frac{1}{2}(K_1\varepsilon_3 + iK_2\varepsilon_3)$ — известный оператор, который определяется решением w уравнения (3); коэффициенты A_1, B_1 зависят только от G_{ij}^k и обращаются в нуль при $G_{ij}^k \equiv 0$. Предполагая, что $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in L_2(\overline{\Omega})$ и вне $\overline{\Omega}$: $\varepsilon_i \equiv 0$, обобщенное решение уравнения (8) получаем в виде

$$W_1(z) = W_{1,0}(z) + T_2(\varepsilon_1 - K_1\varepsilon_3) - T_3(\varepsilon_2 - K_2\varepsilon_3), \tag{9}$$

где через $W_{1,0}$ обозначена обобщенная аналитическая функция, зависящая от произвольной голоморфной внутри Ω функции; операторы $T_j f$ имеют ту же структуру (6), что и $T_1 f$.

Лемма 1. *Операторы $T_j f$ $(j = \overline{1,3})$ суть вполне непрерывные линейные операторы в $L_2(\overline{\Omega})$, отображающие это пространство в пространство $L_q(\overline{\Omega})$, $q > 1$, причем*

$$\|T_j f\|_{L_q} \le c\|f\|_{L_2}.$$

Справедливость леммы 1 следует из свойств главных функций и теорем 1.19, 1.27 ([3], сс. 39, 46).

Используя решения (5), (7), (9), их производные по z, $\bar z$, находим w_{α^j}, $w_{\alpha^2\alpha^2}$, $w_{\alpha^1\alpha^2}$, $w_{2\alpha^2}$, с помощью которых затем из (1) получаем

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{22}^1 \equiv \varepsilon_4 = H_1\varepsilon_3 + \tfrac{1}{2}\varepsilon_3 + f_1, \quad \varepsilon_{12}^1 \equiv \varepsilon_5 = H_2\varepsilon_3 + f_2, \\ &\varepsilon_{22}^0 \equiv \varepsilon_6 = H\varepsilon_3 + 1_k H_{2+k}\varepsilon_k\big|_{k=\overline{1,3}} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 + f_3, \end{aligned} \tag{10}$$

где $f_j \in L_q(\overline{\Omega})$ $(q > 1)$ — известные функции, зависящие от W_0, $W_{1,0}$; $H_j f$ — известные операторы, определяемые, например, формулами

$$\begin{gathered} H_{2+k}\varepsilon_k = \mathrm{Re}[(-1)^k(S-I)P_{1+k}\varepsilon_k + \tfrac{1}{2}i^{k-1}S\varepsilon_k] + (-1)^k\,\mathrm{Re}(\overline{g}_2 T_{1+k}\varepsilon_k), \quad k=1,2, \\ H\varepsilon_3 = \tfrac{1}{2}H_3[(\mathrm{Im}\,T_1\varepsilon_3)^2 - (\mathrm{Re}\,T_1\varepsilon_3)^2] + H_4(\mathrm{Re}\,T_1\varepsilon_3\cdot \mathrm{Im}\,T_1\varepsilon_3) + \tfrac{1}{4}|T_1\varepsilon_3|^2, \end{gathered} \tag{11}$$

$$P_k f = A_1 T_k f + B_1 \overline{T_k f}, \quad k=2,3; \quad g_k = G^1_{k,2} + iG^2_{k,2}, \quad k=1,2, \tag{12}$$

и т. д., I — тождественный оператор; оператор Sf дается формулой

$$Sf = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} f(\zeta)/(\zeta - z)^2 d\xi\, d\eta,$$

в которой интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши. Известно ([3], с. 67), что Sf есть ограниченный линейный оператор в $L_p(\overline{\Omega})$, $p > 1$, отображающий это пространство в себя.

Теорема 1. 1) *Операторы $H_j f$ $(j = \overline{1,4})$ суть линейные ограниченные операторы в $L_p(\overline{\Omega})$, отображающие это пространство в себя, причем $\|H_j f\|_{L_p} \le c\|f\|_{L_p}$, $p > 1$.*

2) *Оператор $H_5 f$ — линейный, Hf — нелинейный вполне непрерывный операторы в $L_2(\overline{\Omega})$, отображающие это пространство в $L_q(\overline{\Omega})$, $q > 1$, причем $\|H_5 f\|_{L_q} \le c\|f\|_{L_2}$, $\|Hf\|_{L_q} \le c\|f\|^2_{L_2}$, $q > 1$.*

Теорема 1 доказывается с помощью леммы 1 и вышеприведенных свойств оператора Sf.

Таким образом, получены выражения для компонент вектора перемещения точек срединной поверхности оболочки через ε_1, ε_2, ε_3 в виде (7), (9), которые будут использованы в дальнейшем. Шесть компонент деформации связаны между собой тремя соотношениями (10), которые представляют собой условия совместности деформации. При их выполнении решение системы (2)-(3) удовлетворяет системе (1).

2. Пусть оболочка ортотропна, причем одна из осей ортотропии α^3. Пусть в срединной поверхности S_0 существует ортогональная параметризация x^1, x^2, являющаяся параметризацией ортотропии. В главных осях ортотропии закон Гука запишется в виде ([1], с. 31)

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{12}\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{13}\sigma_{33}}{E_3}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G_{12}} \ (1 \to 2 \to 3 \to 1).$$

Принимая гипотезы Кирхгофа–Лява, получаем

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}(\varepsilon_{11} + \nu_{12}\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{12} = 2G_{12}\varepsilon_{12} \ (1 \rightleftarrows 2).$$

Тогда для объемной плотности потенциальной энергии деформации оболочки Π имеем формулу

$$2\Pi = B^{\lambda\mu qs}(x,\alpha^3)\gamma_{\lambda\mu}(x,\alpha^3)\gamma_{qs}(x,\alpha^3), \quad \lambda \le \mu, \ \ q \le s, \tag{13}$$

где $B^{1111} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$, $B^{1122} = \frac{1}{2}\frac{(E_1\nu_{12} + E_2\nu_{21})}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$ $(1 \rightleftarrows 2)$, $B^{1212} = G_{12}$; $\gamma_{jj} = \varepsilon_{jj}$, $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$.

Условие A: *предполагается, что E_i, G_{12}, ν_{ij} — ограниченные функции переменных α^1, α^2, α^3*; квадратичная форма 2Π равномерно-положительно определена во всем объеме V, занятом оболочкой, т. е. имеет место неравенство ([1], с. 32)

$$2\Pi \ge c(\gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2 + \gamma_{22}^2), \quad c > 0. \tag{14}$$

Для потенциальной энергии U деформации, накопленной во всем объеме оболочки, с учетом тонкостенности оболочки, формулы (13) и $\gamma_{ij} = \gamma^0_{ij} + \alpha^3\gamma^1_{ij}$ [1], будем иметь

$$U = \iint\limits_{\Omega} QD d\alpha^1\, d\alpha^2, \tag{15}$$

где

$$2Q = D_p^{\lambda\mu qs}\gamma^0_{\lambda\mu}\gamma^0_{qs} + D_*^{\lambda\mu qs}(\gamma^1_{\lambda\mu}\gamma^0_{qs} + \gamma^0_{\lambda\mu}\gamma^1_{qs}) + D_u^{\lambda\mu qs}\gamma^1_{\lambda\mu}\gamma^1_{qs}, \tag{16}$$

$$D_p^{\lambda\mu qs}(x) = \int_{-h}^{h} B^{\lambda\mu qs}(x,\alpha^3)d\alpha^3, \quad D_*^{\lambda\mu qs}(x) = \int_{-h}^{h} B^{\lambda\mu qs}(x,\alpha^3)\alpha^3 d\alpha^3,$$

$$D_u^{\lambda\mu qs}(x) = \int_{-h}^{h} B^{\lambda\mu qs}(x,\alpha^3)(\alpha^3)^2 d\alpha^3, \quad \lambda \le \mu, \quad q \le s;$$

$D(\alpha^1,\alpha^2)$ — элемент площади срединной поверхности. Предположим, что в области $\overline{\Omega}$

$$D(\alpha^1,\alpha^2) \ge c^2 > 0. \tag{17}$$

В произвольных s-координатах α^1, α^2, α^3 потенциальная энергия дается формулой (15), где Q определяется по формуле (16) с коэффициентами $D^{\lambda\mu qs}_{p,*,u}(\alpha)$, которые известным образом ([1], с. 34) выражаются через $D^{\lambda\mu qs}_{p,*,u}(x)$. Легко видеть, что в силу (14) квадратичная форма $2Q$ является положительно определенной формой. Отсюда следует положительная определенность тензоров $D^{\lambda\mu qs}_{p,u}$.

В (16) перейдем к переменным ε_i $(i=\overline{1,6})$. Из рассуждений п. 1 следует

$$\gamma^0_{11} = \varepsilon_1 + \varepsilon_6, \quad \gamma^0_{12} = \varepsilon_2, \quad \gamma^0_{22} = \varepsilon_6, \quad \gamma^1_{11} = \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \quad \gamma^1_{12} = 2\varepsilon_5, \quad \gamma^1_{22} = \varepsilon_4. \tag{18}$$

Соотношения (18) представляют собой невырожденные преобразования переменных. Поэтому $2Q$ относительно новых переменных ε_i также является положительно определенной квадратичной формой, т. е. имеет место неравенство

$$2Q \ge c(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 + \varepsilon_6^2), \quad c > 0. \tag{19}$$

Используя формулы (18), условия совместности деформации (10), γ^0_{ij}, γ^1_{ij} представим в виде

$$\gamma^0_{jj} = t^0_{jj} + H\varepsilon_3 + f_3, \quad \gamma^1_{jj} = t^1_{jj} + (-1)^j f_1, \quad j=1,2; \quad \gamma^0_{12} = t^0_{12}, \quad \gamma^1_{12} = t^1_{12} + 2f_2, \tag{20}$$

где через t^0_{ij}, t^1_{ij} обозначены линейные части γ^0_{ij}, γ^1_{ij}:

$$\begin{aligned} &t^0_{11} = \tfrac12\varepsilon_1 + 1_k H_{2+k}\varepsilon_k\big|_{k=\overline{1,3}}, \quad t^0_{12} = \varepsilon_2, \quad t^0_{22} = 1_k H_{2+k}\varepsilon_k\big|_{k=\overline{1,3}} - \tfrac12\varepsilon_1, \\ &t^1_{11} = \tfrac12\varepsilon_3 - H_1\varepsilon_3, \quad t^1_{12} = 2H_2\varepsilon_3, \quad t^1_{22} = H_1\varepsilon_3 + \tfrac12\varepsilon_3 \end{aligned} \tag{21}$$

Теперь в соответствии с формулами (20) для вариации $2Q$ получаем формулу

$$\delta Q = D_p^{\lambda\mu qs}t^0_{\lambda\mu}\delta t^0_{qs} + D_*^{\lambda\mu qs}(t^0_{\lambda\mu}\delta t^1_{qs} + t^1_{\lambda\mu}\delta t^0_{qs}) + D_u^{\lambda\mu qs}t^1_{\lambda\mu}\delta t^1_{qs} + Q_p(\varepsilon;\delta\varepsilon) + Q_*(\varepsilon;\delta\varepsilon) + \Phi(\delta\varepsilon), \tag{22}$$

где

$$Q_p(\varepsilon;\delta\varepsilon) = [d(H\varepsilon_3 + f_3) + d_p^{\lambda\mu}t^0_{\lambda\mu}(\varepsilon)]H_\delta(\varepsilon_3,\delta\varepsilon_3) + H\varepsilon_3 d_p^{\lambda\mu}t^0_{\lambda\mu}(\delta\varepsilon), \tag{23}$$

$$Q_*(\varepsilon;\delta\varepsilon) = d_*^{\lambda\mu}[t^1_{\lambda\mu}(\varepsilon) + \beta_{\lambda\mu}]H_\delta(\varepsilon_3,\delta\varepsilon_3) + H\varepsilon_3 d_*^{\lambda\mu}t^1_{\lambda\mu}(\delta\varepsilon), \tag{24}$$

$$\delta H\varepsilon_3 \equiv H_\delta(\varepsilon_3,\delta\varepsilon_3), \quad \varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3), \quad \delta\varepsilon = (\delta\varepsilon_1,\delta\varepsilon_2,\delta\varepsilon_3);$$

$d^{\lambda\mu}_{p,*}$, d, β_{ij} — известные функции, зависящие от $D^{\lambda\mu qs}_{p,*}$ и f_k соответственно; через $\Phi(\delta\varepsilon)$ обозначено известное выражение, содержащее только вариацию ε.

Вычислим работу внешних приложенных к оболочке сил на возможных перемещениях в условиях гипотез Кирхгофа–Лява. Пусть по граням $S_0^\pm$ оболочки приложены усилия $\mathbf{F}^\pm(\alpha^1,\alpha^2)$, действуют массовые силы $\mathbf{F}(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ и на границе S_0^0 действуют поверхностные силы $\mathbf{F}(s,\alpha^3)$. Предположим, что внешние силы таковы, что движение оболочки как твердого тела отсутствует. В связи с этим в дальнейшем будем считать, что произвольные функции W_0, $W_{1,0}$ равны нулю.

Для элементарной работы δA_1 массовых сил и сил, приложенных к $S_0^{\pm}$, имеем

$$\delta A_1 = \iint\limits_{\Omega} R^j \delta w_j\big|_{j=\overline{1,3}} D d\alpha^1 d\alpha^2 - \iint\limits_{\Omega} \mathcal{L}^i \delta w_{\alpha^i}\big|_{i=1,2} D d\alpha^1 d\alpha^2.$$

Элементарная работа δA_2 усилий, приложенных к S_0^0, дается формулой

$$\delta A_2 = \int_{\Gamma} (Q^j \delta w_j\big|_{j=\overline{1,3}} - M^i \delta w_{\alpha^i}\big|_{i=1,2}) ds.$$

Здесь R^j, $\mathcal{L}^i$, Q^j, M^i — известные функции. Отметим, если *условие* B $\mathbf{F} \in L_2(\overline{\Omega}) \times L_1[-h,h]$, $\mathbf{F}^{\pm} \in L_2(\overline{\Omega})$, то $R^j, \mathcal{L}^i \in L_2(\overline{\Omega})$, $Q^j, M^i \in L_2(\Gamma)$. Принимая во внимание соотношения (5), (7), (9), (10), выражения для δA_j можно преобразовать к виду

$$\delta A_1 = \iint\limits_{\Omega} D[R^1 \operatorname{Re} T_4(\varepsilon_3, \delta\varepsilon_3) + R^2 \operatorname{Im} T_4(\varepsilon_3, \delta\varepsilon_3)] d\alpha^1 d\alpha^2 + I_1(\delta\varepsilon), \tag{25}$$

$$\delta A_2 = \iint\limits_{\Omega} [\widetilde{Q}^2 K_2^0(\varepsilon_3, \delta\varepsilon_3) - \widetilde{Q}^1 K_1^0(\varepsilon_3, \delta\varepsilon_3)] d\alpha^1 d\alpha^2 + I_2(\delta\varepsilon), \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned} T_4(\varepsilon_3, \delta\varepsilon_3) &= T_3 K_2^0(\varepsilon_3, \delta\varepsilon_3) - T_2 K_1^0(\varepsilon_3, \delta_3), \\ K_1^0(\varepsilon_3, \delta\varepsilon_3) &= \operatorname{Re} T_1\varepsilon_3 \operatorname{Re} T_1 \delta\varepsilon_3 - \operatorname{Im} T_1 \varepsilon_3 \operatorname{Im} T_1 \delta\varepsilon_3, \\ K_2^0(\varepsilon_3, \delta\varepsilon_3) &= (-\tfrac{1}{2})[\operatorname{Re} T_1 \varepsilon_3 \operatorname{Im} T_1 \delta\varepsilon_3 + \operatorname{Im} T_1 \varepsilon_3 \operatorname{Re} T_1 \delta\varepsilon_3]; \end{aligned} \tag{27}$$

через $I_j(\delta\varepsilon)$ обозначены линейные ограниченные относительно $\delta\varepsilon$ функционалы в $L_2(\overline{\Omega})$; $\widetilde{Q}^j$ $(\in L_2(\overline{\Omega}))$ — известные функции.

Введем линейное пространство $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$, любой паре элементов $\varepsilon^j = (\varepsilon_1^j, \varepsilon_2^j, \varepsilon_3^j)$ которого поставлено в соответствие число

$$(\varepsilon^1, \varepsilon^2)_{\widetilde{L}_2} = \iint\limits_{\Omega} \{ D_p^{\lambda\mu qs} t_{\lambda\mu}^0(\varepsilon^1) t_{qs}^0(\varepsilon^2) + \\ + D_*^{\lambda\mu qs}[t_{\lambda\mu}^0(\varepsilon^1) t_{qs}^1(\varepsilon^2) + t_{\lambda\mu}^1(\varepsilon^1) t_{qs}^0(\varepsilon^2)] + D_u^{\lambda\mu qs} t_{\lambda\mu}^1(\varepsilon^1) t_{qs}^1(\varepsilon^2)\} D d\alpha^1 d\alpha^2, \tag{28}$$

удовлетворяющее всем условиям скалярного произведения. Проверим лишь, что из $(\varepsilon,\varepsilon)_{\widetilde{L}_2} = 0$ следует $\varepsilon = 0$ (справедливость остальных условий очевидна). Действительно, в силу положительной определенности квадратичной формы $2Q$ с учетом (17) из $(\varepsilon,\varepsilon)_{\widetilde{L}_2} = 0$ следует $t_{\lambda\mu}^0(\varepsilon) = t_{\lambda\mu}^1(\varepsilon) = 0$. Тогда, принимая во внимание формулы (21), сразу получаем $\varepsilon = 0$.

Скалярному произведению (28) соответствует норма

$$\|\varepsilon\|_{\widetilde{L}_2}^2 = \iint\limits_{\Omega} \{ D_p^{\lambda\mu qs} t_{\lambda\mu}^0(\varepsilon) t_{qs}^0(\varepsilon) + \\ + D_*^{\lambda\mu qs}[t_{\lambda\mu}^0(\varepsilon) t_{qs}^1(\varepsilon) + t_{\lambda\mu}^1(\varepsilon) t_{qs}^0(\varepsilon)] + D_u^{\lambda\mu qs} t_{\lambda\mu}^1(\varepsilon) t_{qs}^1(\varepsilon)\} D d\alpha^1 d\alpha^2. \tag{29}$$

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* A. *Тогда имеет место*

$$m_0 \|\varepsilon\|_{L_2}^2 \le \|\varepsilon\|_{\widetilde{L}_2}^2 \le M_0 \|\varepsilon\|_{L_2}^2, \quad m_0, M_0 > 0,$$

т. е. нормы $\|\cdot\|_{L_2}$, $\|\cdot\|_{\widetilde{L}_2}$ *эквивалентны.*

Справедливость леммы 2 следует из неравенства (19) и условия A.

Из леммы 2 следует, что пространство $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$ с нормой (29) является гильбертовым пространством.

Введем понятие обобщенного решения задачи в деформациях.

Определение. Обобщенным решением задачи в деформациях назовем вектор-функцию $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую интегральному соотношению

$$(\varepsilon, \varphi)_{\widetilde{L}_2} = \iint_{\Omega} \{D[R^1 \operatorname{Re} T_4(\varepsilon_3, \varphi_3) + R^2 \operatorname{Im} T_4(\varepsilon_3, \varphi_3)] + \widetilde{Q}^2 K_2^0(\varepsilon_3, \varphi_3) - \widetilde{Q}^1 K_1^0(\varepsilon_3, \varphi_3)\} d\alpha^1 d\alpha^2 -$$

$$- \iint_{\Omega} D[Q_p(\varepsilon, \varphi) + Q_*(\varepsilon, \varphi)] d\alpha^1 d\alpha^2 - I(\varphi) \quad (30)$$

для любой вектор-функции $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$. Здесь $I(\varphi)$ — линейный функционал в $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$; $Q_{p,*}(\varepsilon, \varphi)$, $T_4(\varepsilon_3, \varphi_3)$, $K_j^0(\varepsilon_3, \varphi_3)$ даются формулами (23), (24), (27) соответственно.

Отметим, что при введении обобщенного решения задачи в виде (30) мы следовали [1]. Если принять во внимание соотношения (15), (22), (20), (25), (26), то легко видеть, что (30) выражает принцип Лагранжа для системы оболочка–внешние силы. При этом $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ суть возможные деформации для этой системы.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* A *и* B. *Тогда при* $\varepsilon, \varphi \in \widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$ *интегралы* $I(\varphi)$ *в* (30) *имеют смысл и представляют собой линейные ограниченные функционалы в* $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$ *относительно* φ *при фиксированной вектор-функции* ε.

Прежде всего отметим, что в силу леммы 2 $\varepsilon, \varphi \in L_2(\overline{\Omega})$. Далее доказательство леммы 3 проводится с помощью формул (27), леммы 1, теоремы 1.

По теореме Рисса существует элемент $G \in \widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$ такой, что правая часть (30) представляется в виде скалярного произведения $(G, \varphi)_{\widetilde{L}_2}$. Тогда интегральное соотношение (30) запишется в виде $(\varepsilon, \varphi)_{\widetilde{L}_2} = (G, \varphi)_{\widetilde{L}_2}$. Отсюда в силу произвольности φ получаем

$$\varepsilon - G(\varepsilon) = 0. \quad (31)$$

Таким образом, нахождение обобщенного решения задачи свелось к нахождению решения операторного уравнения (31).

Займемся исследованием разрешимости уравнения (31).

Теорема 2. *Оператор* $G(\varepsilon)$ *действует из* $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$ *в* $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$ *усиленно непрерывно.*

Действительно, пусть $\varepsilon^n \to \varepsilon^0$ слабо в $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$. В силу леммы 2 можем считать, что $\varepsilon^n \to \varepsilon^0$ слабо в $L_2(\overline{\Omega})$. Так как $T_j f$ $(j = \overline{1,3})$, $H_5 f$ — вполне непрерывные линейные операторы в $L_2(\overline{\Omega})$, то они усиленно непрерывны ([1], с. 65). Далее, в силу усиленной непрерывности $T_1 f$ и ограниченности операторов $H_3 f$, $H_4 f$ в $L_2(\overline{\Omega})$ из формулы (11) следует усиленная непрерывность операторов Hf, $H_\delta(\varepsilon_3, \varphi_3)$ (относительно ε_3). Тогда, используя соотношения (23), (24), (21), (27), после громоздких выкладок получим оценку

$$|(G(\varepsilon^n) - G(\varepsilon^0), \varphi)_{\widetilde{L}_2}| \le \delta_n \|\varphi\|_{\widetilde{L}_2},$$

где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $\|G(\varepsilon^n) - G(\varepsilon^0)\|_{\widetilde{L}_2} \le \delta_n$, т. е. оператор $G(\varepsilon)$ усиленно непрерывен в $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$, следовательно, вполне непрерывен ([1], с. 65).

Лемма 4. *Пусть* $\Gamma \in C_\alpha^1$ $(0 < \alpha < 1)$ *и выполнено условие*

$$q \equiv q_0 \|\overline{\Phi_\Gamma(z)} + 2(\operatorname{Re} T_2^* \gamma - i \operatorname{Re} T_3^* \gamma)\|_C < 1, \quad (32)$$

где $\gamma = A_1 + \overline{B}_1 - \overline{g}_2 - \Phi_\Gamma A_1 - \overline{\Phi_\Gamma B_1}$; $\Phi_\Gamma(z) = \int\limits_\Gamma 1/(z-\zeta) d\overline{\zeta} \frac{1}{2\pi i}$; q_0 (≤ 1) — *известная положительная постоянная*; $T_j^* f$ — *оператор, сопряженный оператору* $T_j f$. *Тогда уравнение*

$$(H\varepsilon_3)(z) = 0, \quad x \in \overline{\Omega} \quad (33)$$

имеет только тривиальное решение в $L_2(\overline{\Omega})$.

Покажем это. Пусть $\varepsilon_3 \in L_2(\overline{\Omega})$ есть нетривиальное решение уравнения (33). Обе части (33) интегрируем по области Ω, при этом используем формулы (11), (12). Применяя формулу Грина ([3], с. 28) к интегралам от Sf по области Ω и меняя порядок интегрирования, после несложных преобразований приходим к неравенству вида

$$\iint\limits_{\Omega} |T_1\varepsilon_3|^2 d\alpha^1 d\alpha^2 \le q \iint\limits_{\Omega} |T_1\varepsilon_3|^2 d\alpha^1 d\alpha^2.$$

Отсюда в силу (32) следует, что $T_1\varepsilon_3 \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Так как $g(z) = T_1\varepsilon_3$ удовлетворяет уравнению (4), имеем $\varepsilon_3 \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Лемма доказана.

Отметим, если Ω — круг, то $\Phi_\Gamma(z) \equiv 0$, $z \in \Omega$. Кроме этого, если срединная поверхность S_0 является поверхностью нулевой гауссовой кривизны, то, как известно ([1], с. 18), на S_0 существует единая евклидова параметризация. Тогда $G^k_{ij} \equiv 0$, следовательно, $A_1 = B_1 = g_2 \equiv 0$. Отсюда $q = 0$, т. е. условие (32) в этом частном случае выполняется.

В дальнейшем, как и в [1], потребуется некоторое разбиение сферы $S_{\widetilde{L}_2}(R, 0)$ гильбертова пространства $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$ радиуса R с центром в начале координат. Для его построения возьмем сферу $\|\varepsilon_3\|_{L_2} = 1$ (обозначим ее через $S_{L_2}(1, 0)$) пространства $L_2(\overline{\Omega})$. Через $S'_{L_2}(1, 0)$ обозначим подмножество $S_{L_2}(1, 0)$, элементы которого удовлетворяют неравенству

$$I(\varepsilon_3) \equiv \tfrac{c_1}{\delta}\|H_5\varepsilon_3\|^2_{L_2} + c_2\|\beta_1 \operatorname{Re} T_4(\varepsilon_3, \varepsilon_3) + \beta_2 \operatorname{Im} T_4(\varepsilon_3, \varepsilon_3) + \beta_3 K^0_2(\varepsilon_3, \varepsilon_3) - \beta_4 K^0_1(\varepsilon_3, \varepsilon_3)\|_{L_2} > \tfrac{1}{2}, \quad (34)$$

где c_j, $\delta > 0$ — некоторые фиксированные постоянные; β_j — фиксированные функции класса $L_2(\overline{\Omega})$, не зависящие от ε_3. Множество $S'_{L_2}(r_3, 0)$ в силу однородности функционала $I(\varepsilon_3)$ есть центральная проекция $S'_{L_2}(1, 0)$ с единичной сферы $S_{L_2}(1, 0)$ на сферу $S_{L_2}(r_3, 0)$. Пусть $S''_{L_2}(1, 0)$ есть подмножество $S_{L_2}(1, 0)$, элементы которого удовлетворяют условию

$$I(\varepsilon_3) \le \frac{1}{2}. \quad (35)$$

$S''_{L_2}(r_3, 0)$ есть центральная проекция $S''_{L_2}(1, 0)$ с $S_{L_2}(1, 0)$ на $S_{L_2}(r_3, 0)$. Очевидно, $S'_{L_2}(r_3, 0) \cup S''_{L_2}(r_3, 0) = S_{L_2}(r_3, 0)$. Если одно из подмножеств $S'_{L_2}(r_3, 0)$, $S''_{L_2}(r_3, 0)$ окажется пустым, это лишь упростит наши рассуждения. Через $\overline{S}'_{L_2}(1, 0)$ обозначим слабое замыкание $S'_{L_2}(1, 0)$.

Лемма 5. *Множество $\overline{S}'_{L_2}(1, 0)$ не содержит нуля.*

Действительно, т. к. $H_5 0 = T_4(0, 0) = K^0_j(0, 0) = 0$, множество $S'_{L_2}(1, 0)$ не содержит нуля. Пусть $\varepsilon^n_3 \in S'_{L_2}(1, 0)$ и $\varepsilon^n_3 \to 0$ (слабо) в $L_2(\overline{\Omega})$, $n \to \infty$. Из усиленной непрерывности операторов $H_5\varepsilon_3$, $T_4(\varepsilon_3, \varepsilon_3)$, $K^0_j(\varepsilon_3, \varepsilon_3)$ в $L_2(\overline{\Omega})$ следует

$$\|H_5\varepsilon^n_3\|_{L_2},\ \|T_4(\varepsilon^n_3, \varepsilon^n_3)\|_{L_2},\ \|K^0_j(\varepsilon^n_3, \varepsilon^n_3)\|_{L_2} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

и (34) становится невозможным. Полученное противоречие доказывает лемму 5.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (32). *Тогда на $S'_{L_2}(r_3, 0)$ справедливо неравенство*

$$\|H\varepsilon_3\|^2_{L_2} \ge c\, r^4_3, \quad c > 0.$$

Вначале установим, что на $S'_{L_2}(1, 0)$ имеет место

$$\|H\varepsilon_3\|^2_{L_2} \ge c > 0. \quad (36)$$

Пусть существует последовательность $\varepsilon^n_3 \in \overline{S}'_{L_2}(1, 0)$ такая, что $\|H\varepsilon^n_3\|_{L_2} \to 0$ $(n \to \infty)$. Предположим, что $\varepsilon^n_3 \to \varepsilon^0_3$ (слабо), $\varepsilon^0_3 \in \overline{S}'_{L_2}(1, 0)$. Так как оператор $H\varepsilon_3$ усиленно непрерывен в $L_2(\overline{\Omega})$, то $H\varepsilon^n_3 \Longrightarrow H\varepsilon^0_3$ (сильно) в $L_2(\overline{\Omega})$. Следовательно, $H\varepsilon^0_3 = 0$. Тогда в силу леммы 4 $\varepsilon^0_3 \equiv 0$, что противоречит лемме 5. Итак, на $S'_{L_2}(1, 0)$ имеет место (36). Отсюда в силу однородности оператора $H\varepsilon_3$ сразу получаем утверждение теоремы 3.

Введем функционал $N(\varepsilon,t)=(\varepsilon-tG(\varepsilon),\varepsilon)_{\widetilde{L}_2}$, определенный на $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})\times[0,1]$. Для исследования этого функционала сначала $Q_p(\varepsilon,\varepsilon)$ преобразуем к виду

$$Q_p(\varepsilon,\varepsilon)=2Q_p^0(\varepsilon,\varepsilon)-H\varepsilon_3(d_p^{12}t_{12}^0-3d_p^{11}t_{11}^0-3d_p^{22}t_{22}^0-2df_3)-2D_p^{1212}(t_{12}^0)^2, \tag{37}$$

где $Q_p^0(\varepsilon,\varepsilon)=D_p^{\lambda\mu qs}a_{\lambda\mu}a_{qs}$, $a_{11}=a_{22}=H\varepsilon_3$, $a_{12}=t_{12}^0(\varepsilon)$. В силу положительной определенности $D_p^{\lambda\mu qs}$ имеет место неравенство

$$Q_p^0(\varepsilon,\varepsilon)\geq c[2(H\varepsilon_3)^2+(t_{12}^0)^2],\quad c>0. \tag{38}$$

Предположим, что выполняется условие

$$\iint\limits_{\Omega} D[Q_p^0(\varepsilon,\varepsilon)+Q_*(\varepsilon,\varepsilon)]d\alpha^1d\alpha^2\geq 0, \tag{39}$$

где $Q_*(\varepsilon,\varepsilon)$ дается формулой (24).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* A, B, (32), (39). *Тогда на сферах $S_{\widetilde{L}_2}(R,0)$ достаточно большого радиуса R справедливо неравенство*

$$N(\varepsilon,t)\geq c\,R^2,\quad c>0,\quad 0\leq t\leq 1.$$

Покажем это. Через $S'_{\widetilde{L}_2}(R,0)$, $S''_{\widetilde{L}_2}(R,0)$ обозначим множества вектор-функций $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\in S_{\widetilde{L}_2}(R,0)$, у которых ε_3 принадлежит $S'_{L_2}(r_3,0)$, $S''_{L_2}(r_3,0)$ соответственно. Очевидно, $S_{\widetilde{L}_2}(R,0)=S'_{\widetilde{L}_2}(R,0)\cup S''_{\widetilde{L}_2}(R,0)$. Оценим вначале $N(\varepsilon,t)$ на $S'_{\widetilde{L}_2}(R,0)$. С учетом (37), (39) будем иметь

$$\begin{aligned}N(\varepsilon,t)\geq{}&\|\varepsilon\|^2_{\widetilde{L}_2}+t\iint\limits_{\Omega}DQ_p^0(\varepsilon,\varepsilon)d\alpha^1d\alpha^2-t\iint\limits_{\Omega}D[|H\varepsilon_3(d_p^{12}t_{12}^0-3d_p^{11}t_{11}^0-3d_p^{22}t_{22}^0)|+\\&+D_p^{1212}(t_{12}^0)^2]d\alpha^1d\alpha^2-t\bigg|\iint\limits_{\Omega}\{D[2df_3H\varepsilon_3-R^1\operatorname{Re}T_4(\varepsilon_3,\varepsilon_3)-R^2\operatorname{Im}T_4(\varepsilon_3,\varepsilon_3)]-\\&-\widetilde{Q}^2K_2^0(\varepsilon_3,\varepsilon_3)+\widetilde{Q}^1K_1^0(\varepsilon_3,\varepsilon_3)\}\bigg|d\alpha^1d\alpha^2-t|I(\varepsilon)|.\end{aligned} \tag{40}$$

Так как $I(\varepsilon)$ есть линейный ограниченный функционал в $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$, то существует $\varepsilon^0\in\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$ такое, что $I(\varepsilon)=(\varepsilon^0,\varepsilon)_{\widetilde{L}_2}$. Далее, используя (17), (38), теоремы 1, 3, из (40) будем иметь

$$\begin{aligned}N(\varepsilon,t)\geq{}&\|\varepsilon\|^2_{\widetilde{L}_2}+tc[c\|\varepsilon_3\|^4_{L_2}-\|\varepsilon_3\|^3_{L_2}-\\&-(1+\|\varepsilon_1\|_{L_2}+\|\varepsilon_2\|_{L_2})\|\varepsilon_3\|^2_{L_2}-\|\varepsilon^0\|_{\widetilde{L}_2}\|\varepsilon_3\|_{L_2}-\|\varepsilon_2\|^2_{L_2}],\quad c>0.\end{aligned} \tag{41}$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой полином четвертой степени относительно $\|\varepsilon_3\|_{L_2}$ с положительным старшим коэффициентом. Поэтому при произвольно фиксированных $\|\varepsilon_j\|_{L_2}=r_j$ $(j=1,2)$ радиус сферы $\|\varepsilon_3\|_{L_2}=r_3$ можем взять настолько большим, что выражение в квадратных скобках в (41) будет больше нуля. Тогда в силу леммы 2 при $R^2\in[m_0r^2,M_0r^2]$, $r^2=r_1^2+r_2^2+r_3^2$ на $S'_{\widetilde{L}_2}(R,0)$ имеет место неравенство

$$N(\varepsilon,t)\geq R^2,\quad 0\leq t\leq 1. \tag{42}$$

Теперь оценим $N(\varepsilon,t)$ на $S''_{\widetilde{L}_2}(R,0)$. Из (40) имеем

$$\begin{aligned}N(\varepsilon,t)\geq{}&\|\varepsilon\|^2_{\widetilde{L}_2}+t\bigg[\iint\limits_{\Omega}DQ_p^0(\varepsilon,\varepsilon)d\alpha^1d\alpha^2-\delta\|H\varepsilon_3\|^2_{L_2}\bigg]-\\&-t\bigg\{\frac{1}{2\delta}\|D(d_p^{12}t_{12}^0-3d_p^{11}t_{11}^0-3d_p^{22}t_{22}^0)\|^2_{L_2}+2\|DD_p^{1212}\|_c\,\|t_{12}^0\|^2_{L_2}+\frac{1}{\delta}\|df_3D\|^2_{L_2}\bigg\}-\\&-\sqrt{\operatorname{mes}\Omega}\|D[R^1\operatorname{Re}T_4(\varepsilon_3,\varepsilon_3)+R^2\operatorname{Im}T_4(\varepsilon_3,\varepsilon_3)]+\widetilde{Q}^2K_2^0(\varepsilon_3,\varepsilon_3)-\widetilde{Q}^1K_1^0(\varepsilon_3,\varepsilon_3)\|_{L_2}-\|\varepsilon^0\|_{\widetilde{L}_2}\|\varepsilon\|_{\widetilde{L}_2}.\end{aligned} \tag{43}$$

В силу того, что $Q_p^0(\varepsilon,\varepsilon)$ является положительно определенной формой переменных $H\varepsilon_3$, t_{12}^0, постоянную $\delta > 0$ можно выбрать так, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} DQ_p^0(\varepsilon,\varepsilon)d\alpha^1 d\alpha^2 - \delta\|H\varepsilon_3\|_{L_2}^2 > 0. \tag{44}$$

Теперь в силу (44) из (43) получаем

$$N(\varepsilon,t) \geq \|\varepsilon\|_{\widetilde{L}_2}^2 - \frac{3}{2\delta}\|dD\|_c\,\|H_5\varepsilon_3\|_{L_2}^2 - \frac{c}{2\delta}(\|\varepsilon_1\|_{L_2}^2 + \|\varepsilon_2\|_{L_2}^2) -$$
$$- 2\|DD_p^{1212}\|_c\,\|\varepsilon_2\|_{L_2}^2 - \frac{1}{\delta}\|df_3D\|_{L_2}^2 - \sqrt{\operatorname{mes}\Omega}\|D[R^1\operatorname{Re}T_4(\varepsilon_3,\varepsilon_3) + R^2\operatorname{Im}T_4(\varepsilon_3,\varepsilon_3)] +$$
$$+ \widetilde{Q}^2K_2^0(\varepsilon_3,\varepsilon_3) - \widetilde{Q}^1K_1^0(\varepsilon_3,\varepsilon_3)\|_{L_2} - \|\varepsilon^0\|_{\widetilde{L}_2}\,\|\varepsilon\|_{\widetilde{L}_2}. \tag{45}$$

Положим $C_1 = \frac{3}{2m_0}\|dD\|_c$, $C_2 = \sqrt{\frac{\operatorname{mes}\Omega}{m_0}}$, $\beta_j = DR^j$ $(j=1,2)$, $\beta_3 = \widetilde{Q}^2$, $\beta_4 = \widetilde{Q}^1$. Тогда в силу неравенства (35), леммы 2 из (45) будем иметь

$$N(\varepsilon,t) \geq \tfrac{m_0}{2}\|\varepsilon\|_{\widetilde{L}_2}^2 - c[\|\varepsilon\|_{L_2} - \tfrac{1}{\delta}(\|\varepsilon_1\|_{L_2} + \|\varepsilon_2\|_{L_2} + 1)].$$

Отсюда следует, что при произвольно фиксированных $\|\varepsilon_j\|_{L_2} = r_j$ $(j=1,2)$ радиус сферы $\|\varepsilon\|_{L_2} = r$ можем взять так, чтобы имело место

$$N(\varepsilon,t) \geq \frac{1}{3}\,\frac{m_0}{M_0}R^2, \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{46}$$

Из неравенств (42), (46) следует утверждение теоремы 4.

Из теоремы 4 следует, что вполне непрерывное поле $\varepsilon - G(\varepsilon)$ гомотопно полю ε на сферах достаточно большого радиуса пространства $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$, следовательно, его вращение на этих сферах равно +1. Тогда ([1], с. 74) уравнение (31) внутри сферы $S_{\widetilde{L}_2}(R,0)$ имеет по крайней мере одно решение $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, принадлежащее пространству $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$.

Литература

1. Ворович И.И. *Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек.* – М.: Наука, 1989. – 373 с.
2. Тимергалиев С.Н. *Доказательство разрешимости одной задачи нелинейной теории пологих оболочек* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 9. – С. 60–70.
3. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1988. – 509 с.

Казанская государственная архитектурно-строительная академия

Камский политехнический институт

Поступила
27.04.1996