ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 4 (467)

УДК 514.77

О.В. ХЫШОВА, Е.И. ЯКОВЛЕВ

КРИВИЗНЫ РИЧЧИ МНОГООБРАЗИЙ ТИПА КАЛУЦЫ–КЛЕЙНА

Пусть G — одномерная связная группа Ли, $\mu : E \to M$ — главное G-расслоение и $\overline{g}$ — риманова метрика на тотальном пространстве E, инвариантная относительно действия структурной группы G. В такой ситуации пара $(E, \overline{g})$ называется многообразием типа Калуцы–Клейна. В [1] изучены секционные кривизны таких многообразий, а также влияние их знакоопределенности на топологические инварианты расслоения $\mu : E \to M$. В данной работе аналогичные результаты получены для кривизн Риччи.

Рассмотрим G-связность H на E, ортогональную слоям расслоения μ, и ее форму связности ω. В силу коммутативности группы G на базе M найдется такая замкнутая 2-форма F, что $\mu^* F = d\omega$ — форма кривизны связности H. Определим гомоморфизм $I_{[F]} : H_2(M) \to \mathbf{R}$ формулой

$$I_{[F]}([c]) = \int_c F.$$

Тогда $\operatorname{im} I_{[F]} \subset \mathbf{Z}$ и элемент $[F] \in H^2(M, \mathbf{R})$ является характеристическим классом расслоения μ.

Согласно [1] существуют риманова метрика g на M и гладкая положительная функция $u : M \to \mathbf{R}$, удовлетворяющие равенству

$$\overline{g} = \omega \otimes \omega / 2\overline{u} + \mu^* g, \tag{1}$$

где $\overline{u} = u \circ \mu$. Положим $f = 1/\sqrt{2u}$.

Если S — тензорное поле типа $(1, k)$ на M, $k \geq 0$, то $\operatorname{div} S$ — такое тензорное поле типа $(0, k)$, что $(\operatorname{div} S)(X_1, \dots, X_k)$ — след линейного оператора $X \to (\nabla_X S)(X_1, \dots, X_k)$; здесь ∇ — оператор ковариантного дифференцирования в (M, g), а $X_1, \dots, X_k$ и X — векторные поля. Векторное поле $\operatorname{grad} f$, билинейная форма He_f, функция Δf и поле линейных операторов L на M определяются формулами

$$g(\operatorname{grad} f, X) = Xf, \quad \Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f),$$
$$\mathrm{He}_f(X, Y) = g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y), \quad g(L(X), Y) = F(X, Y).$$

Выберем точку $v \in E$ и вектор единичной длины $\overline{X} \in T_v E$. Положим $p = \mu(v)$, $s = |d\mu(\overline{X})|$, $t = f(p)\omega(\overline{X})$ и $X = (1/s) d\mu(\overline{X})$. Согласно (1) найдутся горизонтальный вектор $\overline{X}_0$ и вертикальный вектор $\overline{X}_1$, удовлетворяющие равенствам $\overline{X} = s\overline{X}_0 + t\overline{X}_1$ и $|\overline{X}_0| = |\overline{X}_1| = 1$. Символом $\overline{\mathrm{Ri}}(\overline{X}, \overline{X})$ договоримся обозначать кривизну Риччи риманова многообразия $(E, \overline{g})$ в направлении вектора $\overline{X}$, а символом $\mathrm{Ri}(X, X)$ — кривизну Риччи многообразия (M, g) в направлении X. Положим

$$\begin{aligned}
c_{11} &= -\Big(\frac{1}{f}\triangle f + \frac{f^2}{4}\operatorname{tr}(L \circ L)\Big)(p), \\
c_{12} &= \frac{1}{2} f(p)(\operatorname{div} L)(X) + \frac{3}{2}(L(X) f), \\
c_{22} &= \mathrm{Ri}(X, X) - \frac{1}{2} f(p)^2 |L(X)|^2 - \frac{1}{f}\mathrm{He}_f(X, X).
\end{aligned} \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00395.

Составим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Кривизна Риччи риманова многообразия* $(E, \overline{g})$ *в направлении вектора* $\overline{X}$ *вычисляется по формуле*

$$\overline{\mathrm{Ri}}(\overline{X}, \overline{X}) = c_{11}t^2 + 2c_{12}ts + c_{22}s^2; \tag{3}$$

она положительна (отрицательна) тогда и только тогда, когда $c_{11} > 0$ $(c_{11} < 0)$ *и* $\det C > 0$.

Доказательство. Рассмотрим такие карты (U, φ) на M и (V, ψ) на E, что $v \in V$ и $\mu(V) = U$. Пусть $\omega_\alpha, \overline{g}_{\alpha\beta}$ — компоненты тензорных полей ω и $\overline{g}$ в карте (V, ψ), а g_{ij}, F_{ij} и L_i^k — компоненты тензорных полей g, F и L в карте (U, φ). Рассмотрим функции $g^{jk} : U \to \mathbf{R}$, удовлетворяющие равенствам $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$, и положим $f_i = \partial_i f$ и $f^k = g^{ki}f_i$ $(\alpha, \beta = 0, \ldots, m = \dim M;\ i, j = 1, \ldots, m)$. В этих обозначениях формула (1) равносильна равенству $\overline{g}_{\alpha\beta} = \overline{f}^2\omega_\alpha\omega_\beta + g^*_{\alpha\beta}$, где $\overline{f} = f \circ \mu$, $g^*_{ij} = g_{ij} \circ \mu$ и $g^*_{0\beta} = 0$. Используя определение формы ω, карту (V, ψ) можно построить таким образом, что функции ω_α будут инвариантны относительно действия группы G, $\omega_0 \equiv 1$ и $\omega_i(v) = 0$. Вычислим компоненты тензора Риччи $\overline{R}_{\alpha\beta}$ в точке v, пользуясь формулами из [1]. Получим

$$\begin{aligned}
\overline{R}_{ij} &= \overline{R}^k_{kij} + \overline{R}^0_{0ij} = \\
&= \Big(R^k_{kij} - \frac{1}{2}f^2(L^k_{[k}F_{i]j} - F_{ki}L^k_j) - \Big(\frac{1}{f}\nabla_i f_j - \frac{1}{4}f^2F_{ik}L^k_j\Big)\Big)(p), \\
\overline{R}_{i0} &= \overline{R}^k_{ki0} + \overline{R}^0_{0i0} = f(f_{[k}L^k_{i]} - f^kF_{ki} + f\nabla_{[k}L^k_{i]})(p), \\
\overline{R}_{0i} &= \overline{R}^k_{k0i} + \overline{R}^0_{00i} = \frac{1}{2}f(f\nabla_k L^k_i + 2f_kL^k_i + L^k_kf_i - f^kF_{ki})(p), \\
\overline{R}_{00} &= \overline{R}^k_{k00} + \overline{R}^0_{000} = -f\Big(\nabla_k f^k + \frac{1}{4}f^3L^k_jL^j_k\Big)(p).
\end{aligned} \tag{4}$$

Поскольку $\overline{X}^i = sX^i$, $t = f\omega_0\overline{X}^0$, то в силу (4)

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Ri}}(\overline{X}, \overline{X}) &= \overline{R}_{ij}\overline{X}^i\overline{X}^j + \overline{R}_{i0}\overline{X}^i\overline{X}^0 + \overline{R}_{0i}\overline{X}^0\overline{X}^i + \overline{R}_{00}\overline{X}^0\overline{X}^0 = \\
&= s^2\Big(R^k_{kij} - \frac{1}{2}f^2g_{kl}L^k_iL^l_j - \frac{1}{f}\nabla_i f_j\Big)(p)X^iX^j + \\
&\quad + st(f\nabla_k L^k_i + 3f_kL^k_i)(p)X^i + t^2\Big(-\frac{1}{f}\nabla_k f^k - \frac{1}{4}f^2L^k_jL^j_k\Big)(p).
\end{aligned}$$

Отсюда и из (2) следует (3). Для завершения доказательства осталось применить критерий Сильвестра. □

Теорема 2. *Пусть* $(E, \overline{g})$ *— полное риманово многообразие, кривизна Риччи которого ограничена снизу положительным числом. Тогда*

1) *характеристический класс расслоения* μ *отличен от нуля*;
2) *ранг образа гомоморфизма Гуревича* $\chi : \pi_2(M, p) \to H_2(M)$ *положителен, в частности,* $\operatorname{rank}\pi_2(M, p) > 0$ *и* $\operatorname{rank}H_2(M) > 0$.

Доказательство. Сужение ω_p формы ω на слой $G_p = \mu^{-1}(p)$ является замкнутой 1-формой. Определим гомоморфизмы $J_{[\omega_p]} : \pi_1(G_p, v) \to \mathbf{R}$ и $J_{[F]} : \pi_2(M, p) \to \mathbf{R}$ формулами

$$J_{[\omega_p]}([x]) = \int_x \omega_p, \quad J_{[F]} = I_{[F]} \circ \chi.$$

Имеем точную последовательность

$$\pi_2(E, v) \xrightarrow{\mu_2} \pi_2(M, p) \xrightarrow{\partial_2} \pi_1(G_p, v) \xrightarrow{i_1} \pi_1(E, v) \xrightarrow{\mu_1} \pi_1(M, p),$$

откуда вытекает

$$\ker \mu_1 \cong \pi_1(G_p, v)/\operatorname{im} \partial_2. \tag{5}$$

Рассмотрим сфероид $c : I^2 \to M$ и относительный кусочно-гладкий сфероид $\overline{c} : I^2 \to E$, для которых $[c] \in \pi_2(M,p)$, $[\overline{c}] \in \pi_2(E, G_p, v)$ и $\mu \circ \overline{c} = c$. По построению $\partial_2([c]) = [\partial \overline{c}] \in \pi_1(G_p, v)$ и

$$\int_c F = \int_{\overline{c}} d\omega = \int_{\partial \overline{c}} \omega = \int_{\partial \overline{c}} \omega_p.$$

Таким образом,

$$J_{[F]} = J_{[\omega_p]} \circ \partial_2. \tag{6}$$

Из условий, наложенных на $(E, \overline{g})$, по теореме Майерса ([2], с. 234) вытекает, что тотальное пространство расслоения μ компактно, а его фундаментальная группа конечна. Первое влечет за собой равенство $G = U(1)$. При этом $J_{[\omega_p]} : \pi_1(G_p, v) \to \mathbf{Z}$ — изоморфизм. Поэтому из (5) и (6) следует, что $\ker \mu_1 \cong \mathbf{Z}/\operatorname{im} J_{[F]}$. В силу конечности группы $\pi_1(E, v) \supset \ker \mu_1$ последнее возможно только при $J_{[F]} \neq 0$. Но тогда $[F] \neq 0$ в $H^2(M, \mathbf{R})$. Кроме того, существует сфероид $c : I^2 \to M$, гомологический класс которого является элементом бесконечного порядка группы $H_2(M)$. А это значит, что $\operatorname{rank}(\operatorname{im} \chi) \geq 1$. □

При $\dim E = 3$ условие теоремы 2 можно ослабить.

Теорема 3. *Пусть* $\dim E = 3$*. Тогда, если* $(E, \overline{g})$ *— полное риманово многообразие положительной кривизны Риччи, многообразия* E *и* M *компактны и выполнены утверждения* (1)–(2) *теоремы* 2.

Доказательство. Допустим сначала, что M — некомпактное многообразие. Тогда $H^2(M, \mathbf{Z}) = 0$ и, следовательно, расслоение $\mu : E \to M$ тривиально. Если $G = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, то $\pi_1(E, v) \cong \pi_1(M, p) \times \mathbf{Z}$. При $G = \mathbf{R}$ существует фактор-расслоение $\mu' : E' \to M$ расслоения $\mu : E \to M$ по подгруппе $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$. Оно тривиально и имеет структурную группу $G' = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Поэтому, как и выше, $\pi_1(E', v') \cong \pi_1(M, p) \times \mathbf{Z}$. Поскольку $E' = E/\mathbf{Z}$ и метрика g инвариантна относительно действия группы $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$, то на E' индуцируется полная риманова метрика $\overline{g}'$ положительной кривизны Риччи. Если многообразие M компактно и $G = \mathbf{R}$, то $\pi_n(M, p) \neq 0$ либо для $n = 1$, либо для $n = 2$. Кроме того, $E \approx M \times \mathbf{R}$. Таким образом, либо $\pi_1(E, v) \neq 0$, либо $\pi_2(E, v) \neq 0$.

Во всех рассмотренных случаях имеем полные некомпактные римановы 3-многообразия положительной кривизны Риччи с нетривиальными гомотопическими группами. Это противоречит теореме Шоэна и Яу ([3], с. 234). Следовательно, база M, структурная группа G и тотальное пространство E расслоения μ компактны. При этом кривизны Риччи риманова многообразия $(E, \overline{g})$ ограничены снизу положительным числом, откуда по теореме 2 вытекают остальные утверждения. □

Л. Берар-Бержери и П. Набоннан привели примеры полных римановых многообразий положительной кривизны Риччи размерности $n \geq 4$, имеющих фундаментальную группу $\mathbf{Z}$ ([3], с. 223). Поэтому теорема Шоэна и Яу, а вместе с ней и доказательство теоремы 3 на случай $\dim E > 3$ не обобщаются.

Теорема 4. *Пусть* $(E, \overline{g})$ *— полное риманово многообразие отрицательной кривизны Риччи, тогда база* M *расслоения* μ *некомпактна.*

Доказательство. Предположим, что многообразие M компактно. Тогда найдется точка локального максимума $p \in M$ функции f. В силу формулы (2), теоремы 1 и условия доказываемой теоремы

$$c_{11} = -\frac{1}{f} \triangle f - \frac{f^2}{4} \operatorname{tr}(L \circ L) < 0,$$

откуда следует, что $\triangle f > 0$. Поскольку $\triangle f = \operatorname{tr}\mathrm{He}_f$, то существует такой вектор $X \in T_pM$, что $\mathrm{He}_f(X,X) > 0$.

Рассмотрим геодезическую $x : \mathbf{R} \to M$ риманова многообразия (M,g) с начальными условиями $x(0) = p$ и $(dx/ds)(0) = X$. Тогда $(d(f\circ x)/ds)(0) = 0$ и $(d^2(f\circ x)/ds^2)(0) = \mathrm{He}_f(X,X) > 0$. Последнее неравенство противоречит выбору точки p. Следовательно, наше допущение неверно и многообразие M некомпактно. $\square$

Примеры

1. Предположим, что M — сфера единичного радиуса в трехмерном евклидовом пространстве, g — индуцированная риманова метрика на M, $\mu : S^3 \to M$ — расслоение Хопфа. Если Ω — форма объема многообразия (M,g), то $\int_M \Omega = 4\pi$. Положим $F = \Omega/4\pi$ и $u \equiv 1/2$. Тогда $\operatorname{im} I_{[F]} = \mathbf{Z}$ и потому на $E = S^3$ существует $U(1)$-связность H с формой кривизны $d\omega = \mu^*F$. Определим риманову метрику $\overline{g}$ на E формулой (1). Тогда $f \equiv 1$ и для любой точки $p \in M$ и произвольного вектора $X \in T_pM$ имеют место равенства $c_{11} = 2$, $c_{12} = 0$ и $c_{22} = 1/2$. Поэтому $\det C > 0$, $c_{11} > 0$ и согласно теореме 1 $(E,\overline{g})$ — полное риманово многообразие положительной кривизны Риччи.

2. Рассмотрим поверхность M в $\mathbf{R}^3$ с параметризацией $\overline{r}(v,w) = \{v, w, 1/(v^2+w^2)\}$, $v,w \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ и риманову метрику g на M, индуцированную евклидовой метрикой пространства $\mathbf{R}^3$. Положим $F \equiv 0$ и $u(v,w) = 1/2(v^2+w^2)^2$. На пространстве $E = M \times G$ тривиального расслоения $\mu : E \to M$ определены плоская G-связность H с формой связности ω и риманова метрика $\overline{g}$ вида (1). Из полноты поверхности (M,g) вытекает полнота многообразия $(E,\overline{g})$. При этом $L \equiv 0$ и $f(v,w) = v^2+w^2$. Для точки $p \in M$ с координатами (v,w) и вектора $X \in T_pM$ с координатами X^1, X^2 в базисе $\partial\overline{r}/\partial v$, $\partial\overline{r}/\partial w$ имеют место равенства

$$c_{11} = -1 - \frac{16(v+w)^2}{(v^2+w^2)^2((v^2+w^2)^3+4)}, \quad c_{12} = 0,$$
$$c_{22} = -2(X^1v - X^2w)^2 - \frac{24(X^1v + X^2w)^2}{(v^2+w^2)^3((v^2+w^2)^3+4)}.$$

Следовательно, $\det C > 0$, $c_{11} < 0$ и по теореме 1 кривизны Риччи полного риманова многообразия $(E,\overline{g})$ отрицательны во всех точках и по всем направлениям.

Литература

1. Яковлев Е.И. *Секционные кривизны многообразий типа Калуцы–Клейна*// Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 9. – С. 76–82.
2. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. *Риманова геометрия в целом.* – М.: Мир, 1971. – 343 с.
3. Бессе А. *Многообразия Эйнштейна.* – М.: Мир, 1990. – Т. 1. – 318 с.

Нижегородский государственный университет

Поступили
первый вариант 15.12.1998
окончательный вариант 26.07.1999