ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 11 (486)

УДК 517.518.1

К.Б. ИГУДЕСМАН

ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СТАНДАРТНЫХ КАНТОРОВЫХ МНОЖЕСТВ

Основная цель данной статьи — проверить "эмпирическое" правило Б. Мандельброта [1] на примере пересечения стандартных канторовых множеств.

Гипотеза Б. Мандельброта. *Коразмерность пересечения фрактальных множеств почти всегда равна сумме коразмерностей этих множеств.*

Под размерностью фрактального множества или фрактальной размерностью понимается размерность Хаусдорфа. Если сумма коразмерностей больше или равна топологической размерности объемлющего пространства, то в соответствии с гипотезой размерность пересечения почти всегда равна нулю. Термин "почти всегда" обретает смысл в конкретных примерах, когда на множестве всевозможных пересечений фрактальных множеств вводится некоторая мера.

В том или ином виде задача о пересечении канторовых множеств встречалась во многих работах. В [2]–[4] рассматривались пересечения так называемых толстых канторовых множеств. В [5] доказано, что пересечение двух стандартных канторовых множеств может иметь любую хаусдорфову размерность от 0 до $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. В [6] изучалось пересечение стандартных канторовых множеств, одно из которых сдвинуто на величину, принадлежащую канторову множеству.

Дадим определение хаусдорфовой меры и размерности. Пусть U — непустое множество в $\mathbb{R}^n$, $|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$. Если $E \subset \bigcup\limits_i U_i$ и $0 < |U_i| \le \delta$ для каждого i, то будем говорить, что $\{U_i\}$ — δ-покрытие множества E. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ и $s \ge 0$. Для любого $\delta > 0$ определим внешнюю меру множества E:

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s,$$

где $\inf$ берется по всем счетным δ-покрытиям $\{U_i\}$ множества E.

Определим хаусдорфову внешнюю s-меру $\mathcal{H}^s$ на $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to \infty} \mathcal{H}^s_\delta(E).$$

Предел существует, но может быть равным бесконечности, т. к. $\mathcal{H}^s_\delta$ не убывает при $\delta \to \infty$.

Известно, что σ-алгебра $\mathcal{H}^s$-измеримых множеств содержит борелевские множества. Кроме того, для любого $E \subset \mathbb{R}^n$ существует единственное число $D(E) \in [0, n]$ такое, что

$$\mathcal{H}^t(E) = \begin{cases} \infty, & t < D(E); \\ 0, & t > D(E). \end{cases}$$

Число $D(E)$ называют хаусдорфовой или фрактальной размерностью множества E.

Положим $K_0 = [0,1]$, $K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ и т. д., где K_i получено из K_{i-1} удалением средней части каждого из интервалов, входящих в K_{i-1}. Таким образом, K_i

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00308.

состоит из 2^i замкнутых интервалов длины 3^{-i}. Взяв пересечение всех K_i, получим канторово множество $K = \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} K_i$.

Пусть $a \in [0,1]$, обозначим $K + a = \{x : x - a \in K\}$, $E_a = K \bigcap (K + a)$. Известно, что фрактальная размерность канторова множества $D(K) = D(K + a) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Согласно гипотезе ожидается

$$D_{\text{ожид}}(E_a) = \frac{\ln 4}{\ln 3} - 1.$$

Теорема. *Для почти всех (по мере Лебега)* $a \in [0,1]$

$$D(E_a) \le \frac{\ln 2}{3 \ln 3} < D_{\text{ожид}}(E_a).$$

Следовательно, для пересечения канторовых множеств гипотеза Б. Мандельброта неверна.

Доказательство. Для любого натурального k множество $S_{a,k} = K_k \bigcap (K_k + a)$ является покрытием E_a. Понятно, что $\{S_{a,k}\}_k$ — убывающая последовательность множеств и $E_a = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_{a,k}$. Для того, чтобы оценить сверху фрактальную размерность E_a, вычислим $N_a(k)$ — число интервалов в $S_{a,k}$. Так как длины всех интервалов, входящих в $S_{a,k}$, не превосходят 3^{-k}, то $D(E_a) \le s_a$, где s_a определяется из соотношения

$$\liminf_{k \to \infty} 3^{-tk} N_a(k) = \begin{cases} \infty, & t < s_a; \\ 0, & t > s_a. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $a = 0, a_1, a_2, a_3, \dots$ — некоторое троичное разложение числа $a \in [0,1]$. Разобьем множество $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ на два дизъюнктных подмножества $A(a) = \Big\{a_k : \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i = 0 \pmod 2\Big\}$, $\overline{A}(a) = \Big\{a_k : \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i = 1 \pmod 2\Big\}$ (здесь положено $a_0 = 0$). Обозначим через χ_Z характеристическую функцию множества Z (если Z — целое число, то рассмотрим его как подмножество множества целых чисел). По построению

$$N_a(k) = 2^{f_a(k)}, \quad \text{где} \quad f_a(k) = \sum_{i=1}^{k} \big(\chi_0(a_i)\chi_{A(a)}(a_i) + \chi_2(a_i)\chi_{\overline{A}(a)}(a_i)\big), \tag{2}$$

причем $N_a(k)$ не зависит от троичного разложения a.

Понятно, что если задано троичное разложение числа a, то, используя (1) и (2), можно оценить сверху значение фрактальной размерности множества E_a. Однако для произвольного иррационального числа невозможно вычислить точно даже такие числовые характеристики его троичного разложения как доля нулей, единиц или двоек в его троичном разложении. Известно только [7], что почти все (по мере Лебега) числа из интервала $[0,1]$ обладают тем свойством, что доля нулей, единиц и двоек в их троичном разложении равна $\frac{1}{3}$.

Пусть $\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, a_3, \dots)\}$, где a_k — независимые случайные величины, принимающие значения 0, 1, 2 с одинаковой вероятностью, равной $\frac{1}{3}$. Рассмотрим отображение $a = a(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ такое, что ω есть троичное разложение a. Ясно, что возможные значения a заполняют отрезок $[0,1]$. Известно [7], что для любого борелевского множества $B \subset [0,1]$ $P\{\omega : a(\omega) \in B\} = \mathrm{mes}(B)$, где mes — лебегова мера.

Рассмотрим отображение $\gamma : \Omega \to \overline{\Omega}$, действующее по правилу $\gamma(\omega) = \overline{\omega} = (\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \dots)$, где

$$\begin{aligned}
\overline{a}_k &= 0, \quad \text{если} \quad a_k = 0, \quad a_k \in A(a),\\
\overline{a}_k &= 1, \quad \text{если} \quad a_k = 1, \quad a_k \in A(a),\\
\overline{a}_k &= 2, \quad \text{если} \quad a_k = 2, \quad a_k \in A(a),\\
\overline{a}_k &= 3, \quad \text{если} \quad a_k = 0, \quad a_k \in \overline{A}(a),\\
\overline{a}_k &= 4, \quad \text{если} \quad a_k = 1, \quad a_k \in \overline{A}(a),\\
\overline{a}_k &= 5, \quad \text{если} \quad a_k = 2, \quad a_k \in \overline{A}(a).
\end{aligned}$$

Вероятность P на Ω индуцирует вероятность $\overline{P} = \gamma_{\#}P$ на $\overline{\Omega}$. Относительно $\overline{P}$ последовательность случайных величин $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \dots$ образует однородную марковскую цепь с начальным распределением $p = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0\right)$ и матрицей переходных вероятностей

$$\|p_{i,j}\| = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Из усиленного закона больших чисел следует

$$\overline{P}\left\{\overline{\omega} : \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (\chi_0(\overline{a}_i) + \chi_3(\overline{a}_i)) = \frac{1}{3}\right\} = P\left\{\omega : \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \chi_0(a_i) = \frac{1}{3}\right\} = 1. \tag{3}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\operatorname{mes}\left\{a \in [0,1] : \lim_{k\to\infty} \frac{f_a(k)}{k} = \frac{1}{3}\right\} &=\\
= P\left\{\omega : \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \left(\chi_0(a_i)\chi_{A(a)}(a_i) + \chi_2(a_i)\chi_{\overline{A}(a)}(a_i)\right) = \frac{1}{3}\right\} &=\\
= \overline{P}\left\{\overline{\omega} : \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} (\chi_0(\overline{a}_i) + \chi_5(\overline{a}_i)) = \frac{1}{3}\right\} &= 1,
\end{aligned}$$

последнее равенство следует из (3) и того факта, что начальное распределение и матрица переходных вероятностей марковской цепи не изменятся при перестановке местами событий $a_k = 3$ и $a_k = 5$.

Пусть $t = \frac{\ln 2}{3 \ln 3} + \delta$. Из (2) следует, что для любого натурального k

$$3^{-tk} N_a(k) = \left(3^{-\delta} 3^{-\frac{\ln 2}{3\ln 3}} 2^{\frac{f_a(k)}{k}}\right)^k = \left(3^{-\delta} 2^{\frac{f_a(k)}{k} - \frac{1}{3}}\right)^k.$$

Тогда для почти всех (по мере Лебега) $a \in [0,1]$

$$\lim_{k\to\infty} (3^{-\delta} 2^{-\varepsilon}) \le \liminf_{k\to\infty} 3^{-tk} N_a(k) \le \lim_{k\to\infty} (3^{-\delta} 2^{\varepsilon})^k$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Положив $\varepsilon = |\delta|$, получим, что для почти всех $a \in [0,1]$

$$\liminf_{k\to\infty} 3^{-tk} N_a(k) = \begin{cases} \infty, & t < \frac{\ln 2}{3\ln 3};\\ 0, & t > \frac{\ln 2}{3 \ln 3}. \end{cases} \qquad \square$$

Литература

1. Mandelbrot B. *The fractal geometry of nature.* – New York: W.H. Freeman and Company, 1977. – 469 p.
2. Kraft R. *Random intersections of thick Cantor sets* // Trans. Amer. Math. Soc. – 2000. – V. 352. – № 3. – P. 1315–1328.
3. Kraft R. *A golden Cantor set* // Amer. Math. Monthly. – 1998. – V. 105. – № 8. – P. 718–725.
4. Williams R.F. *How big is the intersection of two thick Cantor sets*? // Continuum theory and dynamical systems. Proc. AMS–IMS–SIAM Jt. Summer Res. Con. Arcata/CA (USA) 1989, Contemp. Math. – 1991. – V. 117. – P. 163–175.
5. Davis G., Hu Thian-You. *The structure of the intersection of two middle third Cantor sets* // Publ. Math., Barc. – 1995. – V. 39. – № 1. – P. 43–60.
6. Li Wenxia, Hiao Dongmei. *Intersection of translations of Cantor triadic set* // Acta Math. Sci. (Engl. Ed.). – 1999. – V. 19. – № 2. – P. 214–219.
7. Боровков А.А. *Теория вероятностей.* – М.: Наука, 1986. – 431 с.

Казанский государственный
университет

Поступила
28.02.2001