Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №12, с. 76–80 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0132*

С.С. АЛЕКСЕЕВ, О.А. ЗАДВОРНОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ С МНОГОЗНАЧНЫМ ЗАКОНОМ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ВДОЛЬ ЛИНИИ ИСТОЧНИКА

Аннотация. В работе сформулирована обобщенная задача фильтрации в неоднородной области при наличии распределенного вдоль линии источника. Несжимаемая жидкость подчиняется многозначному закону с линейным ростом на бесконечности. При исследовании использовано аддитивное выделение особенности, связанной с правой частью. Поле давления ищется в виде суммы известного решения некоторой линейной задачи и неизвестного "добавка". Относительно "добавка" задача сведена к вариационному неравенству второго рода в гильбертовом пространстве. Доказано существование решения.

Ключевые слова: нелинейная фильтрация несжимаемой жидкости, неоднородная среда, многозначный закон, распределенный вдоль линии источник, вариационное неравенство.

УДК: 517.958 : 532.546

Abstract. In this paper we formulate a generalized filtering problem in a heterogeneous environment in the presence of a source distributed along a line. Incompressible fluids obey a multivalued law with a linear growth at infinity. In this study we use the additive singularity extraction in the right hand side of the problem constraint. We represent the pressure field as the sum of a known solution to a certain linear problem and an unknown "additive term". We reduce the problem under consideration to a variational inequality of the second kind in a Hilbert space (with respect to the mentioned "additive term") and prove its solvability.

Keywords: nonlinear filtering of an incompressible fluid, heterogeneous environment, multivalued law, source distributed along a line, variational inequality.

Введение. В работах [1]–[3] обобщенная задача фильтрации с разрывным законом, в случае линейного роста, формулируется в виде вариационного неравенства с оператором, действующим из соболевского пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$, в сопряженное к нему (Ω — область фильтрации). Доказано существование решения, когда функция, описывающая плотность внешних источников, определяет линейный, непрерывный функционал над соболевским пространством.

В данной работе проводится исследование с менее гладкой правой частью: в случае трехмерного пространства обобщенная функция, моделирующая распределенный вдоль линии источник, не принадлежит пространству, сопряженному к $W_2^{(1)}(\Omega)$. Применяется подход,

Поступила 15.06.2011

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09-01-97015, 10-01-00728).

использованный при рассмотрении задач фильтрации несжимаемой жидкости в однородной области при наличии точечного источника ([4], [5]).

1. Постановка задачи. Рассматривается установившийся процесс фильтрации несжимаемой жидкости в пористой среде. Фильтрация происходит в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, с липшиц-непрерывной границей Γ, на которой давление считается известным, при наличии распределенного вдоль линии $\gamma : [a,b] \to \Omega$, $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$, $\gamma \in \left[C^1([a,b])\right]^n$, источника с интенсивностью $q : \gamma \to \mathbb{R}^1$, $q \in L_1(\gamma)$ (кривая γ находится внутри области Ω).

Необходимо найти стационарные поля давления p и скорости v жидкости, удовлетворяющие уравнению неразрывности

$$\operatorname{div} v(x) = \delta_\gamma(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

где обобщенная функция $\delta_\gamma : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}^1$ определена правилом: $\langle \delta_\gamma, \eta \rangle = \int\limits_\gamma q(x)\eta(x)d\gamma$ $\forall \eta \in C_0^\infty(\Omega)$ и граничным условием

$$p(x) = p_0(x), \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

в предположении, что жидкость следует многозначному закону фильтрации

$$-v(x) \in h(x, |\nabla p(x)|)\frac{\nabla p(x)}{|\nabla p(x)|}, \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Считаем, что многозначная функция h может быть представлена в виде

$$h(x,\xi) = g(x,\xi) + \vartheta(x)H(\xi - \beta(x)), \quad x \in \Omega, \ \ \xi \in \mathbb{R}^1_+,$$

где $\beta : \Omega \to \mathbb{R}^1_+ \equiv \{\xi \in \mathbb{R}^1 : \xi \geqslant 0\}$ и $\vartheta : \Omega \to \mathbb{R}^1_+$ — заданные функции из $L_\infty(\Omega)$, $H : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — многозначная функция следующего вида:

$$H(\xi) \in \begin{cases} 0, & \xi < 0; \\ [0,1], & \xi = 0; \\ 1, & \xi > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Относительно функции $g : \Omega \times \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ предполагаем, что выполнены условия Каратеодори ([6], с. 196):

(i) для почти всех $x \in \Omega$ функция $\xi \to g(x,\xi)$ непрерывна при $\xi \in \mathbb{R}^1_+$;

(ii) для каждого $\xi \in \mathbb{R}^1_+$ функция $x \to g(x,\xi)$ измерима на Ω;

(iii) функция имеет линейный рост на бесконечности:

существуют постоянная $k_0 > 0$ и функция $d_0 \in L_2(\Omega)$ такие, что

$$|g(x,\lambda) - k_0\lambda| \leqslant d_0(x) \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^1_+ \ \text{ для почти всех } \ x \in \Omega, \tag{5}$$

выполнено условие монотонности и неотрицательности

$$g(x,\xi) \geqslant g(x,\zeta) \ \ \forall \xi > \zeta \geqslant 0, \quad g(x,0) = 0 \ \text{ для почти всех } \ x \in \Omega. \tag{6}$$

Считаем, что для почти всех $x \in \Omega$ имеет конечное значение предел

$$\lim_{\xi \to +0} \frac{g(x,\xi)}{\xi}. \tag{7}$$

Предполагаем также, что функция $p_0 : \Gamma \to \mathbb{R}^1$ имеет продолжение в область Ω (используем для него то же обозначение), удовлетворяющее условию $p_0 \in W_2^{(1)}(\Omega)$.

Далее сформулируем вариационную задачу [5]: под обобщенным решением задачи (1)–(3) будем понимать функцию (поле давления) $p \in W_1^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющую (2) (в смысле равенства следа функции) и вариационному неравенству

$$\int_\Omega \frac{g(x,|\nabla p(x)|)}{|\nabla p(x)|}\,(\nabla p(x),\nabla\eta(x))\,dx + \int_\Omega \vartheta(x)\mu(|\nabla(\eta(x)+p(x))| - \beta(x))dx - \\ - \int_\Omega \vartheta(x)\mu(|\nabla p(x)| - \beta(x))dx \geqslant \int_\gamma q(x)\eta(x)\;d\gamma \quad \forall\eta \in C_0^\infty(\Omega). \quad (8)$$

Здесь функция $\mu : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является субпотенциалом функции (4) и имеет вид

$$\mu(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0; \\ \xi, & \xi \geq 0, \end{cases} \quad (9)$$

2. Существование решения. Решение задачи (8) будем искать, следуя [4], в виде $p = \phi + u$, где функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ является неизвестной, а функция ϕ является решением задачи:

$$\begin{aligned} &\text{найти} \quad \phi \in W_1^{(1)}(\Omega) : \phi(x) = p_0(x), \quad x \in \Gamma, \\ &k_0 \int_\Omega (\nabla\phi(x),\nabla\eta(x))dx = \int_\gamma q(x)\eta(x)\;d\gamma \quad \forall\eta \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом равенства (10) задача (8) сводится к следующей:

$$\text{найти} \quad u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega) : \int_\Omega \frac{g(x,|\nabla(\phi+u)(x)|)}{|\nabla(\phi+u)(x)|}\,(\nabla(\phi+u)(x),\nabla\eta(x))\,dx + \\ + \int_\Omega \vartheta(x)\mu(|\nabla(\eta+\phi+u)(x)| - \beta(x))dx - \\ - \int_\Omega \vartheta(x)\mu(|\nabla(\phi+u)(x)| - \beta(x))dx \geqslant \\ \geqslant k_0 \int_\Omega (\nabla\phi(x),\nabla\eta(x))dx \quad \forall\eta \in C_0^\infty(\Omega). \quad (11)$$

Далее покажем, что эта задача эквивалентна вариационному неравенству в гильбертовом пространстве с монотонным, коэрцитивным оператором и поэтому разрешима.

Пусть $V = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(u,w)_V = \int\limits_\Omega (\nabla u,\nabla w)dx$ и соответствующей ему нормой $\|u\|_V = \sqrt{(u,u)_V}$.

Определим форму $a : V \times V \to \mathbb{R}^1$ следующим образом:

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\frac{g(x,|\nabla(\phi+u)(x)|)}{|\nabla(\phi+u)(x)|}\nabla(\phi+u)(x) - k_0\nabla\phi(x), \nabla v(x) \right) dx. \quad (12)$$

Для проверки корретности этого определения введем функцию $G : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в виде

$$G(x,\lambda) = g(x,|\nabla\phi(x)+\lambda|)\frac{\nabla\phi(x)+\lambda}{|\nabla\phi(x)+\lambda|} - k_0\nabla\phi(x), \quad x \in \Omega, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Поскольку функция g удовлетворяет условиям Каратеодори (i), (ii) и условию (7), а функция ϕ принадлежит пространству $W_1^{(1)}(\Omega)$, то выполнены условия Каратеодори и для G:

(I) для почти всех $x \in \Omega$ функция $\lambda \to G(x,\lambda)$ непрерывна при $\lambda \in \mathbb{R}^n$,

(II) для каждого $\lambda \in \mathbb{R}^n$ функция $x \to G(x,\lambda)$ измерима на Ω.

Далее, пользуясь неравенством (5), получаем

$$|G(x,\lambda)| = \left|(g(x,|\nabla\phi(x)+\lambda|) - k_0|\nabla\phi(x)+\lambda|)\frac{\nabla\phi(x)+\lambda}{|\nabla\phi(x)+\lambda|} + k_0\lambda\right| \leqslant$$
$$\leqslant |g(x,|\nabla\phi(x)+\lambda|) - k_0|\nabla\phi(x)+\lambda|| + k_0\,|\lambda| \leqslant d_0(x) + k_0\,|\lambda| \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}^n, \quad \forall x\in\Omega.$$

Таким образом, имеем

$$|a(u,v)| = \left|\int_\Omega (G(x,\nabla u(x)),\nabla v(x))dx\right| \leqslant \int_\Omega |G(x,\nabla u(x))|\,|\nabla v(x)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Omega (d_0(x) + k_0\,|\nabla u(x)|)\,|\nabla v(x)|\,dx \leqslant \left(\|d_0\|_{L_2(\Omega)} + k_0\|u\|_V\right)\|v\|_V. \quad (13)$$

Форма (12) по второму аргументу линейна и в силу неравенства (13) ограничена, а следовательно, непрерывна. Поэтому в силу теоремы Рисса–Фишера эта форма порождает оператор $A: V\to V$,

$$(Au,v)_V = a(u,v) \quad \forall u,v\in V. \quad (14)$$

Свойства этого оператора содержит

Лемма 1. *Пусть функция g удовлетворяет условиям Каратеодори* (i), (ii) *и условиям* (5)–(7). *Тогда оператор A, определенный в* (12), (14), *является непрерывным, ограниченным, монотонным и коэрцитивным, а именно, выполнено неравенство*

$$(Au,u-v)_V \geqslant K\|u\|_V^2 - M(\|u\|_V\|v\|_V + \|v\|_V + 1) \quad \forall u,v\in V,$$

где положительные постоянные K, M не зависят от u и v.

Далее определим функционал $F: V\to\mathbb{R}^1$ по формуле

$$F(v) = \int_\Omega \vartheta(x)\mu(|\nabla(v+\phi)(x)| - \beta(x))dx \quad \forall v\in V. \quad (15)$$

Пользуясь (9), получаем оценку $|F(v)| \leqslant \|\vartheta\|_{L_\infty(\Omega)}\|\nabla(v+\phi)\|_{L_1(\Omega)} \quad \forall v\in V$. Следовательно, эффективной областью определения функционала F является все пространство V. Функционал F, определенный в (15), является выпуклым и липшиц-непрерывным.

Из свойств оператора $A: V\to V$ и функционала $F: V\to\mathbb{R}^1$ вытекает эквивалентность задачи (11) неравенству

$$\text{найти} \quad u\in V: (Au,v-u)_V + F(v) - F(u) \geqslant 0 \quad \forall v\in V. \quad (16)$$

Далее, опираясь на теорию вариационных неравенств с монотонными операторами (например, [7], [8]), получаем основные результаты данной работы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (6), (7). *Тогда*

1) *множество решений задачи* (16) (*следовательно, и задачи* (11)) *не пусто, выпукло и замкнуто*;

2) *всякое решение p задачи* (8) *может быть представлено в виде $p=\phi+u$, где функция u является некоторым решением задачи* (11), *а ϕ — решение задачи* (10).

Теорема 2. *Пусть p — решение задачи* (8), *тогда существует вектор-функция* (*поле скоростей*) $v:\Omega\to\mathbb{R}^n$, *принадлежащая пространству $[L_1(\Omega)]^n$ и такая, что выполнено включение* (3) *и вариационное равенство*

$$-\int_\Omega (v(x),\nabla\eta(x))dx = \int_\gamma q(x)\eta(x)\,d\gamma \quad \forall\eta\in C_0^\infty(\Omega).$$

Литература

[1] Ляшко А.Д., Бадриев И.Б., Карчевский М.М. *О вариационном методе для уравнений с разрывными монотонными операторами*, Изв. вузов. Матем., № 11, 63–69 (1978).
[2] Лапин А.В. *Об исследовании некоторых нелинейных задач теории фильтрации* , Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **19** (3), 689–700 (1979).
[3] Карчевский М.М., Бадриев И.Б. *Нелинейные задачи теории фильтрации с разрывными монотонными операторами*, в сб. "Численные методы механики сплошной среды" (Изд-во ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск: 1979) **10** (5), 63–78.
[4] Задворнов О.А. *Исследование нелинейной стационарной задачи фильтрации при наличии точечного источника*, Изв. вузов. Матем., № 1, 58–63 (2005).
[5] Бадриев И.Б., Задворнов О.А. *Исследование стационарной задачи фильтрации с многозначным законом при наличии точечного источника*, Дифференц. уравнения **41** (7), 874–880 (2005).
[6] Вайнберг М.М. *Вариационные методы исследования нелинейных операторов* (Гостехиздат, М., 1956).
[7] Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач* (Мир, М., 1972).
[8] Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* (Мир, М., 1979).

С.С. Алексеев

аспирант, кафедра вычислительной математики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008,

e-mail: SAleksey@ksu.ru

О.А. Задворнов

профессор, кафедра вычислительной математики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008,

e-mail: Oleg.Zadvornov@ksu.ru

S.S. Alekseyev

Postgraduate, Chair of Computational Mathematics,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: SAleksey@ksu.ru

O.A. Zadvornov

Professor, Chair of Computational Mathematics,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Oleg.Zadvornov@ksu.ru