*Известия вузов. Математика* *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
*2017, №8, с. 80–85* *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

*Краткое сообщение, представленное Ф.Г. Авхадиевым*

*Ю.Р. АГАЧЕВ, М.Ю. ПЕРШАГИН*

# КОРРЕКТНАЯ ПОСТАНОВКА УСЛОВНО КОРРЕКТНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В НОВОЙ ПАРЕ НЕВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

*Аннотация.* В работе исследуется общая краевая задача для линейных интегро-дифференциальных уравнений, заданных на отрезке числовой прямой, в которых порядок внутреннего дифференциального оператора выше порядка соответствующего внешнего дифференциального оператора. Доказана корректная постановка указанной задачи в смысле Адамара в новой паре невесовых пространств Соболева.

*Ключевые слова*: пространство Соболева, интегро-дифференциальное уравнение, общая краевая задача, корректная постановка.

*УДК*: 517.968

**Введение.** Пусть $r, m+1 \in \mathbb{N}$ — фиксированные числа, удовлетворяющие условию $r > m \geq 1$. Рассматривается общая краевая задача

$$R_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{1}$$

для интегро-дифференциального уравнения

$$Kx \equiv x^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t) x^{(m-k)}(t) + \sum_{j=0}^{r} \int_{-1}^{+1} h_j(t,s) x^{(j)}(s)\, ds = y(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \tag{2}$$

где $\{R_i\}$ — линейно-независимые функционалы на пространстве $(m-1)$-раз непрерывно-дифференцируемых на сегменте $[-1,1]$ функций, $y(t)$, $g_k(t)$, $k = \overline{1,m}$, и $h_j(t,s), j = \overline{0,r}$, — известные функции в своих областях определения.

В работе [1] такая задача при $r > m \geq 0$ отнесена к условно корректным в том смысле, что при определенных гладкостных свойствах коэффициентов уравнения за счет выбора пары пространств $X$ искомых элементов и $Y$ правых частей задачу удается ставить корректно по Адамару. В настоящее время такие пары построены для задачи Коши для уравнения (2) (например, [2]). Соответствующие пространства представляют собой пространства Соболева со специальным весом, зависящим от разности порядков внутреннего и внешнего дифференциальных операторов. К сожалению, в этих пространствах приходится заниматься вопросами приближения функций различными аппаратами приближения, в частности, алгебраическими полиномами. Поэтому задача нахождения пары пространств $(X, Y)$, в которой (1), (2) была бы поставлена корректно, по-прежнему остается актуальной, в первую

Поступила 17.03.2017

очередь, с практической точки зрения для построения наиболее простых вычислительных схем.

Здесь предлагается целое семейство пар таких пространств. При этом без ограничения общности можно считать функционалы $R_i$ дискретными, точнее

$$R_i(x) = x^{(i-1)}(-1), \quad i = \overline{1, m}.$$

Это следует из результата, доказательство которого может быть проведено путем введения новой искомой функции по формуле

$$z(t) = x(t) + \sum_{i=1}^{m} \left[R_i(x) - x^{(i-1)}(-1)\right] \cdot \frac{(t+1)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

**Теорема 1.** *Задача* (1), (2) *эквивалентна задаче Коши*

$$x^{(i)}(-1) = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \tag{3}$$

*для уравнения* (2) *с новой правой частью* $y(t)$, *причем в исследуемых парах* $(X, Y)$ *дифференциальные свойства* $y(t)$ *сохраняются.*

Поэтому результаты, сформулированные для общей задачи (1), (2), доказываются лишь для задачи Коши (2), (3).

**1. Вспомогательные результаты.** 1.1. Пусть $p$ — фиксированное натуральное число, $1 \le q \le \infty$. Обозначим через $L_q(a, b)$ пространство функций, суммируемых со степенью $q$ (при $q < \infty$) в промежутке $(a, b), -\infty < a < b < \infty$, $L_\infty(a, b)$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций. В этих пространствах нормы зададим обычным образом:

$$\|f\|_q \equiv \|f\|_{L_q(a,b)} = \left\{ \int_a^b |f(t)|^q dt \right\}^{1/q}, \quad f \in L_q(a, b), \quad 1 \le q < \infty;$$

$$\|f\|_C \equiv \|f\|_{L_\infty[a,b]} = \max_{a \le t \le b} |f(t)|, \quad f \in L_\infty[a, b].$$

Пусть, далее, $W^p L_q[a, b]$ — пространство функций $y(t)$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $p-1$ и производную порядка $p$, принадлежащую пространству Лебега $L_q(a, b)$. Во введенном пространстве норму определим следующим образом:

$$\|f\|_{p;q} \equiv \|f\|_{W^p L_q[a,b]} = \|f\|_q + \|f^{(p)}\|_q, \quad f \in W^p L_q[a, b]. \tag{4}$$

Отметим, что с введенной таким образом нормой пространство $W^p L_q[a, b]$ является полным нормированным пространством при всех $q$, $1 \le q \le \infty$.

При исследовании вопросов корректной постановки рассматриваемой задачи важную роль играет критерий компактности множества в пространстве Соболева $W^p L_q[a, b]$, непосредственно вытекающий из теорем Рисса и Арцела, дающих критерий компактности множества из пространств Лебега суммируемых с конечной степенью функций и соответственно пространства непрерывных функций. Кроме того, будут использованы оценки аддитивного типа из работы [3] для промежуточных производных функции из $L_q[a, b]$.

**Лемма 1.** *Пусть* $\Omega$ *— фиксированное множество функций из пространства* $W^p L_q[a, b]$, $p \ge 1$, $1 \le q \le \infty$. *Для компактности множества* $\Omega$ *необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным в* $W^p L_q[a, b]$, *т. е.*

$$\|f\|_{p;q} \le M < \infty \ \ \forall f \in \Omega; \ \ \sup_{f \in \Omega} \sup_{0 < \tau \le \delta} \|f(\cdot + \tau) - f(\cdot)\|_{W^p L_q[a, b-\tau]} \to 0, \quad \delta \to +0,$$

*где* $M$ *— абсолютная положительная постоянная.*

**Лемма 2.** *Пусть* $1 \le k \le p-1$, $p \ge 2$. *Если функция* $\varphi \in W^pL_q[0,1]$, *то справедливо неравенство*

$$\|\varphi^{(k)}\|_{L_q(0,1)} \le c^p k!\,\|\varphi\|_{L_q(0,1)} + \frac{1}{(p-k)!}\|\varphi^{(p)}\|_{L_q(0,1)},$$

*где* $c$ $(c \le 40)$ — *абсолютная положительная постоянная.*

Из леммы 2 непосредственно вытекает

**Следствие.** Пусть $1 \le k \le p-1$, $p \ge 2$. Если функция $f \in W^pL_q[-1,1]$, то справедливо неравенство

$$\|f^{(k)}\|_q \le c^p \frac{k!}{2^k}\|f\|_q + \frac{2^{p-k}}{(p-k)!}\|f^{(p)}\|_q,$$

где $c$ — постоянная из леммы 2, а $\|\cdot\|_q = \|\cdot\|_{L_q(-1,1)}$.

В частности, справедлива оценка

$$\|f^{(k)}\|_q \le c_k\|f\|_{p;q}, \quad k = \overline{1,p-1},$$

где $c_k$ — положительная постоянная, зависящая лишь от $k$ и $p$, $c_k \le \max\left(c^p\frac{k!}{2^k}, \frac{2^{p-k}}{(p-k)!}\right)$.

**Лемма 3.** *Пусть функция* $\varphi(t)$ *имеет производную* $\varphi' \in L_q(-1,1)$, $1 \le q < \infty$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\|\varphi\|_C \le 2^{1-1/q}\|\varphi'\|_q + 2^{-1/q}\|\varphi\|_q, \quad 1 \le q < \infty.$$

*Если же функция* $\varphi(t)$ *обращается в нуль в некоторой точке из* $[-1,1]$, *то*

$$\|\varphi\|_C \le 2^{1-1/q}\|\varphi'\|_q, \quad \|\varphi\|_q \le 2q^{-1/q}\|\varphi'\|_q, \quad 1 \le q < \infty.$$

1.2. Будем считать, что $L_q = L_q(-1,1)$, $W^pL_q = W^pL_q[-1,1]$.

Определим операторы $G$ и $H$ формулами

$$Gx \equiv (Gx)(t) = \sum_{k=1}^{m} g_k(t)x^{(m-k)}(t),$$

$$Hx \equiv (Hx)(t) = \sum_{j=0}^{r}\int_{-1}^{+1} h_j(t,s)x^{(j)}(s)\,ds.$$

Указанные операторы будем исследовать в паре функциональных пространств $(X,Y)$, где $X = \overset{\circ}{W}{}^rL_q$ — подпространство функций из $W^rL_q$, удовлетворяющих краевым условиям (1), а $Y = W^pL_q$, где $p = r-m \ge 1$. В пространстве $Y$ норму задаем формулой (4), а в пространстве $X$ — формулой

$$\|x\|_X = \|x^{(m)}\|_q + \|x^{(r)}\|_q, \ x \in X.$$

При исследовании операторов $G$ и $H$ приходится пользоваться свойствами функций пространства $X$. Эти свойства вытекают из следствия к лемме 2 и леммы 3, при этом без ограничения общности считаем, что функции из $X$ удовлетворяют начальным условиям (3).

**Лемма 4.** *Пусть функция* $x \in X$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\|x^{(k)}\|_C \le 2^{1-1/q}\|x^{(k+1)}\|_q, \quad k = \overline{1,m-1};$$

$$\|x^{(k)}\|_C \le 2^{1-1/q}\|x^{(k+1)}\|_q + 2^{-1/q}\|x^{(k)}\|_q, \quad k = \overline{m,r-1};$$

$$\|x^{(k)}\|_q \le 2q^{-1/q}\|x^{(k+1)}\|_q, \quad k = \overline{1,m-1};$$

$$\|x^{(k)}\|_q \le c_k\|x\|_X, \quad k = \overline{m+1,r-1},$$

*где* $1 \le q < \infty$, *а через* $c_k$ *(здесь и далее) обозначены, вообще говоря, разные положительные абсолютные постоянные, зависящие лишь от* $k$, $m$, $r$.

**Лемма 5.** *Пусть функция* $g_k(t)$ *в уравнении* (2) *имеет производную* $g_k^{(p)}$ *порядка* $p = r - m$, *принадлежащую* $L_q$, $k = \overline{1,m}$, $1 \le q \le \infty$. *Тогда оператор* $G : X \to Y$ *обладает свойствами (считаем* $\infty^0 = 1$*):*

$$\|Gx\|_q \le 2^{1-1/q}\|x\|_X \sum_{k=1}^{m} \left(2q^{-1/q}\right)^{k-1}\|g_k\|_q, \quad x \in X,$$

$$\|(Gx)^{(p)}\|_q \le \sum_{k=1}^{m} c_k\|g_k\|_{p;q} \cdot \|x\|_X, \quad x \in X.$$

Справедливость леммы вытекает из следствия к лемме 2 при оценке производных функций $g_k(t)$, $k = \overline{1,m}$, и неравенств, полученных применением леммы 4 при оценке производных функции $x(t)$:

$$\|Gx\|_q \le \sum_{k=1}^{m} \|g_k\|_q \cdot \|x^{(m-k)}\|_C \le 2^{1-1/q} \sum_{k=1}^{m} \|g_k\|_q \cdot \|x^{(m-k+1)}\|_q \le$$
$$\le 2^{1-1/q}\|x^{(m)}\|_q \sum_{k=1}^{m} \left(2q^{-1/q}\right)^{k-1}\|g_k\|_q,$$

$$\|(Gx)^{(p)}\|_q \le \sum_{k=1}^{m} \|(g_k x^{(m-k)})^{(p)}\|_q = \sum_{k=1}^{m} \left\| \sum_{i=0}^{p} C_p^i g_k^{(i)} x^{(r-k-i)} \right\|_q \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{p} C_p^i \|g_k^{(i)}\|_q \cdot \|x^{(r-k-i)}\|_C \le 2^{1-1/q} \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{p} C_p^i \|g_k^{(i)}\|_q \cdot \|x^{(r-k-i+1)}\|_q +$$
$$+ 2^{-1/q} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{(p-k)_+} C_p^i \|g_k^{(i)}\|_q \cdot \|x^{(r-k-i)}\|_q \le$$
$$\le \|x\|_X \cdot \sum_{k=1}^{m} c_k\|g_k\|_{p;q}, \quad (p-k)_+ = \max(p-k, 0).$$

Аналогичный результат имеет место для оператора $H$.

**Лемма 6.** *Пусть функция* $h_j(t,s)$ *в уравнении* (2) *имеет частную производную по переменной* $t$ $\frac{\partial^p}{\partial t^p} h_j(t,s)$ *порядка* $p = r - m$, *принадлежащую* $L_q \times L_1$ *при* $j = \overline{0, r-1}$ *и* $L_q \times L_{\overline{q}}$ *при* $j = r$, *где* $1/\overline{q} + 1/q = 1$, $1 \le q \le \infty$. *Тогда оператор* $H : X \to Y$ *обладает свойствами*

$$\|Hx\|_q \le \|x\|_X \left\{ \sum_{j=0}^{r-1} c_j\|h_j\|_{L_q \times L_1} + \|h_r\|_{L_q \times L_{\overline{q}}} \right\}, \quad x \in X,$$

$$\|(Hx)^{(p)}\|_q \le \|x\|_X \left\{ \sum_{j=0}^{r-1} c_j \left\| \frac{\partial^p}{\partial t^p} h_j \right\|_{L_q \times L_1} + \left\| \frac{\partial^p}{\partial t^p} h_r \right\|_{L_q \times L_{\overline{q}}} \right\}, \quad x \in X.$$

**2. Основные результаты.** Будем изучать задачу (1), (2) в паре пространств $(X, Y)$, введенных в предыдущем пункте. Имеют место два утверждения.

**Теорема 2.** *Пусть* $1 \le q \le \infty$, $\overline{q}$ *— число, сопряженное* $q$, *т. е.* $1/q + 1/\overline{q} = 1$, *и выполнены предположения*

1) $g_k, k = \overline{1, m}$, $y \in Y$;
2) $h_j \in Y \times L_1$, $j = \overline{0, r-1}$;
3) $h_r \in Y \times L_{\overline{q}}$.

*Тогда оператор* $G + H : X \to Y$ *вполне непрерывен.*

**Теорема 3.** *Пусть выполнены предположения* 1)–3) *теоремы* 2 *и*

4) *уравнение* $x^{(m)}(t) = 0$ *при краевых условиях* (1) *имеет лишь нулевое решение.*

*Тогда задача решения* (1), (2) *в паре пространств* $(X, Y)$ *поставлена корректно по Адамару.*

*Схема доказательства.* Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что образ $\Omega$ единичного шара пространства $X$ при отображении оператором $G + H$ является компактным множеством пространства $Y$. С учетом леммы 1 для этого необходимо доказать равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность множества $\Omega$. Равномерная ограниченность непосредственно следует из лемм 5 и 6. В силу линейности операторов $G$ и $H$ равностепенная непрерывность вытекает (с использованием лемм 3–5, а также следствия к лемме 2) из неравенств

$$\begin{aligned}
\|(Gx)(\cdot+\tau) - (Gx)(\cdot)\|_{W^pL_q[-1,1-\tau]} \le \sum_{k=1}^{m} \|(g_k)(\cdot+\tau) - (g_k)(\cdot)\|_q \cdot \|x^{(m-k)}\|_C + \\
+ \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{p} C_p^i \|(g_k^{(i)})(\cdot+\tau) - (g_k^{(i)})(\cdot)\|_q \cdot \|x^{(r-k-i)}\|_C + \\
+ \sum_{k=1}^{m} \|g_k\|_C \|(x^{(m-k)})(\cdot+\tau) - (x^{(m-k)})(\cdot)\|_q \cdot \|x^{(m-k)}\|_C + \\
+ \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{p-1} C_p^i \|g_k^{(i)}\|_C \|x^{(r-k-i)}(\cdot+\tau) - (x^{(r-k-i)})(\cdot)\|_q + \\
+ \sum_{k=1}^{m} \|g_k^{(p)}\|_q \|(x^{(m-k)})(\cdot+\tau) - (x^{(m-k)})(\cdot)\|_{C[-1,1-\tau]} \le \\
\le \sum_{k=1}^{m} c_k \{\|(g_k)(\cdot+\tau) - (g_k)(\cdot)\|_{W^pL_q[-1,1-\tau]} + \tau^{1-1/q}\|g_k\|_{p;q}\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|(Hx)(\cdot+\tau) - (Hx)(\cdot)\|_{W^pL_q[-1,1-\tau]} \le \sum_{j=0}^{r-1} \|(h_j)(\cdot+\tau,\cdot) - (h_j)(\cdot,\cdot)\|_{W^pL_q\times L_1} \cdot \|x^{(j)}\|_C + \\
+ \|(h_r)(\cdot+\tau,\cdot) - (h_r)(\cdot,\cdot)\|_{W^pL_q\times L_{\overline{q}}} \cdot \|x^{(r)}\|_q \le \\
\le \sum_{j=0}^{r-1} c_j \|(h_j)(\cdot+\tau,\cdot) - (h_j)(\cdot,\cdot)\|_{W^pL_q\times L_1} + c_r \|(h_r)(\cdot+\tau,\cdot) - (h_r)(\cdot,\cdot)\|_{W^pL_q\times L_{\overline{q}}}.
\end{aligned}$$

Справедливость теоремы 3 следует из того, что согласно теореме 2 задача (1), (2) в паре банаховых пространств $(X, Y)$ приводится к уравнению второго рода с вполне непрерывным оператором. Для такого уравнения, как хорошо известно, справедлива теория Фредгольма.

## Литература

[1] Габдулхаев Б.Г. *Некоторые вопросы теории приближенных методов.* II, Изв. вузов. Матем., № 10, 21–29 (1968).

[2] Агачев Ю.Р. *Сходимость общего полиномиального проекционного метода решения некорректных интегродифференциальных уравнений*, Изв. вузов. Матем., № 8, 3–14 (2007).

[3] Буренков В. И. *О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале*, Тр. Матем. ин-та АН СССР **156**, 22–29 (1980).

*Ю.Р. Агачев*

*Казанский федеральный университет,*
*ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,*

e-mail: jagachev@gmail.com

*М.Ю. Першагин*

*Казанский федеральный университет,*
*ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,*

e-mail: mpershagin@mail.ru

*J.R. Agachev and M.Yu. Pershagin*

**Well-posedness of conditionally correct integro-differential equations in new pair of non-weighted Sobolev spaces**

*Abstract.* In this paper we investigate the general boundary-value problem for linear integro-differential equations, specified on a segment of the number line where the order of the internal differential operators is of higher order than that of the corresponding exterior differential operator. We prove well-posedness of this problem in the Hadamard sense in new pair of non-weighted Sobolev spaces.

*Keywords*: Sobolev space, integro-differential equation, general boundary-value problem, well-posedness.

*J.R. Agachev*

*Kazan Federal University,*
*18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: jagachev@gmail.com

*M.Yu. Pershagin*

*Kazan Federal University,*
*18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

e-mail: mpershagin@mail.ru