ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 7 (494)

УДК 517.983

Г.А. КУРИНА

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНО ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Из условий оптимальности управления для задачи минимизации квадратичного функционала на траекториях линейной системы возникает неотрицательно гамильтонова система вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= C(t)x(t) + S(t)y(t), \\ \dot{y}(t) &= W(t)x(t) - C^*(t)y(t) \end{aligned} \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x^0, \quad y(T) = -Vx(T). \tag{2}$$

Здесь $x(t), y(t) \in H$, H — гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $t \in [0,T]$, $T > 0$ и $x^0 \in H$ фиксированы, звездочка при обозначении оператора означает сопряженный оператор; $C(t), S(t), W(t), V \in L(H)$, операторы $S(t)$, $W(t)$ ($t \in [0,T]$) и V являются самосопряженными неотрицательными операторами, все операторы непрерывны по t.

В данной статье будет установлена однозначная разрешимость задачи (1), (2).

Используя замену $x^1(t) = x(t) - x^0$, $x^2(t) = y(t) + Vx^0$, легко видеть, что вопрос о разрешимости задачи (1), (2) эквивалентен вопросу о разрешимости системы с ненулевой правой частью и однородными краевыми условиями, а именно, задачи вида

$$\begin{aligned} \dot{x}^1(t) &= C(t)x^1(t) + S(t)x^2(t) + g^1(t), \\ \dot{x}^2(t) &= W(t)x^1(t) - C^*(t)x^2(t) + g^2(t), \\ x^1(0) &= 0, \quad x^2(T) = -Vx^1(T), \end{aligned} \tag{3}$$

где $g^1(t) = (C(t) - S(t)V)x^0$, $g^2(t) = (W(t) + C^*(t)V)x^0$.

Введем оператор

$$(Ax)(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} - C(t) & -S(t) \\ -W(t) & \frac{d}{dt} + C^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

действующий в пространстве $L_2([0,T]; H \dot{+} H)$, определенный на множестве $D(A)$ абсолютно непрерывных функций $x = x(t) = \binom{x^1(t)}{x^2(t)}$ ($x^i(t) \in H$, $i = 1, 2$), имеющих производную в $L_2([0,T]; H \dot{+} H)$ и удовлетворяющих условию (3).

Лемма 1. *Не существует последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \in D(A)$, $\|x_n\|_{L_2} = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\|Ax_n\|_{L_2} \to 0$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00351.

Доказательство. Предположим противное, а именно, пусть существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_n = \binom{x_n^1(t)}{x_n^2(t)} \in D(A)$,

$$\|x_n\|_{L_2} = 1 \tag{5}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и

$$\|Ax_n\|_{L_2} \to 0. \tag{6}$$

Тогда из (4), (6) получаем соотношения

$$\begin{aligned} &\dot{x}_n^1(t) - C(t)x_n^1(t) - S(t)x_n^2(t) \to_{L_2} 0, \\ &\dot{x}_n^2(t) - W(t)x_n^1(t) + C^*(t)x_n^2(t) \to_{L_2} 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Умножая левую часть первого из соотношений (7) скалярно на $x_n^2(t)$ справа, а второго — на $x_n^1(t)$ слева и складывая полученные результаты, придем к выражению вида

$$\frac{d}{dt}\langle x_n^1(t), x_n^2(t)\rangle - \langle S(t)x_n^2(t), x_n^2(t)\rangle - \langle x_n^1(t), W(t)x_n^1(t)\rangle.$$

Отсюда путем интегрирования по промежутку $[0,T]$ с учетом краевых условий (3), неравенства Коши–Буняковского и соотношений (5), (7) получаем

$$\langle x_n^1(T), Vx_n^1(T)\rangle + \int_0^T (\langle S(t)x_n^2(t), x_n^2(t)\rangle + \langle W(t)x_n^1(t), x_n^1(t)\rangle)dt \to 0.$$

Так как самосопряженные операторы V, $S(t)$, $W(t)$ являются неотрицательными, а $S(t)$, $W(t)$ непрерывными по t, то из последнего соотношения следует

$$S(t)x_n^2(t) \to_{L_2} 0, \quad W(t)x_n^1(t) \to_{L_2} 0.$$

Поэтому из (7) вытекает

$$\dot{x}_n^1(t) - C(t)x_n^1(t) \to_{L_2} 0, \quad \dot{x}_n^2(t) + C^*(t)x_n^2(t) \to_{L_2} 0.$$

В силу условия (3) отсюда получаем

$$x_n^1(t) \rightrightarrows 0, \quad x_n^2(t) \rightrightarrows 0,$$

что противоречит (5). $\square$

Лемма 2. *Область значений оператора A замкнута.*

Доказательство. Из леммы 1 следует, что существует постоянная $k > 0$ такая, что для всех $x \in D(A)$, $\|x\|_{L_2} = 1$ справедливо неравенство

$$\|Ax\|_{L_2} \geq k. \tag{8}$$

Действительно, если неравенство (8) не выполняется, то для произвольного $k_n > 0$ найдется такое $x_n \in D(A)$, что $\|x_n\|_{L_2} = 1$, $\|Ax_n\|_{L_2} < k_n$. Взяв в качестве k_n элементы последовательности, стремящейся к нулю, получаем противоречие с утверждением леммы 1. Далее будем использовать вытекающее из (8) неравенство

$$\|Ax\|_{L_2} \geq k\|x\|_{L_2}, \tag{9}$$

которое справедливо для всех $x \in D(A)$. Возьмем последовательность $\{y_n\}$ с элементами из $\operatorname{Im} A$, сходящуюся к y_0. Так как $y_n \in \operatorname{Im} A$, то можно считать $y_n = Ax_n$, где $x_n \in D(A)$. Последовательность $\{Ax_n\}$ является фундаментальной. Из (9) следует, что последовательность $\{x_n\}$ также является фундаментальной. В силу полноты пространства $L_2([0,T]; H \dot{+} H)$ она сходится к некоторому элементу $x_0 \in L_2([0,T]; H \dot{+} H)$. Поскольку A — замкнутый оператор, то $x_0 \in D(A)$ и $y_0 = Ax_0$. Значит, $y_0 \in \operatorname{Im} A$. $\square$

Несложно установить, что сопряженным к оператору A является оператор

$$(A^*y)(t) = \begin{pmatrix} -\frac{d}{dt} - C^*(t) & -W(t) \\ -S(t) & -\frac{d}{dt} + C(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \end{pmatrix},$$

действующий в пространстве $L_2([0,T]; H \dot{+} H)$, определенный на множестве абсолютно непрерывных функций $y = y(t) = \left(\begin{smallmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \end{smallmatrix}\right)$, имеющих производную в $L_2([0,T]; H \dot{+} H)$ и удовлетворяющих условиям

$$y^1(T) = Vy^2(T), \quad y^2(0) = 0. \tag{10}$$

Лемма 3. *Оператор A^* имеет нулевое ядро.*

Доказательство. Достаточно установить, что задача

$$\begin{gathered} \frac{dy^1(t)}{dt} = -C^*(t)y^1(t) - W(t)y^2(t), \\ \frac{dy^2(t)}{dt} = -S(t)y^1(t) + C(t)y^2(t), \\ y^1(T) = Vy^2(T), \quad y^2(0) = 0 \end{gathered} \tag{11}$$

имеет только нулевое решение.

Умножим первое уравнение системы (11) скалярно на $y^2(t)$ справа, а второе – на $y^1(t)$ слева и сложим. В результате будем иметь

$$\langle \dot{y}^1(t), y^2(t) \rangle + \langle y^1(t), \dot{y}^2(t) \rangle = -\langle W(t)y^2(t), y^2(t) \rangle - \langle y^1(t), S(t)y^1(t) \rangle.$$

Интегрируя последнее равенство по промежутку $[0,T]$, с учетом краевых условий (10) получим

$$\langle Vy^2(T), y^2(T) \rangle + \int_0^T (\langle W(t)y^2(t), y^2(t) \rangle + \langle y^1(t), S(t)y^1(t) \rangle) dt = 0.$$

Отсюда в силу неотрицательности операторов V, $S(t)$, $W(t)$ и непрерывности подинтегральной функции следует

$$W(t)y^2(t) \equiv 0, \quad S(t)y^1(t) \equiv 0.$$

Принимая во внимание эти равенства и единственность решения задачи Коши, из системы (11) получим $y^1(t) \equiv 0$, $y^2(t) \equiv 0$. □

Теорема. *Задача* (1), (2) *однозначно разрешима.*

Доказательство. Из лемм 2, 3 вытекает, что область значений оператора A совпадает с пространством $L_2([0,T]; H \dot{+} H)$. Учитывая оценку (9), получаем, что оператор A имеет ограниченный обратный (напр., теорема 2 из [1], с. 204), откуда следует утверждение теоремы. □

Замечание. Подобным образом может быть установлена однозначная разрешимость неотрицательно гамильтоновой системы (1) при краевых условиях, отличных от (2). Например, при $x(0) = x^0$, $y(T) = y^T$.

Литература

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1984. – 752 с.

Воронежская государственная
лесотехническая академия

Поступила
11.05.2000