ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 9 (460)

УДК 519.6

А.В. ПАНЮКОВ

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

Пусть $\mathbf{H}$ — гильбертово пространство, $\{A_{\eta k}\}_{\eta\in D}$, $k=1,2,\dots,n$, — параметрические семейства линейных операторов, действующих в $\mathbf{H}$; $D\subset\mathbf{R}^m$ — заданный конечномерный компакт. В данной работе рассматривается задача определения вектора параметров $\eta\in D$ по системе линейных функциональных уравнений

$$A_{\eta k}x=u_k,\quad k=1,2,\dots,n, \tag{1}$$

при заданных $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)\in\mathbf{H}^n$ и неизвестном $x\in\mathbf{H}$ [1]. В качестве решения поставленной задачи принимается

$$\eta^*=\arg\min_{\eta\in D}\Bigl(\inf_{x\in\mathbf{H}}\sum_{k=1}^n\|A_{\eta k}x-u_k\|^2\Bigr). \tag{2}$$

В сущности рассматриваемый подход представляет развитие метода квазирешения [2], [3] на случай, когда операторы $A_{\eta k}$, $k=1,2,\dots,n$, могут быть необратимыми, а их ядра зависят от искомого вектора η. Как будет показано далее, наложение естественных ограничений на операторы $A_{\eta k}$, $k=1,2,\dots,n$, гарантирует устойчивость задачи (2) к возмущениям правых частей $u_k\in\mathbf{H}$ системы уравнений (1). В постановке задачи (2) отсутствует необходимость вычисления $x\in\mathbf{H}$, однако явное присутствие x делает задачи (1)–(2) бесконечномерными и трудными для решения. В работе исследован способ преобразования задачи (2) к задаче без неизвестной x (т. е. к задаче математического программирования), в случае когда операторы $A_{\eta k}$ являются функциями самосопряженного оператора T, действующего в $\mathbf{H}$.

Сведе́ние к задаче математического программирования

Сначала предположим существование элемента $y\in\mathbf{H}$, доставляющего инфимум в выражении (2). Поскольку величина

$$\sum_{k=1}^n\|a_k\|^2,\quad a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbf{H},$$

представляет квадрат нормы в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}^n$, то $(A_{\eta1}y,A_{\eta2}y,\dots,A_{\eta n}y)$ является ортогональной проекцией вектора $u\in H^n$ на линейное многообразие $A_{\eta1}\mathbf{H}\times A_{\eta2}\mathbf{H}\times\dots\times A_{\eta n}\mathbf{H}\subset H^n$, т. е.

$$(\forall x\in\mathbf{H})\Bigl(\sum_{k=1}^n(A_{\eta k}y-u_k,A_{\eta k}x)=0\Bigr),$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbf{H}$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} A_{\eta k}^{*} u_k = C_\eta y, \quad C_\eta = \sum_{k=1}^{n} A_{\eta k}^{*} A_{\eta k}, \tag{3}$$

$$\inf_{x\in\mathbf{H}} \sum_{k=1}^{n} \|A_{\eta k}x - u_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (A_{\eta k}y - u_k, A_{\eta k}y - u_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [(A_{\eta k}y - u_k, A_{\eta k}y) + (u_k, u_k) - (A_{\eta k}^{*}u_k, y)] = \sum_{k=1}^{n}(u_k,u_k) - \sum_{k=1}^{n}(A_{\eta k}^{*}u_k, y).$$

Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{n}(u_k,u_k)$ — константа, не зависящая от η, то задача (2) сводится к задаче на условный максимум

$$\eta^* = \arg\max_{\eta\in D} \sum_{k=1}^{n} (A_{\eta k}^{*} u_k, y) \tag{4}$$

при условии, что y удовлетворяет (3).

Далее предполагается, что операторы $A_{\eta k}$, $k = 1,2,\ldots,n$, являются непрерывными функциями $\varphi_{\eta k}(\cdot)$ самосопряженного оператора T. В соответствии со спектральной теоремой для самосопряженных операторов ([4], с. 265–267) функции оператора T могут быть представлены посредством T-спектрального семейства $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ проекторов

$$A_{\eta k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\eta k}(\lambda) dE_\lambda, \quad A_{\eta k}^{*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi_{\eta k}(\lambda)} dE_\lambda,$$

$$C_\eta = \sum_{k=1}^{n} A_{\eta k}^{*} A_{\eta k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2 dE_\lambda, \quad \eta\in D, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

В случае ненулевой операторной меры E_λ множества

$$X(\eta) = \left\{ \lambda \in \mathbf{R} : \sum_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2 = 0 \right\}$$

оператор C_η может оказаться необратимым в $\mathbf{H}$. В то же время элемент y может быть представлен как $y = y_1 + y_2$, где

$$y_2 \in \ker C_\eta = \left(\int_{X(\eta)} \sum_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2 dE_\lambda \right) \mathbf{H},$$

$$y_1 \in (\ker C_\eta)^{\perp} = \left(\int_{\mathbf{R}\setminus X(\eta)} \sum_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2 dE_\lambda \right) \mathbf{H}.$$

Условие (3) и минимизируемый функционал задачи (4) приводятся к виду

$$\sum_{k=1}^{n} A_{\eta k}^{*} u_k = C_\eta y = C_\eta y_1,$$

$$\sum_{k=1}^{n} (A_{\eta k}^{*} u_k, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{\eta k}^{*} u_k, y \right) = (C_\eta y_1, y_1 + y_2) = (C_\eta y_1, y_1).$$

Таким образом, без потери общности, можно предположить $y \in (\ker C_\eta)^\perp$. Поскольку в множестве $(\ker C_\eta)^\perp$ оператор C_η является обратимым, возможно неограниченно обратимым, то

$$y = \int\limits_{\mathbf{R}\setminus X(\eta)} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{\varphi_{\eta k}(\lambda)} dE_\lambda u_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2},$$

и задача (4) приведена к задаче, не содержащей явно функции $x \in \mathbf{H}$ (т. е. к задаче математического программирования)

$$\eta^* = \arg\max_{\eta\in D} \int\limits_{\mathbf{R}\setminus X(\eta)} \frac{\sum\limits_{k,l=1}^{n} \varphi_{\eta k}(\lambda)\varphi_{\eta l}(\lambda)(dE_\lambda u_l, u_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2}. \tag{5}$$

Выше предполагалось существование элемента $y \in \mathbf{H}$, доставляющего инфимум в выражении (2). Чтобы освободиться от данного предположения, рассмотрим функционал

$$\Delta(x) = \left\| \int\limits_{\mathbf{R}\setminus X(\eta)} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2 \right)^{1/2} dE_\lambda x - \int\limits_{\mathbf{R}\setminus X(\eta)} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{\varphi_{\eta k}(\lambda)} dE_\lambda u_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2\right)^{1/2}} \right\|^2. \tag{6}$$

Раскрытие нормы и последующие упрощения приводят к эквивалентному представлению данного функционала

$$\Delta(x) = \sum_{k=1}^{n} \|A_{\eta k}x - u_k\|^2 + \int\limits_{\mathbf{R}\setminus X(\eta)} \frac{\sum\limits_{k,l=1}^{n} \varphi_{\eta k}(\lambda)\varphi_{\eta l}(\lambda)(dE_\lambda u_l, u_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2} - \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2. \tag{7}$$

Пусть $\{S_l\}_{l=1}^{\infty}$ представляет последовательность открытых подмножеств множества $\mathbf{R}$ таких, что

$$S_l \supset S_{l+1}, \qquad \inf_{x\in X(\eta),\ s\in \mathbf{R}\setminus S_l} \|x - s\|^2 > 0, \qquad \bigcap_{l=1}^{\infty} S_l = X(\eta).$$

Введем последовательность

$$x_l = \int\limits_{\mathbf{R}\setminus S_l} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{\varphi_{\eta k}(\lambda)} dE_\lambda u_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2}, \qquad l = 1, 2, \ldots$$

Подстановка x_l в (6) дает

$$\Delta(x_l) = \left\| \int\limits_{\mathbf{R}\setminus S_l} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2 \right)^{1/2} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{\varphi_{\eta k}(\lambda)} dE_\lambda u_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2} - \int\limits_{\mathbf{R}\setminus X(\eta)} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{\varphi_{\eta k}(\lambda)} dE_\lambda u_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2\right)^{1/2}} \right\|^2 =$$

$$= \left\| \int\limits_{S_l\setminus X(\eta)} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{\varphi_{\eta k}(\lambda)} dE_\lambda u_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2\right)^{1/2}} \right\|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2 \right) \left\| \int\limits_{S_l\setminus X(\eta)} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2 \right)^{1/2} dE_\lambda \right\|^2 \xrightarrow{l\to\infty} 0; \tag{8}$$

здесь неравенство является следствием неравенства Коши–Буняковского.

Из выражения (6) следует $(\forall x \in \mathbf{H})$ $(\Delta(x) \geq 0)$, поэтому сходимость в выражении (8) влечет $\inf\limits_{x\in\mathbf{H}} \Delta(x) = 0$. Учитывая представление (7), имеем

$$-\inf_{x\in\mathbf{H}} \sum_{k=1}^{n} \|A_{\eta k}x - u_k\|^2 = \int\limits_{\mathbf{R}\setminus X(\eta)} \frac{\sum\limits_{k,l=1}^{n} \varphi_{\eta k}(\lambda)\varphi_{\eta l}(\lambda)}{\sum\limits_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2} (dE_\lambda u_l, u_k) - \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2.$$

Итог изложенному выше дает

Теорема 1. *Если $\varphi_{\eta k}(\cdot) : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ являются непрерывными функциями, $A_{\eta k} = \varphi_{\eta k}(T)$ являются соответствующими операторнозначными функциями самосопряженного оператора T, действующего в $\mathbf{H}$,*

$$X(\eta) = \Big\{\lambda \in \mathbf{R} : \sum_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2 = 0\Big\},$$

то

$$\arg\min_{\eta\in D} \inf_{x\in\mathbf{H}} \sum_{k=1}^{n} \|A_{\eta k}x - u_k\|^2 = \arg\max_{\eta\in D} \int\limits_{\mathbf{R}\setminus X(\eta)} \frac{\sum\limits_{k,l=1}^{n} \varphi_{\eta k}(\lambda)\varphi_{\eta l}(\lambda)(dE_\lambda u_l, u_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2},$$

где $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ является T-спектральным семейством проекторов.

Рассмотрим более подробно важный для практики случай, когда $\mathbf{H} = \mathbf{L}_2(-\infty, +\infty)$, $T = -id/dt$, $\varphi_{\eta k}$ — рациональные функции. В этом случае

$$\mathrm{mes}[X(\eta)] = 0, \quad (dE_\lambda u_l, u_k) = \overline{U_l(\lambda)}U_k(\lambda)d\lambda, \quad k, l = 1, 2, \ldots, n,$$

где $U_k(\cdot)$ — преобразования Фурье–Планшереля функций u_k. Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Если $\varphi_{\eta k}(\cdot) : \mathbf{R} \to C$ являются рациональными функциями, $A_{\eta k} = \varphi_{\eta k}(-id/dt)$ являются соответствующими операторнозначными функциями дифференциального оператора, то*

$$\arg\min_{\eta\in D} \inf_{x\in\mathbf{H}} \sum_{k=1}^{n} \|A_{\eta k}x - u_k\|^2 = \arg\max_{\eta\in D} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\sum\limits_{k,l=1}^{n} \varphi_{\eta k}(\lambda)U_k(\lambda)|^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2} d\lambda,$$

где $U_k(\cdot)$ — преобразования Фурье–Планшереля функций u_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Устойчивость

В данном разделе рассмотрены результаты исследования устойчивости задачи (2) относительно правых частей уравнений (1). Ясно, что необходимым условием существования единственного решения задачи (2) является требование, чтобы параметрическое семейство операторов

$$A_\eta : \mathbf{H} \to \mathbf{H}^n : A_\eta x = (A_{\eta 1}x, A_{\eta 2}x, \ldots, A_{\eta n}x), \quad \eta \in D,$$

удовлетворяло условию

$$(\forall \widehat{\eta}, \widetilde{\eta} \in D : \widehat{\eta} \neq \widetilde{\eta},\ \forall \widehat{x} \in \mathbf{H} : \|\widehat{x}\| > 0) \left(\inf_{\widetilde{x}\in\mathbf{H}} \sum_{k=1}^{n} \|A_{\widehat{\eta}k}\widehat{x} - A_{\widetilde{\eta}k}\widetilde{x}\|^2 > 0\right). \tag{9}$$

Пусть последовательность $\{u_\Delta = (u_{\Delta 1}, u_{\Delta 2}, \ldots, u_{\Delta n})\}_{\Delta\to 0}$ сходится к $(A_{\widehat{\eta}1}\widehat{x}, A_{\widehat{\eta}2}\widehat{x}, \ldots, A_{\widehat{\eta}n}\widehat{x})$. Рассмотрим систему уравнений (1) с правыми частями $(u_{\Delta 1}, u_{\Delta 2}, \ldots, u_{\Delta n})$. Пусть решение соответствующей задачи (2) равно

$$\eta_\Delta = \arg\min_{\eta\in D} \inf_{x\in\mathbf{H}} \sum_{k=1}^{n} \|A_{\eta k}x - u_{\Delta k}\|^2.$$

Компактность множества D влечет существование подпоследовательности $\{\eta_\delta\}_{\delta\to 0} \subset \{\eta_\Delta\}_{\Delta\to 0}$, сходящейся к некоторой предельной точке $\eta_0 \in D$. Кроме того, имеем

$$\inf_{x\in\mathbf{H}} \sum_{k=1}^{n} \|A_{\eta_\delta k}x - A_{\widehat{\eta}k}\widehat{x}\|^2 = \inf_{x\in\mathbf{H}} \sum_{k=1}^{n} \|A_{\eta_\delta k}x - u_{\delta k} + u_{\delta k} - A_{\widehat{\eta}k}\widehat{x}\|^2 \le$$
$$\le \inf_{x\in\mathbf{H}} \left(\sum_{k=1}^{n} \|A_{\eta_\delta k}x - u_{\delta k}\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \|u_{\delta k} - A_{\widehat{\eta}k}\widehat{x}\|^2 \right) =$$
$$= \inf_{x\in\mathbf{H}} \sum_{k=1}^{n} \|A_{\eta_\delta k}x - u_{\delta k}\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \|u_{\delta k} - A_{\widehat{\eta}k}\widehat{x}\|^2 \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{n} \|A_{\eta k}\overline{x} - u_{\delta k}\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \|u_{\delta k} - A_{\widehat{\eta}k}\widehat{x}\|^2 = 2\sum_{k=1}^{n} \|u_{\delta k} - A_{\widehat{\eta}k}\widehat{x}\|^2.$$

Первое неравенство данной цепочки есть неравенство треугольника, а последнее — следствие равенства

$$\eta_\delta = \arg\min_{\eta\in D} \inf_{x\in\mathbf{H}} \sum_{k=1}^{n} \|A_{\eta k}x - u_{\Delta k}\|^2.$$

Если функция $f(\eta) = \inf\limits_{x\in\mathbf{H}} \sum\limits_{k=1}^{n} \|A_{\eta k}x - A_{\widehat{\eta}k}\widehat{x}\|^2$ непрерывна, то сходимость η к η_0 в рассматриваемой цепочке неравенств влечет

$$\inf_{x\in\mathbf{H}} \sum_{k=1}^{n} \|A_{\eta_0 k}x - A_{\widehat{\eta}k}\widehat{x}\|^2 = 0.$$

Если примем, что условие (9) выполнено, то последнее равенство будет возможно только в случае $\eta_0 = \widehat{\eta}$. Произвольность выбора подпоследовательности $\{\eta_\delta\}_{\delta\to 0}$ означает, что $\widehat{\eta}$ является единственной предельной точкой последовательности $\{\eta_\Delta\}_{\Delta\to 0}$.

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Пусть $\widehat{x} \in \mathbf{H}$, $\widehat{\eta} \in D$, операторы $A_{\eta k}$ задачи* (2) *удовлетворяют условию* (9), *а функция*

$$f(\eta) = \inf_{x\in\mathbf{H}} \sum_{k=1}^{n} \|A_{\eta k}x - A_{\widehat{\eta}k}\widehat{x}\|^2$$

является непрерывной.

Тогда сходимость $\{(u_{\Delta 1}, u_{\Delta 2}, \dots, u_{\Delta n})\} \xrightarrow{\Delta\to 0} (A_{\widehat{\eta}1}\widehat{x}, A_{\widehat{\eta}2}\widehat{x}, \dots, A_{\widehat{\eta}n}\widehat{x})$ *влечет сходимость*

$$\left\{\eta_\Delta = \arg\min_{\eta\in D} \inf_{x\in\mathbf{H}} \sum_{k=1}^{n} \|A_{\eta k}x - u_{\Delta k}\|^2\right\} \xrightarrow{\Delta\to 0} \widehat{\eta}.$$

Если операторы $A_{\eta k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, являются функциями самосопряженного оператора T, то имеет смысл сформулировать найденное условие в терминах этих функций.

Теорема 4. *Пусть $\overline{x} \in \mathbf{H}$, $\overline{\eta} \in D$. Пусть операторы $A_{\eta k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, задачи* (2) *удовлетворяют условиям*

1) $A_{\eta k} = \varphi_{\eta k}(T)$, *где $\varphi_{\eta k}(\cdot) : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ — непрерывное по η семейство мероморфных функций, T представляет самосопряженный оператор, действующий в $\mathbf{H}$ и не имеющий точечного спектра*;

2) $(\forall\eta \in D,\ \forall\lambda \in \mathbf{R}) \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2 \ge \delta(\eta) > 0\right)$; (10)

3) $(\forall\widehat{\eta}, \widetilde{\eta} \in D : \widehat{\eta} \ne \widetilde{\eta})\left(\exists l, m : \operatorname{card}\left\{\lambda : \dfrac{\varphi_{\widehat{\eta}l}(\lambda)}{\varphi_{\widetilde{\eta}l}(\lambda)} = \dfrac{\varphi_{\widehat{\eta}m}(\lambda)}{\varphi_{\widetilde{\eta}m}(\lambda)}\right\} < \aleph_0\right)$.

Тогда $\{(u_{\Delta 1}, u_{\Delta 2}, \ldots, u_{\Delta n})\} \xrightarrow{\Delta\to 0} (A_{\overline{\eta}1}\overline{x}, A_{\overline{\eta}2}\overline{x}, \ldots, A_{\overline{\eta}n}\overline{x})$ *влечет сходимость*

$$\left\{\eta_\Delta = \arg\min_{\eta\in D}\inf_{x\in\mathbf{H}}\sum_{k=1}^{n}\|A_{\eta k}x - u_{\Delta k}\|^2\right\} \xrightarrow{\Delta\to 0} \overline{\eta}.$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 3 для доказательства теоремы 4 достаточно показать, что, во-первых, условия (9) выполнены; во-вторых, функция $f(\eta) = \inf\limits_{x\in\mathbf{H}}\sum\limits_{k=1}^{n}\|A_{\eta k}x - \overline{u}\|^2$ является непрерывной. Докажем первое утверждение методом от противного. Предположим, что

$$(\exists\widehat{\eta}, \widetilde{\eta} \in D : \widehat{\eta} \neq \widetilde{\eta},\ \ \exists\widehat{x} \in \mathbf{H} : \|\widehat{x}\| > 0)\left(\inf_{y\in\mathbf{H}}\sum_{k=1}^{n}\|A_{\widehat{\eta}k}\widehat{x} - A_{\widetilde{\eta}k}y\|^2 = 0\right). \tag{11}$$

Из (10) следует, что линейное многообразие $A_{\eta 1}\mathbf{H} \times A_{\eta 2}\mathbf{H} \times \cdots \times A_{\eta n}\mathbf{H}$ является замкнутым подмножеством в $\mathbf{H}^n$. Поэтому инфимум в (11) достигается на элементе $\widetilde{x} \in \mathbf{H}$. Отсюда следуют равенства

$$A_{\widehat{\eta}k}\widehat{x} = A_{\widetilde{\eta}k}\widetilde{x}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Введем функцию $\psi(\lambda) = \varphi_{\widehat{\eta}l}(\lambda)/\varphi_{\widetilde{\eta}l}(\lambda)$. Из (12) следует, что для $k = l$

$$\widetilde{x} = \int_{\mathbf{R}}\psi(\lambda)dE_\lambda\widehat{x}.$$

Подстановка данного представления в (12) при $k = m \neq l$ дает

$$\int_{\mathbf{R}}(\varphi_{\widehat{\eta}m}(\lambda) - \varphi_{\widetilde{\eta}m}(\lambda)\psi(\lambda))dE_\lambda\widehat{x} = 0,$$

что эквивалентно

$$\int_{\mathbf{R}}|\varphi_{\widehat{\eta}m}(\lambda) - \varphi_{\widetilde{\eta}m}(\lambda)\psi(\lambda)|^2 d(E_\lambda\widehat{x}, \widehat{x}) = 0. \tag{13}$$

Поскольку T не имеет точечного спектра, то можно считать $(E_\lambda\widehat{x}, \widehat{x})$ неубывающей функцией параметра λ. Эта функция определяет неатомическую меру $\mathrm{mes}(\ )$ на $\mathbf{R}$. Из (13) следует существование множества $\Lambda \subset \mathbf{R}$ такого, что $\mathrm{mes}(\Lambda) = \|\widehat{x}\|^2 > 0$ и

$$(\forall\lambda \in \Lambda)\ (\varphi_{\widehat{\eta}m}(\lambda) = \varphi_{\widetilde{\eta}m}(\lambda)\psi(\lambda)).$$

Поскольку мера $\mathrm{mes}(\ )$ является неатомической, то

$$\mathrm{card}(\Lambda) = \aleph_1 > \aleph_0 \quad (\forall\lambda \in \Lambda)\ (\varphi_{\widehat{\eta}l}(\lambda)/\varphi_{\widetilde{\eta}l}(\lambda) = \varphi_{\widehat{\eta}m}(\lambda)/\varphi_{\widetilde{\eta}m}(\lambda)).$$

Из произвольности выбора l, m следует справедливость последнего высказывания для всех $l, m = 1, 2, \ldots, n$. Но это противоречит условию теоремы и, следовательно, доказывает выполнение условия (9).

Из (5) и (10) следует, что

$$f(\eta) = \sum_{k,l=1}^{n}\int_{\mathbf{R}}\frac{\varphi_{\eta k}(\lambda)\varphi_{\eta l}(\lambda)(dE_\lambda u_l, u_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n}|\varphi_{\eta k}(\lambda)|^2}. \tag{14}$$

Из непрерывности по η семейства $\{\varphi_{\eta k}(\cdot)\}_{\eta\in D}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и условия (10) следует непрерывность по η функции под интегралом в выражении (14). В соответствии с теоремой Лебега о мажорированной сходимости ([4], с. 63) заключаем, что функция $f(\eta)$ непрерывна. $\square$

Литература

1. Panyukov A.V. *The parameters identification of linear functional equations systems by its right part* // Proceedings of the 2nd International Conference on Science and Technology “Current problems of Fundamental Science”. (Moscow, January 24–28, 1994, Moscow State Bauman University of Technology). V. 1. Part 1. Proceedings of the Symposium on mathematics and Technosphere. – M.: Техносфера-информ. – 1994. – С. 38–41.
2. Иванов В.К. *О линейных некорректных задачах* // ДАН СССР. – 1962. – Т. 145. – № 2. – С. 270–272.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1979. – 285 с.
4. Хатсон В., Пим Дж. *Приложения функционального анализа и теории операторов.* – М.: Мир, 1983. – 432 с.

Южно-Уральский государственный университет

Поступила 23.09.1999