ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 2 (489)

УДК 517.547

С.Н. МЕЛИХОВ, Е.В. ТЕКНЕЧЯН

О РАЗЛОЖЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ПО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ ПРОИЗВОДНЫМ

Введение

Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $A(G)$ — пространство всех аналитических в G функций с топологией равномерной сходимости на компактах G. Значительное число работ посвящено вопросу о полноте в $A(G)$ системы всех последовательных производных фиксированной функции $f \in A(G)$ (библиографию см., напр., в [1], [2]). Более сильные аппроксимативные свойства последовательностей производных некоторых рациональных и периодических мероморфных функций $f \in A(G)$ для специальных невыпуклых областей G изучались в [3]. Именно, в ([3], гл. 3, 4) выделены классы таких мероморфных функций f, что система последовательных производных f является абсолютно представляющей системой (АПС) [4] в некоторых пространствах аналитических функций.

В данной статье в случае, когда область G ограничена и выпукла, K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, при некоторых предположениях об асимптотическом поведении коэффициентов ряда Дирихле для f строится биортогональная к $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ система $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ и для любого аналитического ростка h на компакте $\overline{G}+K$ доказывается абсолютная сходимость в $A(G)$ к h ряда $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} g_n(h)f^{(n)}$. В качестве следствия для открытого круга G получены условия, при которых $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ является АПС в $A(G)$.

Ранее системы, биортогонально сопряженные к последовательностям всех производных некоторых рациональных и периодических мероморфных функций, были построены в ([3], гл. 3, 4), а с помощью коэффициентов рядов экспонент (в частности, рядов Фурье) или обобщенных экспонент функции f формулировались условия полноты системы $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ([5], § 2; [6], § 3; [2], гл. 4, § 2; [7]).

Основным методом, примененным в данной статье, является естественный операторный подход, связанный с фиксированной биортогональной системой. Использовать этот метод при разложениях в ряды по системам, не являющимся базисами, побудили исследования А.Ф. Леонтьева в теории рядов экспонент ([8], гл. IV). В представлениях рядами экспонент он применялся прежде также в [9], в теории Q-Кете базисов — в ([10], гл. I, § 1.2). Некоторая его абстрактная версия изложена в [11]. При исследовании абсолютно представляющих систем $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ привлекается также один результат о представительных подпространствах из [12].

1. Вспомогательные сведения

Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, содержащие 0. Для выпуклого множества Q в $\mathbb{C}$ символ H_Q обозначает опорную функцию Q:

$$H_Q(z) := \sup_{t\in Q} \operatorname{Re}(zt), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 99-01-00178 и № 02-01-00372) и DAAD.

Если Q — выпуклая область в $\mathbb{C}$, то $A(Q)$ — пространство всех аналитических в Q функций с топологией равномерной сходимости на компактах Q. Если Q — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, то $A(Q)$ обозначает пространство всех ростков функций, аналитических на Q, с естественной топологией индуктивного предела.

Для выпуклого компакта Q в $\mathbb{C}$ введем весовое пространство целых функций

$$[1, H_Q] := \left\{ f \in A(\mathbb{C}) \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N} \ \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(H_Q(z) + |z|/n)} < \infty \right\}$$

и наделим его естественной топологией пространства Фреше. Положим $e_\lambda(z) := \exp(\lambda z)$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$.

Пусть Q — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$. Как известно ([13], гл. I, § 10, теорема 10.9), преобразование Лапласа $\mathcal{F} : \varphi \mapsto (\varphi(e_\lambda))_{\lambda \in \mathbb{C}}$ является топологическим изоморфизмом сильного сопряженного к $A(Q)$ пространства $A(Q)'_\beta$ на $[1, H_Q]$. Для $h \in [1, H_Q]$, $g \in A(Q)$ полагаем $h(g) := \mathcal{F}^{-1}(h)(g)$. Тогда для любых $h \in [1, H_Q]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняется равенство $h(e_\lambda) = h(\lambda)$.

Зафиксируем целую в $\mathbb{C}$ функцию L, обладающую следующими свойствами:

(i) L имеет вполне регулярный рост и индикатор $H_G + H_K$ при порядке 1;

(ii) каждый нуль функции L простой;

(iii) если $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность всех различных нулей L, то

$$|L'(\lambda_j)| = \exp(H_G(\lambda_j) + H_K(\lambda_j) + \bar{o}(|\lambda_j|)), \quad j \to \infty.$$

Согласно ([14], гл. II; [8], гл. I, § 3) такие функции L существуют.

Отметим, что если последовательность чисел c_j, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условию

$$\exists \varepsilon > 0 : \sup_{j \in \mathbb{N}} |c_j| \exp\left(H_G(\lambda_j) + H_K(\lambda_j) + \varepsilon|\lambda_j|\right) < \infty, \tag{1}$$

то ряд $\sum\limits_{j \in \mathbb{N}} c_j e_{\lambda_j}$ абсолютно сходится в $A(\overline{G} + K)$.

Для $j \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ полагаем $l_j(z) := \frac{L(z)}{L'(\lambda_j)(z - \lambda_j)}$, $b_{nj} := l_j(z^n/n!)$.

Доказательства основных результатов статьи основываются на следующих вспомогательных утверждениях.

Лемма 1. *Пусть* $d := \sup\limits_{z \in \overline{G} + K} |z|$. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такая постоянная* A, *что*

$$|b_{nj}| \le \frac{A}{|L'(\lambda_j)|} \frac{(d + \varepsilon)^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Лемма 2. *Пусть числа* $c_j \ne 0$, $j \in \mathbb{N}$, *удовлетворяют условию*

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{|c_j|\,|L'(\lambda_j)|^2} < \infty. \tag{3}$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}_0$

а) *ряд* $\sum\limits_{j \in \mathbb{N}} \frac{b_{nj}}{c_j} l_j$ *абсолютно сходится в* $[1, H_G + H_K]$;

б) *функции* $g_n := \sum\limits_{j \in \mathbb{N}} \frac{b_{nj}}{c_j} l_j$ *удовлетворяют следующим оценкам сверху*: $\forall \varepsilon > 0\ \exists B > 0$

$$|g_n(z)| \le B \frac{(d + \varepsilon)^n}{n!} \exp\left(H_G(z) + H_K(z) + \varepsilon|z|\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Лемма 2 следует из оценок (2) леммы 1, условия (3) и ограниченности семейства функций $\left(\frac{L(z)}{z - \lambda_j}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ в $[1, H_G + H_K]$.

Лемма 3. *Для любых* $k, j \in \mathbb{N}$ $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}_0} b_{nk} (\lambda_j)^n = \delta_{kj}$.

Пусть $[1,0]$ — пространство всех целых в $\mathbb{C}$ функций порядка, меньшего 1 или равного 1, и нулевого типа (т. е. $[1,0]$ — это пространство $[1,H_Q]$ для $H_Q\equiv 0$). Для функции $a(z)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \in [1,0]$, $z\in\mathbb{C}$, введем дифференциальный оператор бесконечного порядка с характеристической функцией a: $a(D)(g):=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n g^{(n)}$, $g\in A(G)$. Согласно [15] $a(D)$ — линейный непрерывный оператор в $A(G)$.

Зафиксируем последовательность выпуклых компактов $G_s\subset G$, $s\in\mathbb{N}$, таких, что $G_s\subset \operatorname{int} G_{s+1}$, $s\in\mathbb{N}$, и $G=\bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}} G_s$. (Для множества $Q\subset\mathbb{C}$ символ $\operatorname{int} Q$ обозначает внутренность Q.) Последовательность преднорм $p_s(g):=\sup\limits_{z\in G_s}|g(z)|$, $g\in A(G)$, $s\in\mathbb{N}$, задает естественную топологию $A(G)$.

Для функции $f\in A(G)$, отличной от многочлена, введем пространство числовых последовательностей $\Lambda_f := \left\{b=(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\subset\mathbb{C}\,\Big|\, q_s(b):=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0}|b_n|p_s(f^{(n)})<\infty\ \forall s\in\mathbb{N}\right\}$. С топологией, заданной последовательностью преднорм q_s, $s\in\mathbb{N}$, Λ_f — пространство Фреше.

Положим $\Pi(b):=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} b_n f^{(n)}$, $b\in\Lambda_f$. Оператор представления Π линейно и непрерывно отображает Λ_f в $A(G)$. В $\Pi(\Lambda_f)$ индуцируем из Λ_f топологию пространства Фреше (тогда $\Pi(\Lambda_f)$ топологически изоморфно фактор-пространству $\Lambda_f/\operatorname{Ker}\Pi$ и непрерывно вложено в $A(G)$).

Замечание 1. Если образ $\Pi(\Lambda_f)$ оператора представления Π содержит хотя бы один ненулевой многочлен, то в $A(G)$ существует нетривиальное разложение нуля (НРН) по системе $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, т. е. ядро оператора Π нетривиально.

Действительно, пусть g — ненулевой многочлен степени s и $g=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} b_n f^{(n)}$, $b\in\Lambda_f$. Ясно, что $b\neq 0$. Дифференцируя последнее равенство $s+1$ раз, получим абсолютно сходящееся в $A(G)$ разложение $\sum\limits_{n\geq s+1} b_{n-s-1}f^{(n)}$, не все коэффициенты в котором равны 0.

Отсюда следует, что ни для какой функции $f\in A(G)$ система всех производных f не может быть базисом в $A(G)$.

Отметим, что в ([3], гл. 3, 4) в некоторых пространствах аналитических функций изучались НРН по системам рациональных и периодических мероморфных функций.

Лемма 4. *Для любого $a\in[1,0]$ справедливо включение $a(D)(\Pi(\Lambda_f))\subset\Pi(\Lambda_f)$.*

2. Основные результаты

Для последовательности $c=(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ комплексных чисел $c_j\neq 0$, следуя [16] (см. также [8], гл. 3, § 1, п. 2), введем функцию

$$k_c(\theta):=\lim_{\alpha\to+0}\ \limsup_{\substack{k\to\infty\\ \theta-\alpha\leq\arg\lambda_k\leq\theta+\alpha}}\frac{\log|c_k|}{|\lambda_k|},\quad \theta\in\mathbb{R}.$$

Существует единственная выпуклая область Q_c, для которой $H_{Q_c}(z):=k_c(\arg z)|z|$, $z\in\mathbb{C}$; Q_c — область абсолютной сходимости ряда Дирихле $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} c_j e_{\lambda_j}$ [16].

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть числа $c_j\neq 0$, $j\in\mathbb{N}$, удовлетворяют условиям* (1) *и* (3); $f=\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} c_j e_{\lambda_j}$. *Пусть также $g_n:=\sum\limits_{j\in\mathbb{N}}\frac{b_{nj}}{c_j} l_j$, где $l_j(z):=L(z)/(L'(\lambda_j)(z-\lambda_j))$, $b_{nj}:=l_j(z_n/n!)$, $j\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}_0$. Тогда*

1) $(g_n, f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ — *биортогональная система, т. е. $g_n(f^{(k)})=\delta_{nk}$, $n,k\in\mathbb{N}_0$;*

2) *если дополнительно*

$$d := \sup_{z\in\overline{G}+K} |z| \le \operatorname{dist}(\partial Q_c, \overline{G}+K), \tag{4}$$

то для любой функции $h \in A(\overline{G}+K)$ *выполняется равенство* $h = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} g_n(h)f^{(n)}$, *причем ряд абсолютно сходится в* $A(G)$.

Схема доказательства теоремы 1. Утверждение 1) следует из разложений $z^n/n! = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} l_j(z^n/n!)e_{\lambda_j}(z) = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} b_{nj}e_{\lambda_j}(z)$, $z \in G+K$ (последний ряд абсолютно сходится в $A(G+K)$) [9] (теорема 12) и леммы 2.

Докажем 2). Из лемм 1–3 и аналитичности функции f в Q_c следует, что для любой функции $h \in A(\overline{G}+K)$ ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} g_n(h)f^{(n)}$ абсолютно сходится в $A(G)$ и для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняется равенство $e_\lambda = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} g_n(\lambda)f^{(n)}$. В силу теоремы Банаха–Штейнгауза линейный оператор $M(h) := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} g_n(h)f^{(n)}$, $h \in A(\overline{G}+K)$, непрерывно отображает $A(\overline{G}+K)$ в $A(G)$, причем $M(e_\lambda) = e_\lambda$ $\forall\lambda \in \mathbb{C}$. Поскольку множество $\{e_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ полно в $A(\overline{G}+K)$, то $M(h) = h$ $\forall h \in A(\overline{G}+K)$. $\square$

Теорема 2. *Пусть* $R > 0$, $G := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$, $K = \{0\}$, *и выполнены условия* (3) *и*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |c_j| \exp\left(2R|\lambda_j| - \varepsilon|\lambda_j|\right) < \infty \quad \forall\varepsilon > 0. \tag{5}$$

Тогда

1) *для* $f := \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} c_j e_{\lambda_j}$ *последовательность* $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ *является абсолютно представляющей системой в* $A(G)$;
2) *для любого* $h \in A(\overline{G})$ *имеет место представление* $h = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} g_n(h)f^{(n)}$, *где* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ — *биортогональная к* $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ *система, как в теореме* 1, *и ряд абсолютно сходится в* $A(G)$.

Схема доказательства теоремы 2. Утверждение 2) — непосредственное следствие теоремы 1 при $K = \{0\}$ (в этом случае из условия (5) следует $2G \subset Q_c$).

Докажем 1). Вложение $A(\overline{G}) \subset \Pi(\Lambda_f)$ имеет место в силу первого утверждения теоремы 1. Кроме того, $\Pi(\Lambda_f)$ — пространство Фреше, непрерывно вложенное в $A(G)$, и по лемме 4

$$a(D)(\Pi(\Lambda_f)) \subset \Pi(\Lambda_f) \quad \forall a \in [1, 0].$$

В силу леммы 8 [12] $\Pi(\Lambda_f) = A(G)$, т. е. $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ — АПС в $A(G)$. $\square$

Замечание 2. 1) Последовательность чисел $c_j \ne 0$, удовлетворяющая условиям (3) и (4), существует, если G и K удовлетворяют условию

$$2\inf_{\theta\in\mathbb{R}} h_K(\theta) - \sup_{\theta\in\mathbb{R}} h_K(\theta) \ge \sup_{\theta\in\mathbb{R}} h_G(\theta) - \inf_{\theta\in\mathbb{R}} h_G(\theta)$$

(это неравенство справедливо, если G и K — круги с центром в 0). В качестве c (и в теореме 2 тоже) можно взять последовательность $c_j := \frac{1}{\alpha_j|L'(\lambda_j)|^2}$, где $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} |\alpha_j| < \infty$ ($\alpha_j \ne 0$), $j \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{\ln|\alpha_j|}{|\lambda_j|} = 0$ (напр., $\alpha_j := j^{-p}$, $p > 1$, $j \in \mathbb{N}$).

2) Предположения (3) и (5) в определенном смысле существенны для справедливости теоремы 2. Точнее, имеют место следующие утверждения:

а) для любого $\varepsilon > 0$, если $c_j := \exp\left(-2R|\lambda_j| + \varepsilon|\lambda_j|\right)$, $j \in \mathbb{N}$, для функции $f := \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} c_j e_{\lambda_j}$ последовательность $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ не является полной (а, тем более, АПС) в $A(G)$ [7];

б) для любого $\varepsilon > 0$, если $c_j := \exp(-2R|\lambda_j| - \varepsilon|\lambda_j|)$, $j \in \mathbb{N}$, для функции $f := \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} c_j e_{\lambda_j}$ не существует ортогональной к $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ системы в $A(\overline{G})'$ (система $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ полна в $A(\overline{G})$ [7]).

В заключение отметим, что аналогичные результаты имеют место и для выпуклых полиобластей.

Литература

1. Коробейник Ю.Ф. *О полноте одной системы аналитических функций* // Матем. сб. – 1965. – Т. 67. – № 4. – С. 561–569.
2. Ибрагимов И.И. *Методы интерполяции функций и некоторые их применения.* – М.: Наука, 1971. – 518 с.
3. Гарифьянов Ф.Н. *Операторы с дробно-линейными сдвигами и биортогональные ряды*: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. – Екатеринбург, 1997. – 235 с.
4. Коробейник Ю.Ф. *Представляющие системы* // УМН. – 1981. – Т. 36. – Вып. 1. – С. 73–126.
5. Казьмин Ю.А. *О полноте одной системы аналитических функций.* I // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем. – 1960. – № 5. – С. 3–13.
6. Громов В.П. *О полноте систем аналитических функций в области* // Матем. сб. – 1963. – Т.62. – № 3. – С. 320–334.
7. Мелихов С.Н. *О циклических элементах линейного оператора, представимых рядами по его собственным элементам* // Международн. конф. по теории приближения функций, посвященная памяти профессора П.П. Коровкина. Тез. докл. Калуга. – 1996. – Т. 2. – С. 143–144.
8. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* – М.: Наука, 1976. – 536 с.
9. Коробейник Ю.Ф. *Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и представляющие системы* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1980. – Т. 44. – № 5. – С. 1066–1114.
10. Братищев А.В. *Базисы Кете, целые функции и их приложения*: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. – Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 1998. – 248 с.
11. Мелихов С.Н. *Нетривиальные разложения нуля и представительные подпространства* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 8. – С. 53–65.
12. Мелихов С.Н. *О разложении аналитических функций в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1988. – Т.52. – № 5. – С. 991–1004.
13. Маергойз Л.С. *Асимптотические характеристики целых функций и их приложения.* – Новосибирск: Наука, 1991. – 274 с.
14. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
15. Коробейник Ю.Ф. *Существование аналитического решения уравнения бесконечного порядка и характер его области аналитичности* // Матем. сб. – 1969. – Т.80. – № 1. – С. 52–76.
16. Лунц Г.Л. *Об одном классе обобщенных рядов Дирихле* // УМН. – 1957. – Т.12. – Вып. 3. – С. 173–179.

Ростовский государственный университет

Ростовская государственная академия сельхозмашиностроения

Поступила 10.08.2001