ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 7 (422)

УДК 519.63

М.Е. МАЙОРОВА, М.Ф. ПАВЛОВА

СХОДИМОСТЬ ЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ОДНОГО ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

1. Введение

Данная работа продолжает исследования, начатые в [1], где для вариационного неравенства вида

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial \varphi(u)}{\partial t}, v-u \right\rangle dt + \int_0^T \langle A(u,\nabla u), v-u\rangle dt \geq \int_0^T \langle f, v-u\rangle dt, \quad \forall\, v\in K, \tag{1.1}$$

была доказана теорема существования обобщенного решения из множества $K = \{\, v \in L_p(0,T; \overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}(\Omega)) \cap L_\infty(0,T; L_\alpha(\Omega)), v \geq 0$ почти всюду (п. в.) в $Q_T = \Omega \times (0,T]\}$, Ω — ограниченная область пространства R^n с границей Γ. В неравенстве (1.1) $\langle g, v\rangle$ определяет значение функционала g из $L_{p'}(0,T; W_{p'}^{-1}(\Omega))$ на элементе из $L_p(0,T; \overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}(\Omega))$, $A(v,\nabla u) = -\sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x,v)k_i(x,\nabla u))$. В [1] в процессе доказательства этой теоремы устанавливалась сходимость решений полудискретной задачи со штрафом к решению неравенства (1.1). В данной работе исследуется сходимость разностных схем (р. с.), построенных для полудискретной задачи со штрафом, к решению неравенства (1.1).

Исследуемые здесь р. с. названы явными, поскольку значение пространственного оператора вычисляется на нижнем слое. Отличаются эти схемы операторами штрафа. В первой из них оператор штрафа выбирается таким же, как и в [1]: $\beta(u) = |u^-|^{p-2}\times(-u^-)$, где $u^- = (|u|-u)/2$. Сходимость этой схемы мы смогли доказать лишь в частном случае, когда $k_i(x,\nabla u) = g_i(x,\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_i}$, функции g_i неотрицательны. Во второй р. с. β выбран в виде разностной аппроксимации оператора $Gu = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial(-u^-)}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial(-u^-)}{\partial x_i}\right)$. Сходимость р. с. в этом случае доказана при общих предположениях на оператор A.

2. Описание задачи, обозначения

Как и в [1], под обобщенным решением неравенства (1.1) будем понимать функцию $u \in K$, удовлетворяющую (1.1) и такую, что

$$\frac{\partial\varphi(u)}{\partial t} \in L_{p'}(0,T; W_{p'}^{-1}(\Omega)), \quad u(x,0) = u_0(x) \quad \text{п. в. в } \Omega. \tag{2.1}$$

Будем предполагать, что Ω — единичный гиперкуб, $\varphi(\xi)$ — строго возрастающая функция, $\varphi(0)=0$, и при любом $\xi \in R^1$ справедливы следующие неравенства (см. [1])

$$b_0|\xi|^\alpha - b_1 \leq \Phi(\xi) = \int_0^\xi \varphi'(t)t\,dt \leq b_2|\xi|^\alpha + b_3, \tag{2.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-00400).

$$|\varphi(\xi)| \leq b_4|\xi|^{\alpha-1} + b_5, \tag{2.3}$$

$$(\varphi'(\xi)\xi)' \geq 0, \tag{2.4}$$

$$\varphi'(\xi) \geq b_6|\xi|^{\alpha-2}, \tag{2.5}$$

где $\alpha > 1$, $b_0 > 0$, $b_1 \geq 0$, $b_2 > 0$, $b_3 \geq 0$, $b_4 > 0$, $b_5 \geq 0$.

Функции $a_i(x,\xi_0)$, $k_i(x,\xi)$ $(i = 1,\dots,n)$ непрерывны по ξ_0 и ξ, измеримы по x и удовлетворяют при любых $x \in \Omega$, $\xi_0 \in R^1$, $\xi^1, \xi^2, \xi \in R^n$ соотношениям

$$0 < \beta_0 \leq a_i(x,\xi_0) \leq \beta_1, \tag{2.6}$$

$$|k_i(x,\xi)| \leq M_0 \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{p-1} + M_1, \tag{2.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,\xi_0)k_i(x,\xi)\xi_i \geq M_2 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p - M_3, \tag{2.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,\xi_0)(k_i(x,\xi^1) - k_i(x,\xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) \geq 0, \tag{2.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,\xi_0)k_i(x,\xi)\xi_i \geq 0. \tag{2.10}$$

Здесь $M_0 > 0$, $M_1 \geq 0$, $M_2 > 0$, $M_3 \geq 0$, $p > 1$ — произвольные постоянные.

При исследовании р. с. будут использоваться следующие обозначения: τ — шаг по времени, $\omega_\tau = \{\tau, 2\tau, \dots, N\tau = T\}$, $\overline{\omega}_\tau = \{0, \tau, \dots, T\}$, $\overline{\omega}$ — равномерная сетка на Ω с шагом h_i по i-му координатному направлению, γ — множество точек сетки $\overline{\omega}$, принадлежащих Γ, $\omega = \overline{\omega}\backslash\gamma$, $\overline{h} = \max_{1\leq i\leq n} h_i$.

Пусть далее r есть n-мерный вектор с координатами ∓ 1,

$$\nabla_r y(\overline{x}) = (\partial_{r_1} y(\overline{x}), \partial_{r_2} y(\overline{x}), \dots, \partial_{r_n} y(\overline{x})),$$

$$\partial_{r_i} y(\overline{x}) = \begin{cases} y_{x_i}(\overline{x}), & \text{если } r_i = +1; \\ y_{\overline{x}_i}(\overline{x}), & \text{если } r_i = -1. \end{cases}$$

Обозначим через $H_r(\overline{x})$ – ячейку сетки $\overline{\omega}$, которая содержит все точки, участвующие в записи оператора $\nabla_r y(\overline{x})$, ω_r — множество точек $\overline{x} \in \overline{\omega}$, в которых определен оператор $\nabla_r y(\overline{x})$. В пространстве сеточных функций $\overset{\circ}{H}$, определенных на $\overline{\omega}$ и равных нулю на γ, введем следующие нормы и скалярные произведения

$$(y,v)_r = \sum_{\overline{x}\in\omega_r} \triangle h y(\overline{x}) v(\overline{x}), \qquad [y,v] = \frac{1}{2^n}\sum_r (y,v)_r,$$

$$\|y\|_p^p = [|y|^p, 1], \quad \|y\|_{+p}^p = \frac{1}{2^n}\sum_r \sum_{i=1}^{n} (|\partial_{r_i} y|^p, 1)_r,$$

где $\triangle h = h_1 \times \dots \times h_n$. Пусть Π_r, $\Pi^{\mp}$ — кусочно-постоянные восполнения по x и t соответственно. Если $z(x,t)$ — функция, определенная на $\overline{\omega}_\tau \times \omega_r$, то $\Pi_r^{\mp} z(x,t)$ будем обозначать кусочно-постоянное восполнение по x и t одновременно: $\Pi_r^{\mp} z(x,t) = \Pi^{\mp}\Pi_r z(x,t)$.

3. Исследование сходимости явной разностной схемы со слабой регуляризацией

В данном параграфе будем предполагать, что

$$k_i(x,\xi) = g_i(x,\xi)\xi_i, \quad g_i(x,\xi) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in R^n. \tag{3.1}$$

Рассмотрим разностную схему

$$\varphi_t(y_\varepsilon) + Ay_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta\hat{y}_\varepsilon = f_{h\tau}\,, \tag{3.2}$$
$$y_\varepsilon(x,0) = y_{\varepsilon\circ}(x), \quad y_{\varepsilon|\Gamma} = 0.$$

Здесь операторы A, β задаются равенствами

$$[Ay,w] = \frac{1}{2^n}\sum_r \sum_{x\in\omega_r}\sum_{i=1}^n \triangle h a_i(x,y)k_i(x,\nabla_r y)\partial_{r_i}w,$$

$$\beta w = -|w^-|^{p-2}w^-,$$

$y_{\varepsilon\circ}$ — разностный аналог функции $u_\circ$ такой, что $\Pi_r y_{\varepsilon\circ}(x) \to u_\circ$ при $\overline{h} \to 0$ в $L_\alpha(\Omega)$, $y_{\varepsilon\circ} \geq 0$, $f_{h\tau}$ — сеточная функция, являющаяся аппроксимацией f, которую определим формулой

$$[f_{h\tau}(t),w] = \frac{1}{2^n}\sum_r \sum_{x\in\omega_r}\sum_{i=0}^n \triangle h f^r_{h\tau,i}(t)\partial_{r_i}w, \quad \forall w \in \overset{\circ}{H}$$

($\partial_{r_0}w = w$, $f^r_{h\tau,i}(t) = \frac{1}{\tau\triangle h}\int_t^{t+\tau}\int_{H_r} f_i(\xi,\eta)d\xi\, d\eta$, $f = f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$).

Заметим, что разрешимость р. с. (3.2) очевидна, поскольку на каждом слое требуется обращать оператор $\varphi(\hat{y}_\varepsilon) + \frac{\tau}{\varepsilon}\beta\hat{y}_\varepsilon$.

Исследуем сходимость р.с. (3.2). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. [1] *Пусть $\alpha \geq 2$, функции φ, $a_i(x,\xi)$, $k_i(x,\xi)$ $(i = 1,\ldots,n)$ удовлетворяют условиям* (2.2) – (2.9), (3.1). *Пусть $f \in L_q(0,T;L_{p'}(\Omega))$, $q = \max\{\alpha',p'$, $u_0 \in L_\alpha(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{(1)}_p(\Omega)$, $u_0 \geq 0$. Тогда при любых τ, h и ε, удовлетворяющих соотношениям*

$$\frac{\tau\lambda_\alpha^\alpha}{\varepsilon^{(\alpha-1)/(p-1)}} \leq c_1 \text{ при } 1 < p \leq \alpha, \qquad \frac{\tau\lambda_\alpha^p}{\varepsilon} \leq c_2 \text{ при } p > \alpha, \tag{3.3}$$

$$\tau\lambda_\alpha^\alpha \xrightarrow[\tau,h\to 0]{} 0 \text{ при } 1 < p \leq \alpha, \qquad \tau\lambda_\alpha^p \xrightarrow[\tau,h\to 0]{} 0 \text{ при } p > \alpha, \tag{3.4}$$

существует подпоследовательность восполнений решения р. с. (3.2), *сходящаяся к решению вариационной задачи* (1.1), (2.1).

Здесь λ_α — постоянная, удовлетворяющая неравенству

$$\|y\|_{+p} \leq \lambda_\alpha \|y\|_\alpha, \tag{3.5}$$

причем

$$\lambda_\alpha = \frac{2\sqrt[p]{n}}{h^{1+n(p-\alpha)/\alpha p}}, \text{ если } p \geq \alpha, \quad \lambda_\alpha = \frac{2\sqrt[p]{n}}{h}, \text{ если } 1 < p < \alpha, \tag{3.6}$$

$h = \min_{1\leq i\leq n} h_i$.

Сначала в следующих трех леммах получим априорные оценки для решения р. с. (3.2).

[1]Аналогичные результаты будут справедливы и для $\alpha < 2$, если наложить дополнительное ограничение на функцию $\varphi : (\varphi^{-1})'(\xi) \geq c|\xi|^{(2-\alpha)/(\alpha-1)}$.

Лемма 3.1. *Пусть $f \in L_q(0,T;W_{p'}^{-1}(\Omega))$, $q=\max\{\alpha',p'\}$. Тогда при любых ε и любых τ, h, удовлетворяющих неравенствам*

$$\tau \le \frac{h^\alpha}{2^\alpha n^{\alpha/p}}\, c \qquad \text{при } 1<p<\alpha, \tag{3.7}$$

$$\tau \le \frac{h^{p+n(p-\alpha)/\alpha}}{2^p n}\, c, \qquad \text{при } p\ge\alpha, \tag{3.8}$$

для решения р.с. (3.2) имеют место следующие априорные оценки

$$\max_{t'\in\overline{\omega}_\tau} \|y_\varepsilon(t')\|_\alpha^\alpha \le \mathrm{const}, \tag{3.9}$$

$$\sum_{t=0}^{t'} \tau \|y_\varepsilon\|_{+p}^p \le \mathrm{const}, \tag{3.10}$$

$$\sum_{t=0}^{t'} \|\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon\|_\alpha^\alpha \le \mathrm{const}, \quad \forall t'\in\omega_\tau \tag{3.11}$$

Доказательство. Умножим обе части (3.2) скалярно в H на $\tau(b\hat{y}_\varepsilon + \overline{b}(\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon))$, где $b>0$, $\overline{b}>0$ — произвольные постоянные. В результате получим

$$\begin{aligned} b\tau[\varphi_t(y_\varepsilon),\hat{y}_\varepsilon] + \overline{b}\tau[\varphi_t(y_\varepsilon),\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon] + b\tau[Ay_\varepsilon,y_\varepsilon] + \frac{b\tau}{\varepsilon}[\beta\hat{y}_\varepsilon,\hat{y}_\varepsilon] + \frac{\overline{b}\tau}{\varepsilon}[\beta\hat{y}_\varepsilon,\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon] = \\ = -(b+\overline{b})\tau[Ay_\varepsilon,\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon] + b\tau[f_{h\tau},y_\varepsilon] + (b+\overline{b})\tau[f_{h\tau},\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Первые два слагаемых левой части (3.12) оценим с помощью неравенств (см. [2], [3])

$$(\varphi(\xi)-\varphi(\eta))\xi \ge \Phi(\xi)-\Phi(\eta), \tag{3.13}$$

$$(\varphi(\xi)-\varphi(\eta))(\xi-\eta) \ge c|\xi-\eta|^\alpha, \quad \forall \xi,\eta\in R^1, \text{ при } \alpha\ge 2, \tag{3.14}$$

где $c=2^{1-\alpha}\, b_6/\alpha$. В результате будем иметь

$$\tau[\varphi_t(y_\varepsilon),\hat{y}_\varepsilon] \ge \overline{c}_1[\Phi(\hat{y}_\varepsilon)-\Phi(y_\varepsilon),1], \tag{3.15}$$

$$\tau[\varphi_t(y_\varepsilon),\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon] \ge c_2\|\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon\|_\alpha^\alpha. \tag{3.16}$$

Из условия (2.8) вытекает соотношение

$$[Ay_\varepsilon,y_\varepsilon] \ge \delta\|y_\varepsilon\|_{+p}^p - \mu, \tag{3.17}$$

Используя определение оператора β и неравенство Гёльдера, нетрудно проверить, что

$$\frac{1}{\varepsilon}[\beta\hat{y}_\varepsilon,\hat{y}_\varepsilon] = \frac{1}{\varepsilon}\|\hat{y}_\varepsilon^-\|_p^p \ge 0, \tag{3.18}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}[\beta\hat{y}_\varepsilon,\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon] \ge \frac{1}{p'\varepsilon}(\|\hat{y}_\varepsilon^-\|_p^p - \|y_\varepsilon^-\|_p^p). \tag{3.19}$$

Применяя неравенство (3.5), Гёльдера, Юнга и неравенства Фридрихса, оценим слагаемые правой части (3.12) следующим образом

$$[Ay_\varepsilon,\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon] \le c_0\|y_\varepsilon\|_{+p}^{p-1}\lambda_\alpha\|\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon\|_\alpha = I, \tag{3.20}$$

$$[f_{h\tau},y_\varepsilon] \le \frac{1}{p'\varepsilon_1^p}\tau\sum_{j=0}^{n}\|f_{h\tau,j}\|_{p'}^{p'} + \frac{\varepsilon_1^p}{p}(1+c_f^p)\|y_\varepsilon\|_{+p}^p, \tag{3.21}$$

$$[f_{h\tau}, \hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon] \leq \frac{1}{\alpha' \varepsilon_2^{\alpha'}} \sum_{j=0}^{n} \|f_{h\tau,j}\|_{p'}^{\alpha'} + \frac{\varepsilon_2^\alpha}{\alpha} (\|\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon\|_{+p}^\alpha + \|\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon\|_p^\alpha) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha' \varepsilon_2^{\alpha'}} \sum_{j=0}^{n} \|f_{h\tau,j}\|_{p'}^{\alpha'} + \frac{\varepsilon_2^\alpha}{\alpha} (1 + c_f) \lambda_\alpha^\alpha \|\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon\|_\alpha^\alpha, \tag{3.22}$$

где c_f — постоянная из разностного аналога неравенства Фридрихса.

Пусть $1 < p < \alpha$. Воспользовавшись ε-неравенством с показателем p и неравенством Юнга с показателем α/p, нетрудно доказать, что

$$I \leq \frac{c}{\varepsilon_3^{p'}} \|y_\varepsilon\|_{+p}^p + \frac{c \lambda_\alpha^\alpha \varepsilon_3^\alpha}{\alpha} \|\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon\|_\alpha^\alpha + c. \tag{3.23}$$

Подставляя (3.15)–(3.23) в (3.12) и суммируя полученное неравенство по t от 0 до t', где $t' \in \omega_\tau$, будем иметь

$$c_1 \|\hat{y}_\varepsilon(t')\|_\alpha^\alpha + \left\{ c_2 - c\tau \frac{\varepsilon_2^\alpha}{\alpha} (1 + c_f) \lambda_\alpha^\alpha - \frac{c\tau \lambda_\alpha^\alpha \varepsilon_3^\alpha}{\alpha} \right\} \sum_{t=0}^{t'} \tau \|\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon\|_\alpha^\alpha +$$

$$+ \left\{ \delta - c\varepsilon_1^p (1 + c_f^p) - \frac{c}{\varepsilon_3^{p'}} \right\} \sum_{t=0}^{t'} \tau \|y_\varepsilon\|_{+p}^p + \frac{\tau}{\varepsilon p} \|\hat{y}_\varepsilon^-(t')\|_p^p \leq c \|y_\varepsilon(0)\|_\alpha^\alpha +$$

$$+ \frac{c}{\varepsilon_1^{p'}} \sum_{t=0}^{t'} \tau \sum_{j=0}^{n} \|f_{h\tau,j}(t)\|_{p'}^{p'} + \frac{c}{\varepsilon_2^{\alpha'}} \sum_{t=0}^{t'} \tau \sum_{j=0}^{n} \|f_{h\tau,j}(t)\|_{p'}^{\alpha'} + c. \tag{3.24}$$

Условие (3.7) позволяет выбрать h, τ, ε, ε_1, ε_2, ε_3 так, чтобы выражения, стоящие в фигурных скобках левой части неравенства (3.24), были бы строго положительны и отделены от нуля постоянной, не зависящей от h, ε и τ. Поэтому из (3.24) следуют оценки (3.9)–(3.11).

Пусть теперь $p \geq \alpha$. Оценим I с помощью ε-неравенства с показателем α' следующим образом

$$I \leq c \|y_\varepsilon\|_{+p}^{p/\alpha'} \lambda_\alpha^{p/\alpha} \|y_\varepsilon\|_\alpha^{(p-\alpha)/\alpha} \|\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon\|_\alpha \leq \frac{c}{\alpha' \varepsilon_3^{\alpha'}} \|y_\varepsilon\|_{+p}^p + \frac{c\varepsilon_3^\alpha}{\alpha} \lambda_\alpha^p \|y_\varepsilon\|_\alpha^{p-\alpha} \|\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon\|_\alpha^\alpha. \tag{3.25}$$

Подставляя (3.15)–(3.22), (3.25) в (3.12) и суммируя полученное неравенство по t от 0 до t', $t' \in \overline{\omega}_\tau$, будем иметь

$$\sum_{t=0}^{t'} \tau \|\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon\|_\alpha^\alpha \{ c_2 - c\tau \varepsilon_2^\alpha (1 + c_f) \lambda_\alpha^\alpha - c\tau \lambda_\alpha^p \varepsilon_3^\alpha \|y_\varepsilon(t)\|_\alpha^{p-\alpha} \} +$$

$$+ c_1 \|\hat{y}_\varepsilon(t'))\|_\alpha^\alpha + \left\{ \delta - c\varepsilon_1^p - \frac{c}{\varepsilon_3^{\alpha'}} \right\} \sum_{t=0}^{t'} \tau \|y_\varepsilon(t)\|_{+p}^p + \frac{\tau}{\varepsilon p} \|\hat{y}_\varepsilon^-(t')\|_p^p \leq$$

$$\leq \frac{c}{\varepsilon_1^{p'}} \sum_{t=0}^{t'} \tau \sum_{j=0}^{n} \|f_{h\tau,j}(t)\|_{p'}^{p'} + \frac{c}{\varepsilon_2^{\alpha'}} \sum_{t=0}^{t'} \tau \sum_{j=0}^{n} \|f_{h\tau,j}(t)\|_{p'}^{\alpha'} + c \|y_\varepsilon(0)\|_\alpha^\alpha. \tag{3.26}$$

Докажем сначала, что из (3.26) следует оценка

$$\|y_\varepsilon(t')\|_\alpha^\alpha \leq c \left(\sum_{t=0}^{T} \tau \sum_{j=0}^{n} \|f_{h\tau,j}(t)\|_{p'}^{p'} + \sum_{t=0}^{T} \tau \sum_{j=0}^{n} \|f_{h\tau,j}(t)\|_{p'}^{\alpha'} + \right.$$

$$\left. + \|y_\varepsilon(0)\|_\alpha^\alpha + 1 \right) = m^\alpha, \quad \forall\ t' \in \omega_\tau. \tag{3.27}$$

Действительно, при $t' = 0$ оценка (3.27) выполняется. Предположим, что (3.27) справедлива для всех $t' \le t_1$ $(t', t_1 \in \omega_\tau)$. Докажем, что (3.27) имеет место при $t' = t_1 + \tau$. Для этого, используя соотношение $\|y_\varepsilon(t)\|_\alpha^\alpha \le m^\alpha$ $\forall t \le t_1$, запишем неравенство (3.26) при $t' = t_1 + \tau$.

$$\sum_{t=0}^{t_1+\tau} \tau \|\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon\|_\alpha^\alpha \{c_2 - c\tau\varepsilon_2^\alpha(1+c_f)\lambda_\alpha^\alpha - c\tau\lambda_\alpha^p \varepsilon_3^\alpha m^{p-\alpha}\} +$$

$$+c_1\|\hat{y}_\varepsilon(t_1+\tau)\|_\alpha^\alpha + \left\{\delta - c\varepsilon_1^p - \frac{c}{\varepsilon_3^{\alpha'}}\right\} \sum_{t=0}^{t_1+\tau} \tau \|y_\varepsilon(t)\|_{+p}^p + \frac{\tau}{\varepsilon p}\|\hat{y}_\varepsilon^-(t_1+\tau)\|_p^p \le$$

$$\le \frac{c}{\varepsilon_1^{p'}} \sum_{t=0}^{t_1+\tau} \tau \sum_{j=0}^{n} \|f_{h\tau,j}(t)\|_{p'}^{p'} + \frac{c}{\varepsilon_2^{\alpha'}} \sum_{t=0}^{t_1+\tau} \tau \sum_{j=0}^{n} \|f_{h\tau,j}(t)\|_{p'}^{\alpha'} + c\|y_\varepsilon(0)\|_\alpha^\alpha.$$

Условие (3.8) и произвольный выбор h, τ, ε, ε_1, ε_2, ε_3 обеспечивают выполнение соотношений

$$c_2 - c\tau\varepsilon_2^\alpha(1+c_f)\lambda_\alpha^\alpha - c\tau\lambda_\alpha^p\varepsilon_3^\alpha m^{p-\alpha} \ge \delta_1 > 0,$$

$$\delta - c\varepsilon_1^p - c/\varepsilon_3^{\alpha'} \ge \delta_2 > 0.$$

Следовательно, неравенство (3.27) справедливо при $t' = t_1 + \tau$, а по индукции и при любом $t' \in \omega_\tau$. Из (3.26) и (3.27) следуют оценки (3.9)–(3.11). Лемма 3.1 доказана. □

Лемма 3.2. *Пусть справедливы соотношения* (3.9), (3.10), $u_0 \in L_\alpha(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}(\Omega)$, $u_0 \ge 0$ *п. в. в* Ω, $f \in L_{p'}(Q_T)$. *Тогда при* τ, h, ε, *удовлетворяющих* (3.3), *для решения задачи* (3.2) *имеет место следующая априорная оценка*

$$\frac{1}{\varepsilon^{p'}} \sum_{t=0}^{T-\tau} \|\hat{y}_\varepsilon^-\|_p^p \le \text{const}\,. \tag{3.28}$$

Доказательство. Умножим (3.2) скалярно в H на $-\tau b\hat{y}_\varepsilon^- + \tau\bar{b}(-\hat{y}_\varepsilon^- + y_\varepsilon^-)$, где $b > 0$, $\bar{b} > 0$ — произвольные постоянные, просуммируем полученное тождество по t от 0 до $T-\tau$ и в результате будем иметь

$$b\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau[\varphi_t(y_\varepsilon), -\hat{y}_\varepsilon^-] + \bar{b}\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau[\varphi_t(y_\varepsilon), -\hat{y}_\varepsilon^- + y_\varepsilon^-] + \bar{b}\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau[Ay_\varepsilon, -y_\varepsilon^-] +$$

$$+b\sum_{t=0}^{T-\tau} \frac{\tau}{\varepsilon}[\beta\hat{y}_\varepsilon, -\hat{y}_\varepsilon^-] + \bar{b}\sum_{t=0}^{T-\tau} \frac{\tau}{\varepsilon}[\beta\hat{y}_\varepsilon, -\hat{y}_\varepsilon^- + y_\varepsilon^-] = \bar{b}\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau[f_{h\tau}, -y_\varepsilon^-] +$$

$$-(b+\bar{b})\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau[Ay_\varepsilon, -\hat{y}_\varepsilon^- + y_\varepsilon^-] + (b+\bar{b})\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau[f_{h\tau}, -\hat{y}_\varepsilon^- + y_\varepsilon^-]. \tag{3.29}$$

Далее понадобятся вспомогательные неравенства

$$(\varphi(\hat{y}_\varepsilon) - \varphi(y_\varepsilon))(-\hat{y}_\varepsilon^-) \ge \Phi(-\hat{y}_\varepsilon^-) - \Phi(-y_\varepsilon^-). \tag{3.30}$$

$$(\varphi(\hat{y}_\varepsilon) - \varphi(y_\varepsilon))(-\hat{y}_\varepsilon^- + y_\varepsilon^-) \ge (\varphi(-\hat{y}_\varepsilon^-) - \varphi(-y_\varepsilon^-))(-\hat{y}_\varepsilon^- + y_\varepsilon^-), \tag{3.31}$$

справедливость которых нетрудно проверить, учитывая соотношения $\varphi(\xi) = \varphi(\xi^+) + \varphi(-\xi^-)$ (поскольку $\varphi(0) = 0$,) $\varphi(\hat{y}_\varepsilon^+)\hat{y}_\varepsilon^- = 0$, $\varphi(y_\varepsilon^+)\hat{y}_\varepsilon^- \ge 0$ и неравенство (3.13).

Воспользовавшись (3.30), равенством $\Phi(-y_{0\varepsilon}^-) = 0$ (по предположению $y_{0\varepsilon} \ge 0$) и неотрицательностью функционала Φ, получим

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau[\varphi_t(y_\varepsilon), -\hat{y}_\varepsilon^-] \ge \Phi(-y_\varepsilon^-(T)) - \Phi(-y_{0\varepsilon}^-) \ge 0. \tag{3.32}$$

Из (3.31) и (3.14) следует, что

$$J = \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau[\varphi_t(y_\varepsilon), -\hat{y}_\varepsilon^- + y_\varepsilon^-] \geq c \sum_{t=0}^{T-\tau} \| -\hat{y}_\varepsilon^- + y_\varepsilon^- \|_\alpha^\alpha. \tag{3.33}$$

Учитывая очевидное неравенство $\partial_{r_i}(y_\varepsilon)\partial_{r_i}(-y_\varepsilon^-) \geq 0 \ \forall r_i$ и условие (3.1), оценим снизу третье слагаемое левой части (3.29)

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \sum_{i=1}^{n} [a_i(y_\varepsilon) g_i(x, \nabla y_\varepsilon) \partial_{r_i}(y_\varepsilon) \partial_{r_i}(-y_\varepsilon^-), 1] \geq 0. \tag{3.34}$$

Далее, из определения оператора β и неотрицательности $y_{0\varepsilon}$ следует

$$[\beta \hat{y}_\varepsilon, -\hat{y}_\varepsilon^-] = \|\hat{y}_\varepsilon^-\|_p^p, \tag{3.35}$$

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau[\beta \hat{y}_\varepsilon, -\hat{y}_\varepsilon^- + y_\varepsilon^-] \geq \frac{\tau}{\varepsilon p'} (\|\hat{y}_\varepsilon^-(T)\|_p^p - \|y_{0\varepsilon}^-\|_p^p) \geq 0. \tag{3.36}$$

Подставляя (3.32)–(3.36) в (3.29), умножая полученное неравенство на $1/\varepsilon^{1/(p-1)}$ и применяя ε-неравенство и неравенства Гёльдера с показателем p, получим

$$\frac{1}{\varepsilon^{p'}} \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau(1 - c\sigma_1^p) \|\hat{y}_\varepsilon^-\|_p^p + \frac{1}{\varepsilon^{1/(p-1)}} \sum_{t=0}^{T-\tau} \| -\hat{y}_\varepsilon^- + y_\varepsilon^- \|_\alpha^\alpha \leq \frac{c_2}{\sigma_2^{p'}} \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|y_\varepsilon\|_{+p}^p +$$
$$+ \frac{c}{\sigma_1^{p'}} \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|f_{h\tau}\|_{p'}^{p'} + c\sigma_2^p \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \frac{1}{\varepsilon^{p'}} \lambda_\alpha^p \| -\hat{y}_\varepsilon^- + y_\varepsilon^- \|_\alpha^p. \tag{3.37}$$

Пусть $1 < p < \alpha$. Оценивая последнее слагаемое правой части с помощью неравенства Гёльдера с показателем α/p, нетрудно доказать, что

$$J' = \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \frac{1}{\varepsilon^{p'}} \lambda_\alpha^p \| -\hat{y}_\varepsilon^- + y_\varepsilon^- \|_\alpha^p \leq \frac{\tau \lambda_\alpha^\alpha}{\varepsilon^{\alpha/(p-1)}} \sum_{t=0}^{T-\tau} \| -\hat{y}_\varepsilon^- + y_\varepsilon^- \|_\alpha^\alpha + c. \tag{3.38}$$

При $p \geq \alpha$, воспользовавшись (3.9), будем иметь

$$J' \leq \| -\hat{y}_\varepsilon^- + y_\varepsilon^- \|_\alpha^{p-\alpha} \frac{\tau \lambda_\alpha^p}{\varepsilon^{p'}} \sum_{t=0}^{T-\tau} \| -\hat{y}_\varepsilon^- + y_\varepsilon^- \|_\alpha^\alpha \leq c \frac{\tau \lambda_\alpha^p}{\varepsilon^{p'}} \sum_{t=0}^{T-\tau} \| -\hat{y}_\varepsilon^- + y_\varepsilon^- \|_\alpha^\alpha. \tag{3.39}$$

Подставляя (3.38) или (3.39) в (3.37), используя условие (3.3) и произвольность σ_1, σ_2, нетрудно убедиться в справедливости оценки (3.28). Лемма 3.2 доказана. □

Лемма 3.3. *Пусть справедливы соотношения* (3.10), (3.28). *Тогда для решения р. с.* (3.2) *имеют место следующие априорные оценки*

$$J_1 = \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|\varphi_t(y_\varepsilon)\|_{-p'}^{p'} \leq \text{const}, \tag{3.40}$$

$$J_2 = \frac{1}{k\tau} \sum_{t=0}^{T-k\tau} \tau[\varphi(y_\varepsilon(t + k\tau)) - \varphi(y_\varepsilon(t)), y_\varepsilon(t + k\tau) - y_\varepsilon(t)] \leq \text{const} \tag{3.41}$$

$$\forall k \in \{\, 1, 2, \dots, N\}.$$

Доказательство. Из равенства (3.2) следует, что

$$J_1 \leq c\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\sum_{j=0}^{n}\|f_{h\tau,j}\|_{-p'}^{p'} + c\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|Ay_\varepsilon\|_{-p'}^{p'} + \frac{c}{\varepsilon^{p'}}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|\beta\hat{y}_\varepsilon\|_{-p'}^{p'}.$$

Воспользовавшись ограниченностью оператора A, теоремой вложения, определением оператора β и априорными оценками (3.10), (3.28), нетрудно получить (3.40).

Докажем далее справедливость оценки (3.41). Для этого просуммируем (3.2) по t от $\overline{t}$ до $\overline{t}+(k-1)\tau$, где $\overline{t}$ — любое из $\omega_\tau\cap[0,T-(k-1)\tau]$, полученное равенство умножим скалярно в H на $\tau(y_\varepsilon(\overline{t}+k\tau)-y_\varepsilon(\overline{t}))/k$, и результат просуммируем по $\overline{t}$ от 0 до $T-k\tau$, в итоге будем иметь

$$\begin{aligned} J_2 = &-\frac{1}{k}\sum_{\overline{t}=0}^{T-k\tau}\sum_{t=\overline{t}}^{\overline{t}+(k-1)\tau}\tau[Ay_\varepsilon(t), y_\varepsilon(\overline{t}+k\tau)-y_\varepsilon(\overline{t})] + \\ &+\frac{1}{k}\sum_{\overline{t}=0}^{T-k\tau}\sum_{t=\overline{t}}^{\overline{t}+(k-1)\tau}\frac{\tau}{\varepsilon}[\beta\hat{y}_\varepsilon, y_\varepsilon(\overline{t}+k\tau)-y_\varepsilon(\overline{t})] + \\ &+\frac{1}{k}\sum_{\overline{t}=0}^{T-k\tau}\sum_{t=\overline{t}}^{\overline{t}+(k-1)\tau}\tau[f, y_\varepsilon(\overline{t}+k\tau)-y_\varepsilon(\overline{t})]. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Применяя неравенства Гёльдера и Юнга в правой части (3.42), получим

$$J_2 \leq c\sum_{t=0}^{T}\tau\|y_\varepsilon(t)\|_{+p}^{p} + c\sum_{t=0}^{T}\tau\sum_{j=0}^{n}\|f_{h\tau,j}(t)\|_{p'}^{p'} + c\sum_{t=0}^{T}\tau\|\frac{1}{\varepsilon}\beta\hat{y}_\varepsilon\|_{-p'}^{p'}.$$

Из последнего неравенства, теоремы вложения, (3.10) и (3.28) следует (3.41). Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.1. Априорные оценки (3.9), (3.10), (3.40), (3.41), условия (2.3), (2.6), (2.7) на функции φ, a_i, k_i ($i=1,\ldots,n$) и лемма 1.9 из [4], позволяют утверждать (см. также [1]), что существуют элемент $u\in L_\infty(0,T;L_\alpha(\Omega))\cap L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}(\Omega))$ и подпоследовательность $\{\tau,h,\varepsilon\}$ такие, что при $\tau,\varepsilon,\overline{h}\to 0$

$$\Pi_\tau^{\mp}y_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ в } L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}(\Omega)), \tag{3.43}$$
$$\Pi_\tau^{\mp}y_\varepsilon * \rightharpoonup u \text{ в } L_\infty(0,T;L_\alpha(\Omega)), \tag{3.44}$$
$$\Pi_\tau^{\mp}\partial_{r_i}y_\varepsilon \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ в } L_p(Q_T) \quad \forall i=1,\ldots,n, \tag{3.45}$$
$$\Pi_\tau^{\mp}\varphi(y_\varepsilon) * \rightharpoonup \varphi(u) \text{ в } L_\infty(0,T;L_{\alpha'}(\Omega)), \tag{3.46}$$
$$\Pi_\tau^{\mp}\varphi_t(y_\varepsilon) \rightharpoonup \frac{\partial\varphi(u)}{\partial t} \text{ в } L_{p'}(0,T;W_{p'}^{-1}(\Omega)), \tag{3.47}$$
$$\Pi_\tau^{\mp}y_\varepsilon \to u \text{ п. в. в } Q_T, \tag{3.48}$$
$$\Pi_\tau^{\mp}a_i(x,y_\varepsilon) \to a_i(x,u) \text{ п. в. в } Q_T, \tag{3.49}$$
$$\Pi_\tau^{\mp}k_i(x,y_\varepsilon) \rightharpoonup K_i \text{ в } L_{p'}(Q_T). \tag{3.50}$$

Здесь символы "$\rightharpoonup$" и "$* \rightharpoonup$" означают слабую и $*$-слабую сходимости.

Покажем, что функция u, определенная (3.43)–(3.50), принадлежит K. Действительно, из соотношений (3.48) и (3.28), нетрудно получить

$$\Pi_\tau^{\mp}y_\varepsilon^{-} \to u^{-} \text{ п. в. в } \quad Q_T, \tag{3.51}$$
$$\Pi_\tau^{\mp}\hat{y}_\varepsilon^{-} \rightharpoonup 0 \text{ в } L_{p'}(Q_T). \tag{3.52}$$

Следовательно, (см. [5], лемма 1.19) $u^- = 0$, т.е. $u \in K$.

Осталось доказать, что функция u удовлетворяет неравенству (1.1). Для этого умножим (3.2) скалярно в H на $\tau(\hat{y}_\varepsilon - v)$, где v — снос в точки сетки $\omega_\tau \times \omega_h$ функции $\overline{v} \in C^\infty(0,T; C_0^\infty(\Omega))$, $\overline{v}(x,T) = 0$, $\overline{v} \geq 0$. Воспользовавшись восполнением $\Pi_\tau^\mp$, запишем полученное равенство $\forall t \in [0,T]$ и результат проинтегрируем по t от 0 до t'.

$$\int_0^{t'} \int_\Omega \Pi_\tau^- \varphi_t(y_\varepsilon) \Pi_\tau^+ \hat{y}_\varepsilon \, dx \, dt - \int_0^{t'} \int_\Omega \Pi_\tau^- \varphi_t(y_\varepsilon) \Pi_\tau^+ \hat{v} \, dx \, dt +$$
$$+ \int_0^{t'} \langle A(\Pi_\tau^\mp y_\varepsilon, \Pi_\tau^\mp \nabla y_\varepsilon), \Pi_\tau^\mp (\hat{y}_\varepsilon - \hat{v}) \rangle dt =$$
$$= \int_0^{t'} \langle \Pi_\tau^\mp f_\tau, \Pi_\tau^\mp (\hat{y}_\varepsilon - \hat{v}) \rangle dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{t'} \langle -\Pi_\tau^\mp \beta \hat{y}_\varepsilon, \Pi_\tau^\mp (\hat{y}_\varepsilon - \hat{v}) \rangle dt. \tag{3.53}$$

Поскольку β — монотонный оператор и $\beta \hat{v} = 0$, то

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{t'} \langle -\Pi_\tau^\mp \beta \hat{y}_\varepsilon, \Pi_\tau^\mp (\hat{y}_\varepsilon - \hat{v}) \rangle dt \leq 0. \tag{3.54}$$

Следовательно,

$$\int_0^{t'} \int_\Omega \Pi_\tau^- \varphi_t(y_\varepsilon) \Pi_\tau^+ \hat{y}_\varepsilon \, dx \, dt - \int_0^{t'} \int_\Omega \Pi_\tau^- \varphi_t(y_\varepsilon) \Pi_\tau^+ \hat{v} \, dx \, dt +$$
$$+ \int_0^{t'} \langle A(\Pi_\tau^\mp y_\varepsilon, \Pi_\tau^\mp \nabla y_\varepsilon), \Pi_\tau^\mp (\hat{y}_\varepsilon - \hat{v}) \rangle dt \leq$$
$$\leq \int_0^{t'} \langle \Pi_\tau^\mp f_\tau, \Pi_\tau^\mp (\hat{y}_\varepsilon - \hat{v}) \rangle dt. \tag{3.55}$$

Нетрудно доказать, что

$$\frac{1}{\tau} \int_{t'-\tau}^{t'} \int_\Omega \Phi(\Pi_\tau^+ y_\varepsilon) dx \, dt \geq \int_\Omega \Phi(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t')) dx,$$

где $\Lambda_\tau y_\varepsilon$ — линейное восполнение функции y_ε по t. Воспользовавшись последним неравенством и (3.13), получим

$$\int_0^{t'} \int_\Omega \Pi_\tau^- \varphi_t(y_\varepsilon) \Pi_\tau^+ \hat{y}_\varepsilon \, dx \, dt \geq \int_0^{t'} \int_\Omega (\Phi(\Pi_\tau^+ \hat{y}_\varepsilon) - \Phi(\Pi_\tau^+ y_\varepsilon)) dx \, dt \geq$$
$$\geq \int_\Omega \Phi(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t')) dx - \int_\Omega \Phi(y_{0\varepsilon}(x)) dx. \tag{3.56}$$

Далее отметим, что из (2.9) вытекает соотношение

$$\int_0^{t'} \langle A(\Pi_\tau^\mp y_\varepsilon, \Pi_\tau^\mp \nabla y_\varepsilon), \Pi_\tau^\mp (\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon + y_\varepsilon - \hat{v}) \rangle dt \geq$$
$$\geq \int_0^{t'} \langle A(\Pi_\tau^\mp y_\varepsilon, \Pi_\tau^\mp \nabla \hat{v}), \Pi_\tau^\mp (\hat{y}_\varepsilon - \hat{v}) \rangle dt +$$
$$+ \int_0^{t'} \langle A(\Pi_\tau^\mp y_\varepsilon, \Pi_\tau^\mp \nabla y_\varepsilon), \Pi_\tau^\mp (\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon) \rangle dt =$$
$$= \int_0^{t'} \langle A(\Pi_\tau^\mp y_\varepsilon, \Pi_\tau^\mp \nabla \hat{v}), \Pi_\tau^\mp (\hat{y}_\varepsilon - \hat{v}) \rangle dt + I. \tag{3.57}$$

Подставляя (3.56)–(3.57) в (3.55), будем иметь

$$\int_\Omega \Phi(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t'))dx - \int_\Omega \Phi(y_{0\varepsilon}(x))dx + \int_0^{t'} \int_\Omega \Pi_\tau^- \varphi_t(y_\varepsilon)\Pi_\tau^+ \hat{v}\, dx\, dt +$$

$$+ \int_0^{t'} \langle A(\Pi_\tau^\mp y_\varepsilon, \Pi_\tau^\mp \nabla \hat{v}), \Pi_\tau^\mp (y_\varepsilon - \hat{v})\rangle dt \le \int_0^{t'} \langle \Pi_\tau^\mp f_\tau, \Pi_\tau^\mp (\hat{y}_\varepsilon - \hat{v})\rangle dt + |I|. \tag{3.58}$$

Докажем соотношение

$$\varlimsup_{\tau,\overline{h},\varepsilon\to 0} |I| = 0. \tag{3.59}$$

Используя неравенство Гёльдера с показателем α и (3.5), получим

$$|I| \le c_0 \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau^2 \|y_\varepsilon\|_{+p}^{p-1} \|(y_\varepsilon)_t\|_{+p} \le$$

$$\le c_0 \lambda_\alpha \tau^{1/\alpha} \left(\sum_{t=0}^{T-\tau} \|\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon\|_\alpha^\alpha \right)^{1/\alpha} \left(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|y_\varepsilon(t)\|_{+p}^{\alpha'(p-1)} \right)^{1/\alpha'}. \tag{3.60}$$

Если $1 < p < \alpha$, то, применяя неравенство Гёльдера с показателем p'/α' к последнему сомножителю, будем иметь

$$|I| \le c\lambda_\alpha \tau^{1/\alpha} \left(\sum_{t=0}^{T-\tau} \|\hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon\|_\alpha^\alpha \right)^{1/\alpha} \left(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|y_\varepsilon(t)\|_{+p}^{p} \right)^{(p-1)/p}.$$

Из априорных оценок (3.10)–(3.11), последнего неравенства и условия (3.4), следует (3.59).

Пусть $p \ge \alpha$. Используя неравенство Гёльдера и (3.5), запишем

$$\left(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|y_\varepsilon(t)\|_{+p}^{\alpha'(p-1)} \right)^{1/\alpha'} = \left(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|y_\varepsilon(t)\|_{+p}^{p} \|y_\varepsilon(t)\|_{+p}^{\alpha'(p-1)-p} \right)^{1/\alpha'} \le$$

$$\le \lambda_\alpha^{p/\alpha - 1} \left(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|y_\varepsilon(t)\|_{+p}^{p} \|y_\varepsilon(t)\|_{\alpha}^{\alpha'(p-1)-p} \right)^{1/\alpha'} \le$$

$$= \lambda_\alpha^{p/\alpha - 1} \max_{t' \in \overline{\omega}_\tau} \|y_\varepsilon(t')\|_\alpha^{p/\alpha - 1} \left(\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|y_\varepsilon(t)\|_{+p}^{p} \right)^{1/\alpha'}. \tag{3.61}$$

Учитывая оценки (3.9)–(3.10), из (3.60) и (3.61) будем иметь $|I| \le c(\tau\lambda_\alpha^p)^{1/\alpha}$. По условию (3.4) $\tau\lambda_\alpha^p \to 0$, следовательно, соотношение (3.59) имеет место и для $p \ge \alpha$.

Проинтегрируем (3.58) по t' от $T-\lambda$ до T (λ — произвольное положительное число) и затем, используя предельные соотношения (3.43)–(3.50), перейдем в полученном неравенстве к пределу при $\tau, \overline{h}, \varepsilon \to 0$. В результате получим

$$\varliminf_{\tau,\overline{h},\varepsilon\to 0} \int_{T-\lambda}^T \int_\Omega \Phi(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t'))dx\, dt' - \int_\Omega \Phi(u_0(x))dx \le$$

$$\le \int_{T-\lambda}^T \int_0^{t'} \int_\Omega f(u - \overline{v})dx\, dt\, dt' + \int_{T-\lambda}^T \int_0^{t'} \left\langle \frac{\partial \varphi(u)}{\partial t}, \overline{v} \right\rangle dt\, dt' -$$

$$- \int_{T-\lambda}^T \int_0^{t'} \int_\Omega \sum_{i=0}^n a_i(x,u) k_i(\nabla \overline{v}) \frac{\partial (u - \overline{v})}{\partial x_i} dx\, dt\, dt' = J(t'). \tag{3.62}$$

Очевидно, что (3.62) будет справедливо для произвольных функций $\overline{v}$ из K.

Далее заметим, что свойство (2.4) обеспечивает слабую полунепрерывность снизу функционала $\int_{T-\lambda}^{T}\int_{\Omega}\Phi(w)dx\,dt$ на $L_\infty(0,T;L_{\alpha'}(\Omega))$. Следовательно,

$$\varliminf_{\tau,\overline{h},\varepsilon\to 0}\int_{T-\lambda}^{T}\int_{\Omega}\Phi(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t'))dx\,dt' \geq \int_{T-\lambda}^{T}\int_{\Omega}\Phi(u(t'))dx\,dt'. \tag{3.63}$$

Подставим (3.63) в (3.62), затем умножим полученное неравенство на $1/\lambda$ и, переходя к пределу при $\lambda\to 0$, будем иметь

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_{\Omega}\Phi(u(t'))dx\,dt' - \int_{\Omega}\Phi(u_0(x))dx \leq \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}J(t')dt'. \tag{3.64}$$

Воспользовавшись соотношением $\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}J(t')dt' = J(T)$ и равенством (см. [6], лемма 5)

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\int_{\Omega}\Phi(u(t))dx\,dt = \int_0^T\left\langle\frac{\partial\varphi(u)}{\partial t},u\right\rangle dt+$$

$$+\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}\int_{\Omega}\Phi(u(t))dx\,dt,$$

из (3.64) нетрудно получить

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}\int_{\Omega}\Phi(u(t))dx\,dt - \int_{\Omega}\Phi(u_0)dx + \int_0^T\left\langle\frac{\partial\varphi(u)}{\partial t},u\right\rangle dt \leq J(T). \tag{3.65}$$

Из (3.65) и неравенства (см. [6], с.86)

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}\int_{\Omega}\Phi(u(t))dx\,dt - \int_{\Omega}\Phi(u_0)dx \geq 0,$$

следует, что функция u удовлетворяет соотношению

$$\int_0^T\left\langle\frac{\partial\varphi(u)}{\partial t},v-u\right\rangle > dt + \int_0^T\langle A(u,\nabla v),v-u\rangle dt \geq \int_0^T\langle f,v-u\rangle dt, \quad \forall v\in K. \tag{3.66}$$

Как показано в [1], неравенства (3.66) и (1.1) эквивалентны. Теорема 3.1 доказана.

4. Исследование сходимости явной разностной схемы с сильной регуляризацией

В этом параграфе рассматривается р. с. (3.2) с оператором штрафа вида

$$[\beta y,w] = \frac{1}{2^n}\sum_r\sum_{x\in\omega_r}\sum_{i=1}^{n}\triangle h|\partial_{r_i}(-y^-)|^{p-2}\partial_{r_i}(-y^-)\partial_{r_i}w \quad \forall w,y\in H. \tag{4.1}$$

Исследуем сходимость этой схемы для оператора A общего вида.

Теорема 4.1. [1] *Пусть* $\alpha\geq 2$, *функции* φ, a_i, k_i $(i=1,\ldots,n)$ *удовлетворяют условиям* (2.2)–(2.10), $u_0\in L_\alpha(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}(\Omega)$, $u_0\geq 0$, $f\in L_{p'}(Q_T)$. *Тогда при любых* τ, h, *удовлетворяющих соотношениям* (3.4), (3.7)–(3.8), *существует подпоследовательность восполнений решения р. с.* (3.2), (4.1), *сходящаяся к решению вариационной задачи* (1.1), (2.1) (λ_α — *постоянная из неравенства* (3.5)).

[1]Аналогичный результат при дополнительном условии на функцию φ : $(\varphi^{-1})'(\xi)\geq c\mid\xi\mid^{(2-\alpha)/(\alpha-1)}$ имеет место и в случае $\alpha<2$.

Доказательство. Заметим, что оно лишь фрагментарно отличается от доказательства теоремы 3.1. Так, для решения р. с. (3.2), (4.1) будут справедливы априорные оценки (3.9)–(3.11), (3.40)–(3.41). Оценку (3.28) заменяет

$$\frac{1}{\varepsilon^{p'}}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|\hat{y}_\varepsilon^-\|_{+p}^p \ge \text{const}\,. \tag{4.2}$$

Доказательство утверждений (3.9)–(3.11), (3.40)–(3.41) повторяет доказательство лемм 3.1, 3.3. При этом нужно учитывать соотношения

$$\partial_{r_i}y_\varepsilon \times \partial_{r_i}(-y_\varepsilon^-) \ge 0, \quad [\beta\hat{y}_\varepsilon, \hat{y}_\varepsilon] \ge 0, \quad [\beta\hat{y}_\varepsilon, \hat{y}_\varepsilon - y_\varepsilon] \ge \frac{1}{p'}[\|\hat{y}_\varepsilon^-\|_{+p}^p - \|y_\varepsilon^-\|_{+p}^p, 1].$$

Докажем априорную оценку (4.2). Для этого умножим (3.2) скалярно в H на $-\tau\hat{y}_\varepsilon^-/\varepsilon^{1/(p-1)}$, просуммируем полученное тождество по t от 0 до $T-\tau$, в результате будем иметь

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\frac{1}{\varepsilon^{1/(p-1)}}[\varphi_t(y_\varepsilon), -\hat{y}_\varepsilon^-] + \sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\frac{1}{\varepsilon^{p'}}[\beta\hat{y}_\varepsilon, -\hat{y}_\varepsilon^-] = \\ = -\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\frac{1}{\varepsilon^{1/(p-1)}}[Ay_\varepsilon, -\hat{y}_\varepsilon^-] + \sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\frac{1}{\varepsilon^{1/(p-1)}}[f_{h\tau}, -\hat{y}_\varepsilon^-].\end{aligned} \tag{4.3}$$

Для оценки снизу левой части (4.3) воспользуемся неравенством (3.32) и определением оператора β, а правую часть оценим с помощью неравенства Гёльдера с показателем p и ε-неравенства. В результате получим

$$\frac{1}{\varepsilon^{p'}}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|\hat{y}_\varepsilon^-\|_{+p}^p\left\{1-\frac{\sigma_1^p}{p}-\frac{\sigma_2^p}{p}\right\} \le \frac{1}{p'\sigma_1^{p'}}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\sum_{j=0}^{n}\|f_{h\tau,j}\|_{p'}^{p'} + \frac{1}{p'\sigma_2^{p'}}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y_\varepsilon\|_{+p}^p.$$

Из последнего неравенства, (3.10) и произвольности постоянных σ_1, σ_2 следует (4.2).

Дальнейшее доказательство, за небольшими исключениями, повторяет доказательство теоремы 3.1. □

Литература

1. Ляшко А.Д., Майорова М.Е., Павлова М.Ф. *О разрешимости одного вариационного неравенства теории нелинейной нестационарной фильтрации* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – №7 – С. 958–965.
2. Майорова М.Е., Павлова М.Ф. *О явных разностных схемах для нелинейного уравнения типа нестационарной фильтрации.* – Казанск. ун.-т. – Казань, 1995. – Деп. в ВИНИТИ 28.03.95, №836-В95.
3. Павлова М.Ф. *Исследования уравнений нестационарной нелинейной фильтрации* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – №8. – С.1436-1446.
4. Alt H.W., Luckhaus S. *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations* // Math. Z. – 1983. – Bd. 183. – №3. – S.311-341.
5. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения* – М.: Мир, 1978. 336 с.
6. Павлова М.Ф., Тимербаев М.Р. *О разрешимости одного нелинейного уравнения типа нестационарной фильтрации* // Матем. моделир. – 1992. – Т. 4. – №4. – С.74-88.

Казанский государственный университет

Поступила
05.07.1996