Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

"Казанский (Приволжский) Федеральный Университет"

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Специальность: 010100 — математика

Специализация:01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

"Алгебраические свойства матриц цепей Маркова"

Работа завершена:
«___»_____2014 г._____(Аипова Р. Ф.)

Работа допущена к защите:
Научный руководитель:
кандидат физ.-мат наук, доцент
«___»_____2014 г._____(Альпин Ю. А.)
Заведующий кафедрой:
доктор физ.-мат наук, профессор
«___»_____2014 г._____(Арсланов М. М.)

Казань — 2014

Оглавление

1. Введение

Матрица A называется *неотрицательной* (пишется $A \geq 0$), если её элементы — вещественные неотрицательные числа. Матрица с положительными элементами называется *положительной* (пишется $A > 0$). Сумма и произведение неотрицательных (положительных) матриц являются, очевидно, неотрицательными (положительными) матрицами. Важным классом неотрицательных матриц являются примитивные матрицы. Матрица $A \geq 0$ называется *примитивной*, если существует показатель k, при котором $A^k > 0$.

В данной работе мы будем рассматривать *стохастические* матрицы. Представим себе случайный процесс, состояния которого принадлежат множеству $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ и изменяются по следующему закону: если в некоторый момент времени процесс находится в состоянии i, то в следующий момент он переходит в состояние j с вероятностью, которая зависит лишь от i и j и не зависит от предыдущих состояний. Такие процессы называются марковскими цепями и описываются стохастическими матрицами.

Неотрицательная матрица $P = (p_{ij})$ порядка n называется стохастической, если

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \ i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Число p_{ij} понимается как вероятность перехода цепи из состояния i в состояние j за один шаг. Вероятности перехода за k шагов определяются матрицей $P^k = (p_{ij}^{(k)})$. Одна из основных задач теории цепей Маркова - задача об асимптотическом поведении переходных вероятностей $p_{ij}^{(k)}$ при $k \to \infty$. Таким образом, изучение асимптотического поведения предельных вероятностей сводится к изучению степеней стохастической матрицы. Приведём известную теорему (см., например, [1,2])

Теорема 1. *Если стохастическая матрица P примитивна, то только в этом случае, существуют положительные пределы*

$$\lim_{k \to \infty} p_{ij}^{(k)} = \pi_j, \tag{2}$$

не зависящие от i.

Согласно теореме 1, если P примитивна, то последовательность P^k

сходится[1] при $k \to \infty$ к матрице Π, каждая строка которой равна

$$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n), \text{то есть } \Pi = \mathbf{1}\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (\pi_1, \ldots, \pi_n).$$

Матрица Π тоже, конечно, является стохастической. Строку π — *стохастический вектор* — будем называть *предельным распределением* вероятностей состояний.

Существует замечательная формула для предельных вероятностей, использующая миноры диагональных элементов матрицы $I - P$:

$$\pi_j = \frac{(I-P)_{jj}}{\sum\limits_{l=1}^{n}(I-P)_{ll}}, \ j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Эта формула доказывается в книге [1], краткое доказательство содержится в статье [2]. В параграфах 3, 4 и 5 мы изложим подробное доказательство, используя средства теории графов и линейной алгебры в пределах университетского курса. На самом деле наш вывод даст несколько больше: формула (3) определяет *стационарное* распределение вероятностей состояний для цепи Маркова, если это распределение единственно. Напомним, что распределение вероятностей

$$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n), \ \pi_j \geq 0, \ \sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1$$

называется стационарным, если

$$\pi P = \pi. \tag{4}$$

С точки зрения линейной алгебры строка π есть собственный вектор стохастической матрицы P, отвечающий собственному значению 1. Такие векторы называются *неподвижными* векторами для матрицы P. Предельное распределение в случае примитивной матрицы P является единственным стационарным распределением. Но стационарное распределение единственно для более широкого класса матриц. В частности, оно единственно для неразложимых импримитивных матриц. Подробнее об этом написано в параграфе 5.

Асимптотическое поведение переходных вероятностей $p_{ij}^{(k)}$ при $k \to \infty$ в импримитивном случае более сложно (см. [1,2]) и не описывается

[1]Здесь и дальше сходимость последовательности матриц $A_k (k = 1, 2, ...)$ понимается поэлементно: $A_k \to B$ означает, что $(A_k)_{ij} \to (B)_{ij}$ для любых i, j.

теоремой 1. Однако, для матриц малых порядков ($n \leq 5$) стационарные распределения и асимптотику можно описать в явной форме, пользуясь результатами параграфов 3 - 5 и формой Фробениуса стохастической матрицы. Это сделано в параграфе 8.

В параграфе 6 определены стохастические темпоральные подматрицы. Связь стационарных распределений темпоральных подматриц со стационарным распределением исходной стохастической матрицы устанавливается в параграфе 7.

2. Графы матриц

Ориентированным графом называется пара $(V, \mathcal{E})$, где V — непустое множество вершин, $\mathcal{E} \subseteq V \times V$ — множество *дуг*. Таким образом, дуга — это упорядоченная пара вершин. Будем считать, что вершины пронумерованы натуральными числами, то есть множеством вершин служит множество $N = \{1, \ldots, n\}$.

Дуги можно записывать различно: ij или $i \to j$. Вершина i называется *началом*, а вершина j — *концом* дуги ij. Говорят, что дуга ij *выходит* из i и *входит* в j (или — *ведёт* из вершины i в вершину j). Дуга ii называется *петлёй*. Запись $i \to j$ иногда заменяет выражение "существует дуга, ведущая из i в j".

Путём длины k в орграфе называется любая последовательность вершин

$$i_1 i_2 \ldots i_{k+1}, \tag{5}$$

такая, что $i_m i_{m+1}$ — дуга, $m = 1, \ldots, k$. Здесь i_1 — *начало*, i_{k+1} — *конец* пути. Путь, у которого конец совпадает с началом, называется *замкнутым* путём или *контуром*. *Длина* пути равна количеству его дуг. Длина незамкнутого пути равна числу вершин минус единица, длина контура равна числу вершин.

Введём операцию произведения путей. Произведение путей $p = i_1 \ldots i_k$ и $q = j_1 \ldots j_m$ определено, если последняя буква пути p совпадает с первой буквой пути q. В этом случае

$$pq = x_1 \ldots x_k y_2 \ldots y_m = x_1 \ldots x_{k-1} y_1 \ldots y_m.$$

Произведение путей ассоциативно в том смысле, что если произведение $(pq)r$ определено, то произведение $p(qr)$ тоже определено и $(pq)r = p(qr)$. Из ассоциативности следует, что скобки в произведении любого числа путей можно опустить. Заметим, что *для пути pqr путь pr существует в точности тогда, когда q — контур.*

Путь называется *простым*, если все его вершины различны, кроме, может быть, первой и последней.

Лемма 1. *В графе с n вершинами*

1) *длина простого (i,j)-пути при $i \neq j$ не больше, чем $n-1$;*

2) *длина простого контура не больше, чем n;*

3) *если существует (i,j)-путь, то существует и простой (i,j)-путь.*

Доказательство. Длина (i,j)-пути при $i \neq j$ равна числу вершин пути минус единица, а длина контура равна числу вершин в контуре. Отсюда и из определения простого пути следуют пункты 1) и 2). Чтобы доказать 3), рассмотрим произвольно взятый (i,j)-путь. Если он не простой, то его можно разложить в произведение вида $r_1 q r_2$, где q — контур (множитель r_1 или r_2 могут и отсутствовать). Удалив контур q, получим более короткий (i,j)-путь $r_1 r_2$. Если и он не простой, то продолжим удаление контуров. Ясно, что на некотором шаге получится простой (i,j)-путь. $\square$

Говорят, что из вершины i *достижима* вершина j, если существует (i,j)-путь. Граф называется *сильно связным* или *неразложимым*, если из любой вершины достижимы все вершины, то есть любые две вершины взаимодостижимы.

Непустое множество S вершин называется *замкнутым*, если не существует дуг, ведущих из вершин множества S в вершины, не лежащие в S.

Лемма 2. *Граф с $n \geq 2$ вершинами разложим тогда и только тогда, когда он содержит собственное замкнутое множество вершин.*

Доказательство. Если множество $S \subset N$ замкнуто, то, очевидно, из вершин этого множества недостижимы вершины из $N \setminus S$. И наоборот, если граф разложим, то для некоторой вершины i достижимы не все вершины, а лишь некоторое собственное подмножество вершин $S(i) \subset N$. Легко убедиться, что множество $S(i)$ замкнуто. $\square$

Графом неотрицательной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n называется орграф с множеством вершин $N = \{1, \ldots, n\}$, в котором

$$i \to j \iff a_{ij} > 0.$$

Если каждой дуге ij графа матрицы приписать число a_{ij}, то получится наглядное изображение матрицы в виде *нагруженного* графа.

И наоборот, всякий нагруженный граф очевидным образом определяет матрицу.

Матрица A называется *неразложимой*, если её граф неразложим (сильно связен). В противном случае говорят, что матрица A разложима.

Весом пути $i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}$ в графе матрицы A называется произведение весов дуг пути, то есть число $a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_k i_{k+1}}$. Ясно, что

$$a_{il_1} a_{l_1 l_2} \cdots a_{l_{k-1} j} \neq 0 \iff \text{в графе } A \text{ есть путь } i l_1 l_2 \dots l_{k-1} j. \tag{6}$$

Согласно правилу умножения матриц (i,j)-элемент матрицы A^k определяется формулой

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{l_1, \dots, l_{k-1}} a_{il_1} a_{l_1 l_2} \dots a_{l_{k-1} j}, \tag{7}$$

где суммирование ведётся по всевозможным последовательностям индексов $l_1, \dots, l_{k-1}$.

Используя понятия графа матрицы и веса пути, можно сказать, что

$$a_{ij}^{(k)} = \text{ сумма весов } (i,j)\text{-путей длины } k, \tag{8}$$

$$a_{il_1} a_{l_1 l_2} \cdots a_{l_{k-1} j} > 0 \iff \text{в графе } A \text{ есть путь } i l_1 l_2 \dots l_{k-1} j.$$

Отсюда и из формулы (7) следует лемма, являющаяся основой применения графов в теории неотрицательных матриц:

Лемма 3. *Пусть $A = (a_{ij})$ — неотрицательная матрица. Тогда*

$$a_{ij}^{(k)} > 0 \iff \textit{в графе } A \textit{ существует } (i,j)\textit{-путь длины } k.$$

Проверить неразложимость неотрицательной матрицы можно с помощью следующей теоремы:

Теорема 2. *Матрица $A \geq 0$ неразложима тогда и только тогда, когда*

$$A + A^2 \dots + A^n > 0. \tag{9}$$

Доказательство. Из леммы 3 и леммы 1 на с.6 следует, что вершина j достижима из вершины i тогда и только тогда, когда $a_{ij}^{(k)} > 0$ при некотором k, $1 \leq k \leq n$. То есть, тогда и только тогда, когда

$$a_{ij} + a_{ij}^{(2)} + \dots + a_{ij}^{(n)} > 0. \tag{10}$$

Для неразложимости A необходимо и достаточно, чтобы неравенство (10) выполнялось для любых i, j, что и выражается условием (9). $\square$

Напомним, что матрица $A \geq 0$ называется *примитивной*, если существует показатель k, при котором $A^k > 0$. Граф называется *примитивным*, если из любой вершины в любую другую можно перейти путём некоторой длины k. В силу леммы 3 (с.7) матрица примитивна в точности тогда, когда примитивен её граф. В частности, $A^k > 0 \Longleftrightarrow$ в графе A любая вершина k-достижима из любой другой вершины.

3. Главные подматрицы стохастических матриц

Неотрицательная матрица A называется *субстохастической*, если её строчные суммы не превышают единицы. Ясно, что $\rho(A) \leq 1$. (Здесь $\rho(A)$ — спектральный радиус матрицы A, то есть $\rho(A) = max|\lambda_i|$, где λ_i — собственное значение матрицы A, $1 \leq i \leq n$.)

Лемма 4. *Пусть A — субстохастическая матрица. Тогда*

$$|I - A| \geq 0. \tag{11}$$

Доказательство 1. Поскольку $\rho(A) \leq 1$, то характеристический многочлен $|\lambda I - A|$ матрицы A не обращается в 0 при $\lambda > 1$. Ясно, что $|\lambda I - A| > 0$ при достаточно больших значениях λ. Определитель матрицы $\lambda I - A$ является непрерывной функцией от её элементов. Следовательно, в точке $\lambda = 1$ значение многочлена $|\lambda I - A|$ неотрицательно. $\square$

Приведём алгебраическое доказательство неравенства (11).

Доказательство 2. Из курса алгебры мехмата известно, что вещественный характеристический многочлен $|tI - A|$ разлагается, в произведение вещественных многочленов

а) типа $t - \lambda$, отвечающих вещественным корням λ, и

б) типа $t^2 - (\lambda + \bar{\lambda})t + \lambda\bar{\lambda}$, отвечающих парам сопряженных комплексных корней λ и $\bar{\lambda}$.

Нетрудно видеть, что

многочлены типа а) при $t = 1$ принимают неотрицательные значения, так как $|\lambda| \leq 1$;

многочлены типа б) положительны при любых вещественных значениях t.

Мы выяснили, что в разложении многочлена $|tI - A|$ все сомножители неотрицательны при $t = 1$. Следовательно, и сам этот многочлен при $t = 1$ неотрицателен. $\square$

Применим лемму 4 к субстохастическим матрицам, получаемым из стохастической матрицы P вычёркиванием i-й строки и i-го столбца.

Следствие 1. *Если P — стохастическая матрица, то миноры диагональных элементов матрицы $I - P$ неотрицательны.*

Доказательство. Обозначим через $P(i)$ субстохастическую матрицу, полученную из P вычёркиванием i-й строки и i-го столбца. Минор i-го диагонального элемента матрицы $I - P$ равен определителю $|I - P(i)|$. По лемме 4 этот определитель неотрицателен. □

Введём удобные обозначения для подматриц. Пусть α и β — множества вершин графа матрицы P, то есть подмножества множества $N = \{1, \ldots, n\}$. Тогда символом $P[\alpha|\beta]$ обозначается подматрица, стоящая на пересечении строк с номерами из α и столбцов с номерами из β.

Важный частный случай: $P[\alpha|\overline{\alpha}]$, где $\overline{\alpha}$ – дополнение α.

Если $\alpha = \beta$, то подматрица $P[\alpha|\alpha]$, стоящая на пересечении строк и столбцов с номерами из α, называется главной подматрицей матрицы P. Для краткости вместо $P[\alpha|\alpha]$ пишут просто $P[\alpha]$. Введённая выше подматрица $P(i)$ является главной подматрицей порядка $n - 1$, так как $P(i) = P[N \setminus \{i\}]$.

Полезное замечание:

$$P[\alpha|\overline{\alpha}] = 0 \iff \text{множество } \alpha \text{ вершин графа } P \text{ замкнуто.} \tag{12}$$

Лемма 5. *Пусть P — субстохастическая матрица. Если главная подматрица $P[\alpha]$ — стохастическая, то множество α вершин графа P замкнуто. В случае, когда P — стохастическая матрица, верно и обратное утверждение: если множество α вершин графа P замкнуто, то подматрица $P[\alpha]$ — стохастическая.*

Доказательство. $P[\alpha]$ — стохастическая подматрица $\Longrightarrow$ $P[\alpha|\overline{\alpha}] = 0 \Longrightarrow$ (см. (12)) множество α вершин графа P замкнуто. Если P — стохастическая матрица, то, очевидно, $P[\alpha|\overline{\alpha}] = 0 \Longrightarrow P[\alpha]$ — стохастическая. □

Выясним, когда в неравенстве (11) имеет место равенство, то есть, когда число 1 является собственным значением субстохастической матрицы A.

Предложение 1. $|I - A| = 0 \iff$ *A содержит стохастическую главную подматрицу.*

Доказательство. Равенство $|I - A| = 0$ означает, что число 1 является собственным значением матрицы A. Следовательно, в матрице A^k при любом показателе k есть стохастические строки, то есть

множество

$$\alpha_k = \{i | s_i^{(k)} = 1\}, \text{ где } s_i^{(k)} = \sum_j a_{ij}^{(k)}$$

непусто при любом k. Кроме того, $\alpha_{k+1} \subseteq \alpha_k$. Это следует из неравенств

$$s_i^{(k+1)} = (a_{i1}^{(k)}, \ldots, a_{i1}^{(k)})A\mathbf{1} = \sum_j a_{ij}^{(k)} s_j \leq \sum_j a_{ij}^{(k)} = s_i^{(k)} \leq 1.$$

Ясно, что $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ для некоторого $k \leq n-1$. Тогда

$$i \in \alpha_k \;\Rightarrow\; s_i^{(k+1)} = \sum_m a_{im} s_m^{(k)} = 1 \Rightarrow (a_{im} > 0 \;\Rightarrow\; s_m^{(k)} = 1).$$

Итак, из условий $i \in \alpha_k$ и $a_{im} > 0$ следует $m \in \alpha_k$. Это значит, что α_k — замкнутое множество. Следовательно, $A[\alpha_k]$ — стохастическая главная подматрица.

Обратное утверждение теоремы очевидно. □

Теорема 3. *Минор i-го диагонального элемента матрицы $I - P$ положителен $\Longleftrightarrow$ вершина i достижима из всех вершин в графе матрицы P .*

Доказательство. Вершина i достижима из всех вершин $\Longleftrightarrow$ любое замкнутое множество вершин содержит i $\Longleftrightarrow$ субстохастическая матрица $P(i)$, полученная из P вычёркиванием i-й строки и i-го столбца, не содержит стохастических главных подматриц. Отсюда и из предложения 1 следует утверждение теоремы. □

Следствие 2. *Миноры всех диагональных элементов (то есть, все главные миноры порядка $n-1$) матрицы $I - P$ положительны $\Longleftrightarrow$ матрица P неразложима.*

4. О присоединённой матрице

Напомним, что собственными значениями комплексной матрицы A называются корни характеристического многочлена $|tI - A|$. Пусть λ — корень, тогда соответствующие ему собственные векторы-столбцы находят, решая систему линейных однородных уравнений

$$(\lambda I - A)x = 0. \tag{13}$$

Как известно, множество решений однородной системы образует подпространство пространства столбцов $\mathbb{C}^n$. В нашем случае оно называется собственным подпространством, отвечающим собственному значению λ,

его размерность называется геометрической кратностью корня λ. Говорят, что строка x — *левый* собственный вектор матрицы A, отвечающий корню λ, если $xA = \lambda x$. Левые собственные векторы находят, решая систему линейных однородных уравнений

$$x(\lambda I - A) = 0. \tag{14}$$

Левые собственные векторы составляют (вместе с нулевой строкой) *левое* собственное подпространство, отвечающее λ. Это подпространство пространства комплексных строк $\mathbb{C}_n$.

Собственные векторы-столбцы, чтобы отличить их от левых, называют *правыми*. Те из них, которые отвечают корню λ, образуют *правое* собственное подпространство для λ.

Система уравнений (14) эквивалентна более привычно записанной системе $(\lambda I - A)^T x^T = 0$, то есть системе $(\lambda I - A^T)x^T = 0$. Как известно из курса алгебры, характеристический многочлен матрицы не меняется при транспонировании. Значит, левые собственные векторы отвечают тем же собственным значениям, что и правые.

Для нашей работы важен случай, когда собственное подпространство для корня λ одномерно, то есть одномерны пространства решений однородных систем (13) и (14) . То есть собственный вектор (как правый, так и левый), отвечающий λ, — единственный с точностью до множителя.

Для этого специального вида однородных систем решение можно представить с помощью присоединённой матрицы.

Напомним определение присоединённой матрицы для матрицы $A = (a_{ij})$. Чтобы получить присоединённую матрицу $A^\vee$, надо заменить каждый элемент a_{ij} его алгебраическим дополнением A_{ij} и транспонировать полученную матрицу. Таким образом,

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^\vee = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Из курса алгебры известно, что

$$AA^\vee = A^\vee A = \det A \cdot I. \tag{15}$$

Следующее утверждение также известно из курса алгебры.

Предложение 2. *Пусть дана система n линейных однородных уравнений с n неизвестными $Ax = 0$. Тогда размерность пространства решений системы равна $n - \mathrm{rk}A$.*

Следствие 3. *Пусть A — матрица порядка n. Пространство решений системы $Ax = 0$ одномерно тогда и только тогда, когда* $\mathrm{rk}A = n - 1$.

Предложение 3. *Пусть $A^\vee$ — присоединённая матрица для A. Тогда*

$$\mathrm{rk}A^\vee = 1 \iff \mathrm{rk}A = n - 1$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{rk}A = n - 1$, тогда существуют ненулевые миноры A порядка $n - 1$. Следовательно, $A^\vee \neq 0$. В нашем случае $\det A = 0$, поэтому из равенств (15) следует

$$AA^\vee = 0. \tag{16}$$

Из равенства (16) видно, что ненулевые столбцы матрицы $A^\vee$ являются решениями системы $Ax = 0$. Согласно предложению 2 размерность пространства решений равна $n - (n - 1) = 1$. Следовательно, $\mathrm{rk}A^\vee = 1$.

Наоборот, если $\mathrm{rk}A^\vee = 1$, то существуют ненулевые миноры A порядка $n - 1$, значит,

$$\mathrm{rk}A \geq n - 1. \tag{17}$$

С другой стороны, равенство $\mathrm{rk}A^\vee = 1$ влечет $\det A^\vee = 0$. Отсюда и из равенства (15) по теореме об умножении определителей следует

$$\det A = 0 \implies \mathrm{rk}A < n. \tag{18}$$

Сравнивая (17) и (18), получаем $\mathrm{rk}A = n - 1$. □

Из следствия 3 и предложения 3 непосредственно вытекает

Теорема 4. *Пусть A — матрица порядка n. Следующие условия эквивалентны*

1) *пространство решений системы $Ax = 0$ одномерно,*

2) $\mathrm{rk}A = n - 1$,

3) $\mathrm{rk}A^\vee = 1$.

Из теоремы 4 и доказательства предложения 3 следует

Предложение 4. *Если выполнено одно из условий теоремы 4, то любой ненулевой столбец матрицы $A^\vee$ является решением системы $Ax = 0$.*

Теперь рассмотрим систему линейных однородных уравнений $xA = 0$. Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — строка неизвестных, $0 = (0, \ldots, 0)$ — нулевая строка. Для этой системы два последних утверждения также имеют

место. Это следует из того, что система $xA = 0$ может быть записана в обычном виде: $A^T x^T = 0^T$. Надо учесть, кроме того, что ранг матрицы не меняется при транспонировании.

Теорема 5. *Пусть A — матрица порядка n. Следующие условия эквивалентны*

1) *пространство решений системы $xA = 0$ одномерно,*

2) $\mathrm{rk} A = n - 1$,

3) $\mathrm{rk} A^\vee = 1$.

Предложение 5. *Пусть выполнено одно из условий теоремы 5. Тогда любая ненулевая строка матрицы $A^\vee$ является решением системы $xA = 0$.*

В этом предложении снова используются равенства (15), на этот раз то, что $A^\vee A = 0$.

Из предложений 4 и 5 вытекает способ вычисления собственных векторов, отвечающих собственному значению λ, если геометрическая кратность λ равна 1. То есть, если пространство решений системы (13) одномерно.

Предложение 6. *Предположим, что геометрическая кратность собственного значения λ комплексной матрицы A равна 1. Тогда всякий ненулевой столбец матрицы $(\lambda I - A)^\vee$ является правым собственным вектором, отвечающим λ, а всякая ненулевая строка матрицы $(\lambda I - A)^\vee$ является левым собственным вектором, отвечающим λ.*

5. Формула стационарного распределения

Если A — комплексная матрица порядка n, λ — её собственное значение, то $\mathrm{rk}(\lambda I - A) < n$. При этом, если $\mathrm{rk}(\lambda I - A) = n - 1$, то согласно теореме 4 $\mathrm{rk}(\lambda I - A)^\vee = 1$. Но для стохастической матрицы P и собственного значения $\lambda = 1$ можно доказать больше.

Лемма 6. *Пусть P — стохастическая матрица порядка n. Если $\mathrm{rk}(I - P) = n - 1$, то строки матрицы $(I - P)^\vee$ равны, а элементы неотрицательны и не все равны нулю. Верно и обратное утверждение.*

Доказательство. Если $\mathrm{rk}(I - P) = n - 1$, то по теореме 4 правое подпространство неподвижных векторов матрицы P одномерно. Это подпространство для любой стохастической матрицы содержит

столбец из единиц: $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, неподвижные векторы — столбцы $(I-P)^\vee$ — пропорциональны столбцу $\mathbf{1}$. Это значит, что каждый столбец $(I-P)^\vee$ состоит из равных чисел. Последнее равносильно тому, что строки матрицы $(I-P)^\vee$ равны между собой. Если в квадратной матрице строки равны, то каждая строка равна строке, составленной из диагональных элементов. Диагональные элементы матрицы $(I-P)^\vee$ являются минорами диагональных элементов матрицы $I-P$. Следовательно, строки $(I-P)^\vee$ равны строке

$$(I-P)_{11}, \ldots, (I-P)_{nn}. \tag{19}$$

Элементы этой строки неотрицательны по следствию 1. Среди них есть положительные, так как в противном случае имели бы $(I-P)^\vee = 0$, но по предложению 3

$$\mathrm{rk}(I-P)^\vee = 1 > 0.$$

Обратное утверждение леммы сразу следует из теоремы 3, если применить её к матрице $I-P$. $\square$

Лемма 7. *Пусть P — стохастическая матрица порядка n. Тогда* $\mathrm{rk}(I-P) = n-1 \iff$ *среди миноров* (19) *есть положительные.*

Доказательство. Часть $\Longrightarrow$ сразу следует из леммы 6. Докажем $\Longleftarrow$. Числа (19) являются минорами порядка $n-1$ матрицы $I-P$. Если среди них есть ненулевые, то $\mathrm{rk}(I-P) \geq n-1$. Однако равенство $\mathrm{rk}(I-P) = n$ невозможно, поскольку $|I-P| = 0$. $\square$

Из предложения 5 и леммы 7 вытекает, что при условии $\mathrm{rk}(I-P) = n-1$ строка (19) является единственным, с точностью до множителя, левым неподвижным вектором для стохастической матрицы P. Если этот вектор нормировать (поделить каждый его элемент на сумму всех элементов), то получим единственный неподвижный левый стохастический вектор для P.

Теорема 6. *Пусть P — стохастическая матрица. Предположим, что выполнено любое из условий:*

1) $\mathrm{rk}(I-P) = n-1$,

2) *в графе матрицы P существуют вершины, достижимые из всех вершин.*

Тогда строка

$$\frac{(I-P)_{11}}{\sum\limits_{l=1}^{n}(I-P)_{ll}}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{(I-P)_{nn}}{\sum\limits_{l=1}^{n}(I-P)_{ll}} \tag{20}$$

является единственным неподвижным левым стохастическим вектором для P. То есть единственным стационарным распределением для цепи Маркова с матрицей P переходных вероятностей.

В дальнейшем мы будем иметь дело с неразложимыми стохастическими матрицами, то есть матрицами, графы которых сильно связны. Для них, разумеется, условие 2) теоремы 6 выполняется.

6. Форма Фробениуса импримитивной матрицы

Если матрица $P \geq 0$ неразложима, но не примитивна, то посредством некоторой перестановки строк и такой же перестановки столбцов её можно привести к простому виду, называемому формой Фробениуса. Точнее существует такая перестановочная матрица Q, что матрица QAQ^T имеет форму Фробениуса. Совсем коротко можно сказать, что импримитивная матрица приводится к указанной форме *перестановкой рядов*. Этот известный факт излагается здесь без подробного доказательства, которое можно найти в источниках [1,2].

Индексом импримитивности сильно связного графа называется число d, равное наибольшему общему делителю длин контуров графа. Индексом импримитивности неразложимой матрицы P называется индекс импримитивности её графа. Известно [2], что сильно связный граф примитивен (неразложимая матрица примитивна) тогда и только тогда, когда $d = 1$. Если $d > 1$, то множество вершин графа матрицы можно разбить на классы

$$C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_d \tag{21}$$

так, что все дуги с началом в классе C_1 ведут в класс C_2, дуги с началом в C_2 ведут в C_3 и так далее; наконец, дуги из C_d ведут в C_1. Будем говорить, что класс C_{t+1} следует за классом C_t при $t \leq d-1$, класс C_1 следует за C_d. Описанное разбиение будем называть циклическим, а классы разбиения — циклическими классами.

Предположим, что для графа матрицы циклическое разбиение (21) получено. Перенумеруем вершины графа: вначале вершины класса C_1, потом C_2 и т.д. Произведём перестановку рядов матрицы соответственно новой нумерации вершин и разобъём полученную матрицу на блоки, соответствующие классам. В результате получим матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_{12} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & P_{23} & ... & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{d-1,d} \\ P_{d1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Матрица (22) называется *формой Фробениуса.* У такой матрицы нулевые диагональные блоки — квадратные, единственный ненулевой блок блочной строки является правым соседом диагонального блока, в нижней блочной строке единственный ненулевой блок занимает левый нижний угол. Количество блочных строк (и столбцов) называется блочным порядком матрицы. Дальше мы будем считать, что матрица (22) — стохастическая. Тогда её ненулевые блоки — стохастические (вообще говоря, прямоугольные) матрицы.

При возведении блочно-циклической матрицы (22) в степень d получается блочно диагональная матрица

$$P^d = \begin{pmatrix} G_1 & & & \\ & G_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_d \end{pmatrix}, \tag{23}$$

где на главной диагонали расположены стохастические матрицы

$$\begin{aligned} G_1 &= P_{12}P_{23}\cdots P_{d1}, \\ G_2 &= P_{23}\cdots P_{d1}P_{12}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ G_d &= P_{d1}P_{12}\cdots P_{d-1,d}. \end{aligned} \tag{24}$$

Замечательное свойство формы Фробениуса состоит в том, что диагональные блоки матрицы (23) являются примитивными матрицами. Примитивные стохастические матрицы $G_1, G_2, \ldots, G_d$ можно рассматривать как матрицы марковских систем, которые возникают, если исходную систему наблюдать в моменты dm, $m = 1, 2, \ldots$ Назовём матрицы $G_1, G_2, \ldots, G_d$ *темпоральными* подматрицами матрицы P.

Резюмируем описанные выше результаты.

Теорема 7. *Пусть P — неразложимая стохастическая матрица с контурным индексом d. Если $d = 1$, то матрица P примитивна. Если $d > 1$, то матрица P некоторой перестановкой рядов приводится к форме Фробениуса* (22). *Стохастические темпоральные подматрицы $G_1, G_2, \ldots, G_d$ матрицы примитивны.*

Поскольку темпоральные подматрицы примитивны, то по теореме 1 для каждой из Q_i существует предел $\mathbf{1}\rho_i$ — положительная стохастическая матрица с одинаковыми строками. Здесь ρ_i — стационарное и, одновременно, предельное распределение вероятностей для темпоральной подматрицы Q_i.

7. Связь между стационарным распределением матрицы и стационарными распределениями ее темпоральных подматриц

В этом параграфе устанавливается связь между стационарным распределением для стохастической матрицы P, имеющей форму (22), и стационарными распределениями ее темпоральных подматриц. Вначале разберём частный случай матрицы порядка n с индексом импримитивности $d = 3$. В этом случае форма Фробениуса имеет следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_{12} & 0 \\ 0 & 0 & P_{23} \\ P_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где матрица P_{31} порядка n_3 на n_1, матрица P_{12} порядка n_1 на n_2, матрица P_{23} порядка n_2 на n_3 и $n_1 + n_2 + n_3 = n$.

Пусть π - стационарное распределение матрицы P, то есть $\pi P = \pi$.

Исследуем асимптотическое поведение степеней матрицы P, для этого вычислим матрицу P^3:

$$P^3 = \begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & Q_2 & \\ & & Q_3 \end{pmatrix}.$$

Матрицы Q_1, Q_2, Q_3 - примитивные стохастические матрицы. Стационарные (одновременно предельные) распределения этих матриц обозначим через ρ_1, ρ_2, ρ_3. Для того, чтобы определить связь между π и этими распределениями разобьем π на подстроки длины n_1, n_2, n_3. То есть $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$. Тогда

$$\pi_i Q_i = \pi_i, \ i = 1, 2, 3. \tag{25}$$

Действительно, так как $\pi P = \pi$, следовательно, $\pi P^3 = \pi$, то есть

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & Q_2 & \\ & & Q_3 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3),$$

а это равенство равносильно трём равенствам (25). Таким образом, π_i - неподвижный вектор для Q_i, но это не стохастический вектор, так как сумма его элементов для каждого i меньше единицы.

Докажем, что

$$\pi_i \mathbf{1} = \frac{1}{3} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Здесь, под $\mathbf{1}$, как обычно, имеется ввиду столбец из единиц.

Из того, что $\pi P = \pi$ находим, что

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 0 & P_{12} & 0 \\ 0 & 0 & P_{23} \\ P_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_3 P_{31}, \pi_1 P_{12}, \pi_2 P_{23}).$$

Следовательно,

$$\pi_3 P_{31} = \pi_1, \pi_1 P_{12} = \pi_2, \pi_2 P_{23} = \pi_3.$$

Из этих равенств следует, что $\pi_1 \mathbf{1} = \pi_3 \mathbf{1} = \pi_2 \mathbf{1}$, то есть суммы элементов π_1, π_2, π_3 одинаковы. *Обозначим эти одинаковые суммы через* α.

Тогда, $\pi \mathbf{1} = 3\alpha = 1$. Следовательно, $\alpha = \frac{1}{3}$.

Выходит, что вектор

$$\rho_i = \alpha^{-i} \pi_i = 3\pi_i \tag{26}$$

— единственное стационарное распределение для матрицы Q_i, где $i = 1, 2, 3$.

Таким образом, если известно стационарное распределение π для матрицы P, то стационарные распределения ρ_1, ρ_2, ρ_3 для матриц Q_1, Q_2, Q_3 находятся по формуле (26).

Наоборот, если известны стационарные распределения ρ_1, ρ_2, ρ_3 для темпоральных подматриц Q_1, Q_2, Q_3, то стационарное распределение π для матрицы P находится по формуле

$$\pi = \frac{1}{3}(\rho_1 \ \rho_2 \ \rho_3).$$

Теперь рассмотрим общий случай связи стационарного распределения стохастической матрицы со стационарными распределениями её темпоральных подматриц. Как упоминалось выше, нормальная форма Фробениуса неразложимой стохастической матрицы с индексом импримитивности, равным d, имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_{12} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & P_{23} & ... & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{d-1,d} \\ P_{d1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

И в степени d она равна

$$P^d = \begin{pmatrix} G_1 & & & \\ & G_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_d \end{pmatrix}.$$

Обозначим порядки диагональных нулевых блоков матрицы (27) через $n_1, n_2, ..., n_d$. Эти числа являются одновременно порядками темпоральных подматриц $G_1, G_2, \ldots, G_d$. Разобьем стационарное распределение π матрицы P на подстроки $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_d$ длины, соответственно, $n_1, n_2, ..., n_d$ и представим стационарное распределение π в виде

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_d).$$

Так как $\pi P = \pi$, следовательно, $\pi P^d = \pi$, то есть

$$(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_d) \begin{pmatrix} G_1 & & & \\ & G_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_d \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_d).$$

Следовательно, $\pi_i G_i = \pi_i, i = 1, ..., d$, то есть π_i — неподвижный вектор для G_i. Докажем, что $\pi_i \mathbf{1} = \frac{1}{d}$.

$$(\pi_1, \pi_2, .., \pi_{d-1}, \pi_d) \begin{pmatrix} 0 & P_{12} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & P_{23} & ... & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{d-1,d} \\ P_{d1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_d P_{d1}, \pi_1 P_{12}, .., \pi_{d-1} P_{d-1,d}).$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \pi_d P_{d1} & = & \pi_1 \\ \pi_1 P_{12} & = & \pi_2 \\ .. & .. & .. \\ \pi_{d-1} P_{d-1,d} & = & \pi_d \end{cases} \tag{28}$$

Умножая каждое из равенств (28) на столбец из единиц $\mathbf{1}$ подходящей высоты, получаем

$$\pi_d\mathbf{1} = \pi_1\mathbf{1} = \pi_2\mathbf{1} = \ldots = \pi_{d-1}\mathbf{1},$$

то есть суммы элементов в строках $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_d$ одинаковы. Обозначим эти одинаковые суммы через α.

Тогда

$$\pi\mathbf{1} = \pi_d\mathbf{1} + \pi_1\mathbf{1} + \pi_2\mathbf{1} + \ldots + \pi_{d-1}\mathbf{1} = d\alpha = 1$$

Следовательно, $\alpha = d^{-1}$.

Подведём итог.

Теорема 8. *Дана импримитивная стохастическая матрица P с индексом импримитивности d в форме Фробениуса* (27). *Пусть*

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_d)$$

— стационарное распределение для P (разбитое на подвекторы, как описано выше), а векторы

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_d$$

— стационарные распределения для темпоральных подматриц

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_d.$$

Тогда

$$\rho_i = d\pi_i, \quad i = 1, \ldots, d. \tag{29}$$

Соответственно,

$$\pi = d^{-1}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_d). \tag{30}$$

Кроме того, из равенств (28) можно заметить, что, зная стационарное распределение для одной из темпоральных подматриц, легко вычислить стационарные распределения для остальных темпоральных подматриц.

8. Формы Фробениуса и асимптотика для неразложимых стохастических матриц малого порядка

Как было сказано ранее, по теореме 1, если матрица P примитивна, то асимптотика такова, что последовательность P^k сходится при $k \to \infty$ к матрице

$$\Pi = \mathbf{1}\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (\pi_1, \ldots, \pi_n).$$

Таким образом, π для предельной матрицы $\Pi = \mathbf{1}\pi$ можно вычислить по формуле (3).

Например, для случая примитивной матрицы порядка $n = 2$

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, 0 \le a < 1, 0 < b \le 1$$

предельная матрица примет вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}, 0 \le a < 1, 0 < b \le 1$$

Для больших порядков выписывать вид предельной матрицы не имеет смысла — слишком громоздкие формулы.

Асимптотическое поведение переходных вероятностей $p_{ij}^{(k)}$ при $k \to \infty$ в импримитивном случае для матриц произвольного порядка описано, например, в [1,2]. Однако для матриц малых порядков ($n \le 5$) асимптотику можно описать, пользуясь результатами параграфа 7 и формой Фробениуса стохастической матрицы. В некоторых случаях оказывается, что, пользуясь теоремой 8, можно вычислить стационарное распределение для матрицы P проще, чем по формуле (20). Вначале мы будем приводить оба способа вычисления.

Выпишем все возможные формы Фробениуса для импримитивных стохастических матриц 2-го и 3-го порядка.

Форма Фробениуса для матрицы порядка $n = 2$ имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Для второго порядка есть только одна импримитивная матрица. Стационарное распределение этой матрицы равно $\pi = (\frac{1}{2}\frac{1}{2})$. Число классов $d = 2$.

Формы Фробениуса для матриц порядка $n = 3$ при $d = 2$ имеют вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}, \text{где } 0 < p < 1.$$

Для этих матриц число классов d также равно 2. Эти матрицы перестановочно подобны, а именно $Q = R^T P R$, где

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ограничимся рассмотрением матрицы P.

Вычислим стационарное распределение для этой матрицы:

$$P(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -p & p-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P_{11} = 1,\ P_{22} = p,\ P_{33} = 1-p$$

Следовательно,стационарное распределение матрицы P имеет вид

$$\pi = (\pi_1\ \pi_2\ \pi_3) = (\frac{1}{2}\ \frac{p}{2}\ \frac{1-p}{2})$$

Тогда стационарное распределение для матрицы Q равно:

$$(\pi R)Q = \pi R R^T P R = \pi P R = \pi R$$

.

То есть стационарное распределение матрицы Q получается умножением стационарного распределения π на матрицу R.

Вычислив матрицы P^2 и P^3, определим асимптотическое поведение степеней матрицы переходных вероятностей:

$$P^2 = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & p & 1-p \end{pmatrix}, P^3 = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что $P^3 = P$, то есть матрица P в третьей степени равна самой себе. Следовательно, последовательность $P^k, k = 1, 2, \ldots$ является периодической вида

$$P, P^2, P, \ldots$$

Период в этом случае равен двум.

Теперь вычислим стационарное распределение для матрицы P, пользуясь теоремой (8). В данном случае темпоральные подматрицы равны

$$Q_1 = 1,\ Q_2 = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Стационарные распределения для них можно указать, не вычисляя :

$$\rho_1 = 1,\ \rho_2 = (p, 1-p).$$

Согласно теореме 8

$$\pi = \frac{1}{2}(1, p, 1-p),$$

что совпадает с результатом предыдущего вычисления.

Рассмотрим следующий вид матриц третьего порядка

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы число классов уже равно 3. Здесь также можно заметить периодическое поведение матриц. Период равен трем.

Вообще, нормальная форма неразложимой стохастической матрицы при d=n (число классов равно порядку) принимает следующий вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ следовательно, } P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Оба способа вычисления дают стационарный вектор

$$\pi = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n).$$

Размеры блоков в форме Фробениуса определяются последовательностью порядков диагональных нулевых блоков. А именно, если порядки составляют последовательности $n_1, n_2, ..., n_d$, то блок P_{12} имеет размеры $n_1 \times n_2$, блок P_{23} - размеры $n_2 \times n_3$ и т.д. Наконец, блок P_{d1} имеет размеры $n_d \times n_1$. Мы не будем различать формы Фробениуса, отличающиеся нумерацией циклических классов (и соответствующей циклической перестановкой нулевых блоков) — см. замечание в конце параграфа 6.

Выпишем формы Фробениуса для матриц четвертого порядка. Возможны несколько случаев таких матриц, то есть варианты, когда сумма порядков диагональных нулевых блоков представляется в виде:

1. 2+1+1=4,
2. 1+2+1=4,
3. 1+1+2=4,
4. 2+2=4,

5. 1+1+1+1=4,
6. 3+1=4,
7. 1+3=4.

Заметим, что матрицы из случаев 2 и 3 перестановочно подобны матрице из случая 1, поэтому рассматривать их мы не будем. По аналогичной причине не рассматриваем случай 1+3=4.

Итак, рассмотрим первый случай:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & 1-p & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 < p < 1$$

Здесь $d = 3$.

Вычислим стационарное распределение для этой матрицы:

$$P(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -p & p-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{11} = p,\ P_{22} = 1-p,\ P_{33} = 1,\ P_{44} = 1$$

.

Следовательно,стационарное распределение матрицы P имеет вид

$$(\pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4) = (\frac{p}{3}\ \frac{1-p}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}).$$

Рассмотрим асимптотическое поведение последовательности P^k при $k \to \infty$. Вычислив матрицы P^2, P^3, P^4

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ P^3 = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & 1-p & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

заметим периодическое поведение последовательности P^k:

$$P, P^2, P^3, P, P^2, P^3...$$

Период равен трем.

Для случая 2+2=4 форма Фробениуса примет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_{12} \\ P_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & q & 1-q \\ r & 1-r & 0 & 0 \\ s & 1-s & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Индекс импримитивности d для этого случая равен двум.

Воспользовавшись теоремой 8 вычислим стационарное распределение для матрицы P.

Вычислим матрицу P^2:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_{12} \\ P_{21} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix},$$

где

$$Q_1 = \begin{pmatrix} pr + s(1-p) & p(1-r) + (1-s)(1-p) \\ qr + s(1-q) & q(1-r) + (1-s)(1-q) \end{pmatrix}.$$

Тогда стационарное распределение для матрицы Q_1 равно

$$\rho_1 = (\alpha, \beta), \text{ где } \alpha = \tfrac{q(r-s)+s}{1+(q-p)(r-s)}, \beta = \tfrac{1-pr-s(1-p)}{1+(q-p)(r-s)}.$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} pr + q(1-r) & r(1-p) + (1-r)(1-q) \\ sp + q(1-s) & s(1-p) + (1-s)(1-q) \end{pmatrix}.$$

Стационарное распределение для матрицы Q_2 равно

$$\rho_2 = (\gamma, \delta), \text{ где } \gamma = \tfrac{q+s(p-q)}{1+(s-r)(p-q)}, \delta = \tfrac{1-pr-q(1-r)}{1+(s-r)(p-q)}.$$

Таким образом, стационарное распределение матрицы P по формуле (30) равно

$$\pi = \frac{1}{2}(\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta).$$

Заметим, что если матрицы Q_1, Q_2 - примитивные стохастические матрицы, то сами матрицы P_{12} и P_{21} не обязаны быть примитивными или неразложимыми.

Например, матрицы

$$P_{12} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

при $p > 0, q > 0$ разложимы, но $Q_1 = P_{12}P_{21}$ и $Q_2 = P_{21}P_{12}$ примитивны.

Аналогично, матрицы

$$P_{12} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

разложимы при $p > 0$, но матрицы Q_1 и Q_2 примитивны.

Таким образом, для того, чтобы произведения матриц P_{12} и P_{21} были примитивными матрицами необходимо выполнение неравенств

$$0 \leq pr + s(1-p) < 1 \text{ и } 0 < qr + s(1-q) \leq 1,$$

а также

$$0 \leq pr + q(1-r) < 1 \text{ и } 0 < sp + q(1-s) \leq 1.$$

Случай 2+2=4 - единственный для $n = 4$, когда последовательность $P^k, k = 1, 2, ..$ может быть непериодической. Точнее, имеет место

Предложение 7. *Последовательность $P^k, k = 1, 2, ..$ является периодической в том и только том случае, когда хотя бы одна из матриц P_{12}, P_{21} вырождена.*

Доказательство. Стохастическая матрица второго порядка вырождена тогда и только тогда, когда ее строки равны. Следовательно, условие предложения выполнено, если $p = q$ или (и) $r = s$. В этом случае обе темпоральные подматрицы $P_{12}P_{21}$ и $P_{21}P_{12}$ тоже имеют одинаковые строки. Отсюда и следует периодичность. Если же матрицы P_{12} и P_{21} невырождены, то и матрица (32) невырождена, так как её строки линейно независимы. Последовательность степеней невырожденной матрицы не может быть периодической. □

Для случая 1+1+1+1=4 матрица P примет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицы порядка $n = 5$.

Аналогично четвертому порядку, форма этих матриц определяется последовательностью порядков диагональных нулевых блоков. С точностью до циклических перестановок нулевых блоков, таких последовательностей может быть пять, а именно: (2,3); (2,2,1); (1,1,1,1,1); (1,4); (1,1,1,2).

В случае 2+3 матрица примет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p & q & r \\ 0 & 0 & s & t & u \\ f & 1-f & 0 & 0 & 0 \\ v & 1-v & 0 & 0 & 0 \\ w & 1-w & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $p+q+r=1$, $s+t+u=1$, $0<v<1$, $0<w<1$, $0<f<1$.

Предложение 8. *В случае 2+3 последовательность $P^k, k=1,2,..$ является периодической в том и только том случае, когда темпоральная подматрица порядка 2 вырождена. То есть, выполняется равенство $pf+qv+rw=sf+tv+uw$. В остальных случаях при $n=5$ последовательность P^k - периодическая.*

Доказательство. Доказательство для случая 2+3 аналогично доказательству предложения 7. Периодичность в остальных случаях доказывается перебором вариантов. □

Стационарное распределение для этих матриц также можно найти либо используя нашу формулу 3 либо воспользовавшись теоремой 8.

Для случая 2+2+1 имеем:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ r & 1-r & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $0<p<1$, $0<q<1$, $0<r<1$.

Для случая 1+1+1+1+1:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

В случае 1+4:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & q & r & s \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } p+q+r+s=1, p,q,r,s>0.$$

индекс импримитивности $d = 2$, период также равен двум.

Для случая 1+1+1+2:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1-a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственным вычислением проверяется, что во всех случаях темпоральные подматрицы являются матрицами порядка 2 с равными строчками, либо матрицами порядка 1, что и обеспечивает периодичность последовательности P^k.

9. Список литературы

1. В.И. Романовский, *Дискретные цепи Маркова.* Гостехиздат, М. 1949.

2. Ю.А. Альпин, С.Н. Ильин. Дискретная математика: графы и автоматы. Изд-во КГУ (2007).

3. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.*Мир., М., 1989.

4. Ю.А. Альпин. Формула для перронова вектора стохастической матрицы// Записки научн.семин. ПОМИ - 2009. - Т. 367. – С. 5 - 8.