Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, № 7, с. 31–42 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0062*

В.В. ГОРОДЕЦКИЙ, О.В. МАРТЫНЮК

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА. II

Аннотация. Установлена корректная разрешимость задачи Коши для сингулярных эволюционных уравнений бесконечного порядка в классах начальных условий, являющихся обобщенными функциями типа ультрараспределений (аналитическими функционалами).

Ключевые слова: задача Коши, эволюционные уравнения, обобщенные функции, оператор Бесселя бесконечного порядка.

УДК: 517.956

Abstract. We prove the correct solvability of the Cauchy problem for singular evolution equations of infinite order in classes of initial conditions that are generalized functions like ultra-distributions (analytic functionals).

Keywords: Cauchy problem, evolution equation, distribution, Bessel operator of infinite order.

Данная работа является продолжением статьи [1], в которой были найдены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие непрерывность оператора Бесселя бесконечного порядка в пространствах типа W, введенных Б.Л. Гуревичем [2] (пространства типа W являются обобщениями пространств типа S, введенных И.М. Гельфандом и Г.Е. Шиловым [3], вследствие замены степенных функций произвольными выпуклыми, что позволяет точнее описать особенности возрастания или убывания функций на бесконечности); исследованы свойства преобразования Фурье–Бесселя обобщенных функций из пространств типа W', сверток, свертывателей и мультипликаторов. Результаты [1] дают возможность развить здесь теорию задачи Коши для сингулярных эволюционных уравнений бесконечного порядка в классах начальных условий, являющихся обобщенными функциями типа ультрараспределений (аналитическими функционалами); в частности, установить оценки фундаментального решения задачи Коши, исследовать свойства фундаментального решения задачи Коши как абстрактной функции временного параметра со значениями в пространствах типа W, доказать дифференцируемость (по t) свертки фундаментального решения задачи Коши с произвольной обобщенной функцией из пространства типа W', изучить поведение указанных сверток при $t \to +0$ в пространствах обобщенных функций типа W'. Такие уравнения являются естественными обобщениями сингулярных параболических уравнений и важны с точки зрения применений в теории уравнений с частными производными.

1. Пространства основных и обобщенных функций

Символами W_M^Ω, $\mathring{W}_M^\Omega$, $\mathring{W}_M^\Omega(\mathbb{R})$ будем обозначать пространства типа W, введенные в [1].

Поступила 08.05.2008

Напомним также, что мультипликатором в пространстве W_M^Ω будет каждая целая однозначная функция $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая условию ([3], с. 25)

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C} : |\varphi(z)| \leq c_\varepsilon \exp\{M(\varepsilon x) + \Omega(\varepsilon y)\}. \tag{1}$$

Каждая четная целая функция, удовлетворяющая условию (1), будет мультипликатором в пространстве $\mathring{W}_M^\Omega$, а ее сужение на $\mathbb{R}$ – мультипликатором в пространстве $\mathring{W}_M^\Omega(\mathbb{R})$.

Символом $\big(\mathring{W}_M^\Omega(\mathbb{R})\big)'$ обозначим пространство всех линейных непрерывных функционалов над соответствующим пространством основных функций со слабой сходимостью, а его элементы назовем обобщенными функциями. Регулярными обобщенными функциями или регулярными функционалами будем называть линейные непрерывные функционалы, действие которых на основные функции определяется по формуле

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^\infty f(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx, \quad \nu > -1/2, \ \ \varphi \in \mathring{W}_M^\Omega(\mathbb{R}),$$

ν — фиксированный параметр. Каждая локально интегрируемая четная на $\mathbb{R}$ функция f, удовлетворяющая условию

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq c_\varepsilon e^{M(\varepsilon x)}, \tag{A}$$

порождает регулярную обобщенную функцию $F_f \in (\mathring{W}_M^\Omega(\mathbb{R}))'$:

$$\langle F_f, \varphi \rangle = \int_0^\infty f(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx \ \ \forall \varphi \in \mathring{W}_M^\Omega(\mathbb{R}).$$

Теорема 1. *Если локально интегрируемые четные на $\mathbb{R}$ функции f и g, удовлетворяющие условию* (A)*, не совпадают на множестве положительной меры Лебега, то существует функция $\varphi_0 \in \mathring{W}_M^\Omega(\mathbb{R})$ такая, что $\langle f, \varphi_0 \rangle \neq \langle g, \varphi_0 \rangle$, т. е. $F_f \neq F_g$.*

Обратно, если $F_f \neq F_g$, то функции f и g не совпадают на множестве положительной меры Лебега.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы из [4].

Эта теорема позволяет отождествлять локально интегрируемые функции, удовлетворяющие условию (A), с порождаемыми ими обобщенными функциями из пространства $(\mathring{W}_M^\Omega(\mathbb{R}))'$. Из свойств интеграла Лебега следует, что вложение

$$\mathring{W}_M^\Omega(\mathbb{R}) \ni f \longrightarrow F_f \in \big(\mathring{W}_M^\Omega(\mathbb{R})\big)'$$

является непрерывным.

Так как в пространстве $\mathring{W}_M^\Omega(\mathbb{R})$ определена операция обобщенного сдвига аргумента, то свертку обобщенной функции $f \in \big(\mathring{W}_M^\Omega(\mathbb{R})\big)'$ с основной функцией определим по формуле

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) \rangle = \langle f_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi) \rangle;$$

здесь f_ξ обозначает действие функционала f по переменной ξ; T_x^ξ — оператор обобщенного сдвига аргумента, который отвечает оператору Бесселя [5]:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int_0^\pi \varphi\big(\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos\omega}\,\big) \sin^{2\nu}\omega\, d\omega, \quad \varphi \in \mathring{W}_M^\Omega(\mathbb{R}),$$

$b_\nu = \Gamma(\nu + 1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu + 1/2))$, $\nu > -1/2$.

Если $f \in \big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})\big)'$ и $f * \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$ для любой основной функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$, то функционал f называется *свертывателем в пространстве* $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$.

В пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$ определена и непрерывна операция преобразования Бесселя [6]:

$$\psi(\sigma) \equiv F_B[\varphi](\sigma) := \int_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx, \quad \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}),$$

при этом

$$\varphi(x) \equiv F_B^{-1}[\psi](x) := c_\nu \int_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma,$$

где $c_\nu = (2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1))^{-1}$, j_ν — нормированная функция Бесселя, $\nu > -1/2$. Пространства типа $\overset{\circ}{W}(\mathbb{R})$ преобразованием Бесселя отображаются в пространства того же типа, а именно, как доказано в [6], $F_B\big[\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})\big] = \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ (здесь Ω_1 и M_1 — функции, двойственные по Юнгу соответственно к функциям M и Ω ([3], с. 26)).

Так как $F_B[\varphi] \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$, где $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$, то преобразование Бесселя обобщенной функции $f \in (\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}))'$ определим формулой

$$\langle F_B[f], \varphi\rangle = \langle f, F_B[\varphi]\rangle \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Из (2), свойств линейности и непрерывности функционала f, а также преобразования Бесселя основных функций следует линейность и непрерывность функционала $F_B[f]$ над пространством основных функций $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$. При этом, если обобщенная функция $f \in (\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}))'$ — свертыватель в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$, то для произвольной функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$ имеет место формула $F_B[f * \varphi] = F_B[f]F_B[\varphi]$ (доказательство см. в [1]).

2. Задача Коши

а) *Предварительные сведения.* Символом $\overset{0}{P}{}^{\Omega}_{M}$ обозначим класс целых четных функций $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, являющихся мультипликаторами в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$ и таких, что $e^{\varphi} \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$.

Например, пусть $\varphi(z) = P(z)$, $z = x + iy$, — четный полином степени $2b$, $b \in \mathbb{N}$, над полем комплексных чисел, удовлетворяющий условию

$$\exists c > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : \operatorname{Re} P(x) \le -c|x|^{2b}.$$

Очевидно, P — мультипликатор в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$. Кроме того,

$$\big|e^{tP(x)}\big| = e^{\operatorname{Re} P(x)} \le e^{-c|x|^{2b}}, \quad x \in \mathbb{R};$$
$$\exists c_1 > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C} : \Big|e^{P(z)}\Big| \le e^{|P(z)|} \le e^{c_1|z|^{2b}}.$$

Тогда, воспользовавшись теоремами из ([7], с. 210), являющимися обобщениями теоремы Фрагмена–Линделёфа, получим, что функция $e^{P(z)}$ в комплексной плоскости удовлетворяет также неравенству

$$\Big|e^{P(z)}\Big| \le c_0 e^{-c_2|x|^{2b} + c_3|y|^{2b}}, \quad c_0 > 0, \quad c_2 > 0, \quad c_3 > 0,$$

т. е. $e^P \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$, где $M(x) = x^{2b}$, $\Omega(y) = y^{2b}$. Пространство $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$ с данными функциями M и Ω совпадает с подпространством $\overset{0}{S}{}^{1-1/2b}_{1/2b}$, состоящим из четных функций пространства $S^{1-1/2b}_{1/2b}$ ([7], с. 210).

Указанному условию удовлетворяет каждая целая четная функция φ, для которой $\operatorname{Re}\varphi(z) \le -M(ax) + \Omega(by)$.

Пусть $\varphi \in \overset{0}{P}{}^{\Omega}_{M}$, т. е.

$$\exists c_0,\ a, b > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C} : |e^{\varphi(z)}| \le c_0 e^{-M(ax)+\Omega(by)}.$$

Тогда функция $Q(t,z) := e^{t\varphi(z)}$, $t \in (0,T]$, при фиксированном $t \in (0,T]$ как функция аргумента z принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$, так как

$$|e^{t\varphi(z)}| = |e^{\varphi(z)}|^t \le \left[c_0 e^{-M(ax)+\Omega(by)}\right]^t \le c e^{-tM(ax)+t\Omega(by)}, \tag{3}$$

где $c = \max\{1, c_0^T\}$. Пусть

$$G(t,\sigma) = F_B^{-1}[Q(t,x)](\sigma) = c_\nu \int_0^\infty e^{t\varphi(x)} j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx, \quad t \in (0,T], \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Лемма 1. $G(t,\cdot) \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}$ *при каждом фиксированном* $t \in (0,T]$, *где* M_1 *— функция, двойственная по Юнгу к* Ω, *а* Ω_1 *— функция, двойственная по Юнгу к* M; *при этом*

$$\exists b_1 > b,\ \exists b_2 \in (0,a)\ \forall k \in \mathbb{Z}_+\ \exists d_{k\nu} > 0\ \forall t \in (0,T] :$$

$$|B^k_{\nu,s} G(t, \sigma + i\tau)| \le d_{k\nu} t^{-(2k+\omega+3/2)} \exp\left\{ -tM_1\left(\frac{\sigma}{b_1 t}\right) + t\Omega_1\left(\frac{\tau}{b_2 t}\right)\right\},$$

$$\{\sigma,\tau\} \subset \mathbb{R}, \quad s = \sigma + i\tau, \quad \nu + \frac{1}{2} \equiv p_0 \in \mathbb{N}, \quad \omega = \begin{cases} \nu, & \text{если } 0 < T \le 1; \\ 0, & \text{если } T > 1 \end{cases}$$

(*здесь* a, $b > 0$ *— постоянные из неравенства* (3), $B_{\nu,s} := \frac{d^2}{ds^2} + \frac{2\nu+1}{s}\frac{d}{ds}$ *— оператор Бесселя, действующий по переменной* $s \in \mathbb{C}$).

Доказательство. Из свойств преобразования Бесселя следует

$$B^k_\nu G(t,\sigma) = B^k_\nu [c_\nu F_B[Q(t,x)](\sigma)] = c_\nu B^k_\nu F_B[Q(t,x)](\sigma) =$$
$$= c_\nu F_B[(-x^2)^k Q(t,x)](\sigma) = (-1)^k c_\nu \int_0^\infty e^{t\varphi(x)} j_\nu(\sigma x) x^{2k+2\nu+1} dx$$

(здесь B_ν — оператор Бесселя, действующий по действительной переменной x). Так как функция $\psi(x) = (-x^2)^k Q(t,x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$ (при каждом $t \in (0,T]$), то функция $F_B[\psi](\sigma) = F_B[(-x^2)^k Q(t,x)](\sigma) = \frac{1}{c_\nu} B^k_\nu G(t,\sigma)$ допускает аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость и $F_B[\psi] \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}$. Следовательно, имеет место формула

$$\gamma(s) := B^k_{\nu,s} G(t, \sigma + i\tau) = (-1)^k c_\nu \int_0^\infty e^{t\varphi(x)} j_\nu((\sigma + i\tau)x) x^{2k+2\nu+1} dx, \quad s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}.$$

Далее воспользуемся следующим представлением функции Бесселя ([8], с. 15):

$$j_\nu(s) = \widetilde{c}_\nu s^{-\nu} \{e^{-\pi(\nu+1)i/2} K_\nu(-is) + e^{\pi(\nu+1)i/2} K_\nu(is)\}, \quad \nu > -\frac{1}{2}, \quad s = \sigma + i\tau, \quad \operatorname{Im} s \ne 0,$$

где $K_\nu(s)$ определяется с помощью функции Ганкеля первого рода:

$$K_\nu(xz) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}(\nu+1/2)^{-1}x^\nu e^{-xz}\int_0^\infty e^{-xt}t^{\nu-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{t}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt, \quad |\arg z|<\pi, \quad x>0.$$

Следовательно,

$$\gamma(s) = \approx\!\!\!c \cdot s^{-\nu}\left[\int_0^\infty \Psi_1(t,s,x)dx + \int_0^\infty \Psi_2(t,s,x)dx\right], \tag{4}$$

где

$$\Psi_1(t,s,x) = Q(t,x)x^{2k+\nu+1}e^{-\pi(\nu+1)i/2}K_\nu(-isx),$$
$$\Psi_2(t,s,x) = Q(t,x)x^{2k+\nu+1}e^{\pi(\nu+1)i/2}K_\nu(isx), \quad Q(t,x)=e^{t\varphi(x)}.$$

В (4) от интегрирования вдоль действительной полуоси перейдем к интегрированию вдоль полупрямой в комплексной плоскости, параллельной действительной полуоси. Для этого отметим, что функции $\Psi_1(t,s,z)$, $\Psi_2(t,s,z)$ после доопределения по непрерывности в точке $z=0$ становятся непрерывными по $z\in\mathbb{C}$ и аналитическими в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ ($\operatorname{Im} z<0$). Интеграл по z от $\Psi_1(t,s,z)$ вдоль замкнутого контура γ_h^+ (рис. 1) равен нулю.

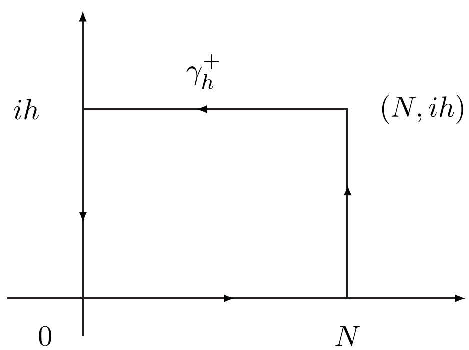

Fig. 1.

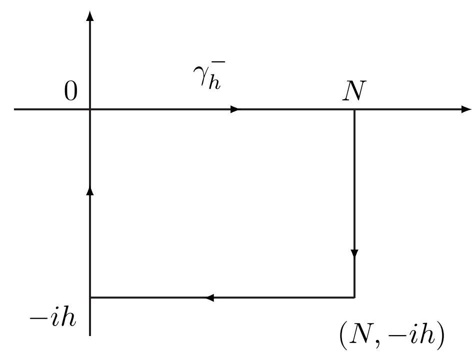

Fig. 2.

Поэтому

$$\int_0^N \Psi_1(t,s,x)dx = i\int_0^h \Psi_1(t,s,iy)dy + \int_0^N \Psi_1(t,s,x+ih)dx - i\int_0^h \Psi_1(t,s,N+iy)dy. \tag{5}$$

Поскольку $Q(t,z)$ удовлетворяет неравенству (3), а

$$|K_\nu(z)| \le c(1+|z|^\nu)|z|^{-\nu-1/2}e^{\operatorname{Re} z} \tag{6}$$

([8], с. 15), то третий интеграл в правой части (5) сходится к нулю при $N\to\infty$ для любого h. Устремив в (5) N к бесконечности, получим

$$\int_0^\infty \Psi_1(t,s,x)dx = i\int_0^h \Psi_1(t,s,iy)dy + \int_0^\infty \Psi_1(t,s,x+ih)dx. \tag{7}$$

Свойства функции Ψ_2 аналогичны свойствам функции Ψ_1, поэтому, если для функции $\Psi_2(t,s,x)$ взять контур интегрирования γ_h^- (рис. 2), то

$$\int_0^\infty \Psi_2(t,s,x)dx = -i\int_0^h \Psi_2(t,s,-iy)dy + \int_0^\infty \Psi_2(t,s,x-ih)dx. \tag{8}$$

Поскольку $\Psi_2(t,s,-iy)=\Psi_1(t,s,iy)$, то вследствие (7), (8) имеем

$$\gamma(s)=\approx{c}s^{-\nu}\left[\int_0^\infty \Psi_1(t,s,x+ih)dx+\int_0^\infty \Psi_2(t,s,x-ih)dx\right]\equiv$$
$$\equiv J_1(t,s)+J_2(t,s),\quad \operatorname{Im} s\neq 0,\quad h>0.$$

Оценим J_1 с учетом (6) и (3):

$$|J_1(t,s)|\le ce^{t\Omega(bh)-\sigma h}|s|^{-(2\nu+1/2)}\int_0^\infty e^{-tM(ax)+|\tau|x}(1+|s|^\nu|x+ih|^\nu)|x+ih|^{2k+1/2}dx.$$

Так как Ω_1 — функция, двойственная по Юнгу к функции M, то

$$-tM(ax)+\frac{t}{2}\left(ax\frac{2|\tau|}{at}\right)\le -tM(ax)+\frac{t}{2}\left[M(ax)+\Omega_1\left(\frac{2|\tau|}{at}\right)\right]=-\frac{t}{2}M(ax)+\frac{t}{2}\Omega_1\left(\frac{2|\tau|}{at}\right).$$

Тогда

$$|J_1(t,s)|\le ce^{t\Omega(bh)-\sigma h}|s|^{-(2\nu+1/2)}e^{\frac{t}{2}\Omega_1\left(\frac{2|\tau|}{at}\right)}\times$$
$$\times\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}M(ax)}\big(|x+ih|^{2k+1/2}+|s|^\nu|x+ih|^{2k+\nu+1/2}\big)dx.$$

Введем обозначения:

$$\Phi_1(t,h)=\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}M(ax)}|x+ih|^{2k+\nu+1/2}dx,\quad \Phi_2(t,h)=\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}M(ax)}|x+ih|^{2k+1/2}dx.$$

Поскольку

$$|x+ih|^{2k+\nu+1/2}\le(\sqrt{2})^{2k+\nu+1/2}(x^{2k+\nu+1/2}+h^{2k+\nu+1/2}),$$

то

$$\Phi_1(t,h)\le(\sqrt{2})^{2k+\nu+1/2}\left[\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}M(ax)}x^{2k+\nu+1/2}dx+h^{2k+\nu+1/2}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}M(ax)}dx\right].$$

Функция $M(ax)$ возрастает на $[0,+\infty)$ быстрее любой линейной функции, т. е. $M(ax)\ge c_0ax$, $c_0>0$. Тогда

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}M(ax)}x^{2k+\nu+1/2}dx\le\int_0^\infty e^{-tc_0'x}x^{2k+\nu+1/2}dx\le c'_{k\nu}t^{-(2k+\nu+3/2)}\le c'_{k\nu}t^{-(2k+\nu+3/2)}e^{t\Omega(bh)}.$$

Кроме того,

$$h^{2k+\nu+1/2}=(bt)^{-(2k+\nu+1/2)}(bth)^{2k+\nu+1/2}\le(bt)^{-(2k+\nu+1/2)}(2k+\nu+1/2)!e^{tbh}\le$$
$$\le c''_{k\nu}t^{-(2k+\nu+1/2)}e^{t\Omega(bh)},$$

т. е.

$$h^{2k+\nu+1/2}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}M(ax)}dx\le c''_{k\nu}t^{-(2k+\nu+1/2)}e^{t\Omega(bh)}\int_0^\infty e^{-tc_0'x}dx=\beta_{k\nu}t^{-(2k+\nu+3/2)}e^{t\Omega(bh)}.$$

Следовательно,

$$\Phi_1(t,h)\le\beta'_{k\nu}t^{-(2k+\nu+3/2)}e^{t\Omega(bh)}.$$

Аналогично получаем

$$\Phi_2(t,h)\le\beta''_{k\nu}t^{-(2k+3/2)}e^{t\Omega(bh)}.$$

Таким образом, для $t\in(0,T]$ имеет место оценка

$$|J_1(t,s)|\le\alpha_{k\nu}e^{2t\Omega(bh)-\sigma h+\frac{t}{2}\Omega_1\left(\frac{2|\tau|}{at}\right)}(1+|s|^\nu)|s|^{-(2\nu+1/2)}t^{-(2k+\omega+3/2)}.$$

Поскольку M_1 — функция, двойственная по Юнгу к функции Ω, то, считая $\sigma > 0$, подберем величину h так, чтобы неравенство Юнга для указанных функций превратилось в равенство вида

$$\sigma h = 2t\left(\frac{\sigma}{2tb}\cdot bh\right) = 2t\left(M_1\left(\frac{\sigma}{2tb} + \Omega(bh)\right)\right).$$

Тогда

$$2t\Omega(bh) - \sigma h = -2tM_1\left(\frac{\sigma}{tb_1}\right), \quad b_1 = 2b > b.$$

Следовательно,

$$|J_1(t,s)| \le \alpha_{k\nu} t^{-(2k+\nu+3/2)} e^{-2tM_1\left(\frac{\sigma}{tb_1}\right) + t\Omega_1\left(\frac{\tau}{ta_1}\right)} (1+|s|^\nu)|s|^{-(2\nu+1/2)},$$

где $a_1 = \frac{a}{2} < a$. Предположим, что $\sigma \ge b_1$, $|\tau| \ge a_1$. Тогда $|s|^{-(2\nu+1/2)} \le 1$. Оценим теперь выражение

$$\Delta := \exp\left\{-2tM_1\left(\frac{\sigma}{tb_1}\right) + t\Omega_1\left(\frac{\tau}{ta_1}\right)\right\}(1+|s|^\nu).$$

При указанных ограничениях на σ, τ имеем

$$|\tau|^\nu = a_1^\nu\left(\frac{|\tau|}{a_1}\right)^\nu \le a_1^\nu\left(\frac{|\tau|}{a_1}\right)^{[\nu]+1} \le a_1^\nu([\nu]+1)!e^{\frac{|\tau|}{a_1}} \le a_1^\nu([\nu]+1)!e^{t\Omega_1\left(\frac{\tau}{ta_1}\right)}.$$

Аналогично устанавливаем, что

$$\sigma^\nu \le b_1^\nu([\nu]+1)!\exp\left\{t\Omega_1\left(\frac{\sigma}{tb_1}\right)\right\}.$$

Поскольку $(1+|s|^\nu) \le \omega_0(\sigma^\nu + |\tau|^\nu)$, $\sigma \ge b_1$, $|\tau| \ge a_1$, то

$$\Delta \le ([\nu]+1)!\omega_0\left[a_1^\nu e^{-2tM_1\left(\frac{\sigma}{tb_1}\right)+2t\Omega_1\left(\frac{\tau}{ta_1}\right)} + b_1^\nu e^{-tM_1\left(\frac{\sigma}{tb_1}\right)+t\Omega_1\left(\frac{\tau}{ta_1}\right)}\right] \le$$
$$\le \gamma_\nu e^{-tM_1\left(\frac{\sigma}{tb_1}\right)+2t\Omega_1\left(\frac{\tau}{ta_1}\right)} \le \gamma_\nu e^{-tM_1\left(\frac{\sigma}{tb_1}\right)+t\Omega_1\left(\frac{2\tau}{ta_1}\right)},$$

$\gamma_\nu = \omega_0(a_1^\nu + b_1^\nu)([\nu]+1)!$.

Таким образом, для $\sigma \ge b_1$, $|\tau| \ge a_1$ выполняется неравенство

$$|J_1(t,s)| \le d'_{k\nu} t^{-(2k+\nu+3/2)} e^{-tM_1\left(\frac{\sigma}{tb_1}\right)+t\Omega_1\left(\frac{\tau}{tb_2}\right)}, \quad b_2 = \frac{a_1}{2}.$$

Аналогично оцениваем $|J_2(t,s)|$. Итак, для σ, τ: $\sigma \ge b_1$, $|\tau| \ge a_2$

$$|\gamma(s)| \le d''_{k\nu} t^{-(2k+\nu+3/2)} e^{-tM_1\left(\frac{\sigma}{tb_1}\right)+t\Omega_1\left(\frac{\tau}{tb_2}\right)}, \quad t \in (0, T^*]. \tag{9}$$

Поскольку $B^k_{\nu,s}G(t, \sigma + i\tau)$ — непрерывная функция аргумента $\sigma + i\tau$, то существует $d_{k,\nu} > 1$ такое, что оценка (9) выполняется для всех $\sigma + i\tau \in \mathbb{C}$. □

Лемма 2. *Функция $G(t,\cdot)$, $t \in (0,T]$, как абстрактная функция параметра t со значениями в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}$, дифференцируема по t.*

Доказательство леммы использует свойство непрерывности преобразования Бесселя (прямого и обратного) в пространствах типа $\overset{\circ}{W}$, благодаря которому достаточно установить, что функция $F_B[G(t,\cdot)] = e^{t\varphi(\cdot)}$, как абстрактная функция параметра t со значениями в пространстве $F_B[\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}] = \overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$, дифференцируема по t, т. е. предельное соотношение

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\exp\left\{(t+\Delta t)\varphi(z)\right\} - \exp\{t\varphi(z)\}\right] \longrightarrow \varphi(z)\exp\{t\varphi(z)\}, \quad \Delta t \to 0,$$

выполняется в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$ (отметим, что при доказательстве последнего соотношения существенно используется свойство выпуклости функций M и Ω).

Следствие. Имеет место формула

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G)(t,\cdot) = \left(f*\frac{\partial}{\partial t}G\right)(t,\cdot) \ \ \forall f \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\right)', \ \ t\in(0,T].$$

Лемма 3. *Пусть обобщенная функция* $f \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\right)'$ *— свертыватель в пространстве* $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$,

$$\omega(t,x) := (f*G)(t,x), \quad t\in(0,T], \quad x\in\mathbb{R}.$$

Тогда предельное соотношение $\omega(t,\cdot)\to f$, $t\to+0$, *выполняется в пространстве* $\left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\right)'$.

Доказательство. Из свойств непрерывности преобразования Бесселя в пространствах типа $\overset{\circ}{W}$ и $(\overset{\circ}{W})'$ следует, что для доказательства утверждения достаточно установить, что предельное соотношение

$$F_B[\omega](t,\cdot)\to F_B[f], \quad t\to+0, \tag{10}$$

выполняется в пространстве $F_B\left[\left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\right)'\right] = \left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})\right)'$. Так как f — свертыватель в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$, то имеет место формула

$$F_B[\omega(t,\cdot)] = F_B[(f*G)(t,\cdot)] = F_B[f]F_B[G] = e^{t\varphi(\cdot)}F_B[f],$$

причем $F_B[f]$ — мультипликатор в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$. Следовательно, (10) эквивалентно предельному соотношению $e^{t\varphi(\cdot)}\to 1$, $t\to+0$, в пространстве $\left(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})\right)'$, т. е.

$$\langle e^{t\varphi(\cdot)},\psi\rangle = \int_0^\infty e^{t\varphi(\sigma)}\psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma \xrightarrow[t\to+0]{} \langle 1,\psi\rangle = \int_0^\infty \psi(\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma \ \ \forall\psi\in\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}). \tag{11}$$

Соотношение (11) является следствием теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. □

б) *Оператор, сопряженный к оператору Бесселя бесконечного порядка.* Пусть $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{2n}z^{2n}$ — целая четная функция, являющаяся мультипликатором в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$, $\varphi(B_{\nu,z}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{2n}(-B_{\nu,z})^n$ — оператор Бесселя бесконечного порядка, построенный по функции φ и действующий в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}$. Как доказано в [1], оператор $\varphi(B_{\nu,z})$ непрерывен в $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}$. Символом A_φ обозначим сужение оператора $\varphi(B_{\nu,z})$ на $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$, при этом $(A_\varphi\psi)(x) = F_B^{-1}[\varphi(\xi)F_B[\psi](\xi)](x)$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}$. Из сказанного выше следует

$$|(A_\varphi\psi)(x)| \le c_\varphi \ \ \forall\psi\in\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}), \ \ \forall x\in\mathbb{R}, \tag{12}$$

где постоянная c_φ не зависит от x.

Из линейности и непрерывности оператора A_φ вытекает линейность и непрерывность сопряженного оператора A_φ^*, действующего в пространстве $\big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'$ по формуле

$$\langle A_\varphi^* g, \psi\rangle = \langle g, A_\varphi \psi\rangle, \quad g \in \big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)', \quad \psi \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}). \tag{13}$$

Выясним, какой вид имеет сужение оператора A_φ^* на пространство $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}) \subset (\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'$, т. е. в (13) считаем $\{g, \varphi\} \subset \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$. На основании (12) утверждаем, что интеграл $\int_0^\infty g(x)(A_\varphi \psi)x^{2\nu+1}(x)dx$ является абсолютно сходящимся для произвольной основной функции $g \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$. Поэтому вследствие теоремы Фубини имеют место преобразования

$$\begin{aligned}
\langle g, A_\varphi \psi\rangle &= \int_0^\infty g(x)(A_\varphi\psi)(x)x^{2\nu+1}dx = \\
&= c_\nu \int_0^\infty g(x)\bigg(\int_0^\infty \varphi(\xi)F_B[\psi](\xi)j_\nu(x\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi\bigg)x^{2\nu+1}dx = \\
&= c_\nu \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(\xi)g(x)j_\nu(x\xi)x^{2\nu+1}F_B[\psi](\xi)\xi^{2\nu+1}dx\,d\xi = \\
&= \int_0^\infty \varphi(\xi)F_B^{-1}[g](\xi)F_B[\psi](\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi = \\
&= \int_0^\infty \varphi(\xi)F_B^{-1}[g](\xi)\bigg(\int_0^\infty \psi(x)j_\nu(x\xi)x^{2\nu+1}dx\bigg)\xi^{2\nu+1}d\xi = \\
&= \int_0^\infty \psi(x)\bigg(\int_0^\infty \varphi(\xi)F_B^{-1}[g](\xi)j_\nu(x\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi\bigg)x^{2\nu+1}dx = \\
&= \int_0^\infty \psi(x)F_B[\varphi(\xi)F_B^{-1}[g](\xi)](x)x^{2\nu+1}dx \equiv \\
&\equiv \int_0^\infty (A_\varphi^* g)(x)\psi(x)dx = \langle A_\varphi^* g, \psi\rangle, \quad \{g, \psi\} \subset \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\forall g \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}) \;\; A_\varphi^* g = F_B[\varphi \cdot F_B^{-1}[g]].$$

в) *Основные результаты.* Пусть $\varphi \in \overset{0}{P}{}^{\Omega}_{M}$, A_φ — оператор Бесселя бесконечного порядка, построенный по функции φ. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_\varphi u, \quad (t, x) \in (0, T] \times (0, \infty) \equiv \Omega_+. \tag{14}$$

Под решением уравнения (14) *будем понимать функцию* $u : (0, T] \ni t \to u(t, \cdot) \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$, *дифференцируемую по* t *и удовлетворяющую уравнению* (14).

Символом $\big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'_*$ обозначим совокупность всех свертывателей в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$. Таким образом, если $f \in \big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'_*$, то $\omega(t, \cdot) = (f * G)(t, \cdot) \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ при каждом $t \in (0, T]$. Из свойств функции $G(t, \cdot)$ как абстрактной функции параметра t со значениями в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ (см. следствие) вытекает

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G)(t, \cdot) = \left(f * \frac{\partial}{\partial t} G\right)(t, \cdot).$$

Кроме того,

$$A_\varphi \omega(t, x) = F_B^{-1}[\varphi(\sigma) F_B[(f * G)(t, x)](\sigma)](x).$$

Так как f — свертыватель в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$, то

$$F_B[(f * G)(t, x)](\sigma) = F_B[f] F_B[G(t, x)](\sigma) = F_B[f] e^{t\varphi(\sigma)}.$$

Следовательно,

$$A_\varphi \omega(t, x) = F_B^{-1}[\varphi(\sigma) e^{t\varphi(\sigma)} F_B[f](\sigma)](x) = F_B^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} e^{t\varphi(\sigma)} F_B[f](\sigma)\right](x) =$$
$$= F_B^{-1}\left[F_B\left[\frac{\partial}{\partial t} G(t, x)\right](\sigma) F_B[f](\sigma)\right](x) =$$
$$= F_B^{-1}\left[F_B\left[\left(f * \frac{\partial}{\partial t} G\right)(t, x)\right](\sigma)\right](x) = \left(f * \frac{\partial}{\partial t} G\right)(t, x).$$

Таким образом, функция $\omega(t, x)$, $(t, x) \in \Omega_+$, удовлетворяет уравнению (14) в обычном смысле. Лемма 3 позволяет ставить задачу Коши для уравнения (14) следующим образом. Зададим для (14) начальное условие

$$u(t, \cdot)|_{t=0} = f, \tag{15}$$

где $f \in \big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'$. *Под решением задачи Коши* (14), (15) *будем понимать решение уравнения* (14), *удовлетворяющее начальному условию* (15), *а именно*: $u(t, \cdot) \to f$ *при* $t \to +0$ *в пространстве* $\big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'$.

Теорема 2. *Задача Коши* (14), (15) *корректно разрешима в классе обобщенных функций* $\big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'_*$; *при этом решение имеет вид*

$$u(t, x) = (f * G)(t, x), \quad f \in \big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'_*, \quad (t, x) \in \Omega_+.$$

Доказательство. Достаточно доказать только свойство единственности решения задачи Коши (14), (15). Для установления единственности решения задачи (14), (15) рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -A_\varphi^* v, \quad (t, x) \in (0, t_0] \times (0, \infty) \equiv \Omega'_+, \tag{16}$$

$$v|_{t=t_0} = f, \quad f \in \big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'_*, \quad 0 < t \le t_0 \le T, \tag{17}$$

где A_φ^* — сужение сопряженного оператора к оператору A_φ на пространство $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}) \subset \big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'$. Условие (17) понимается в слабом смысле. Задачу (16), (17) далее будем называть сопряженной к задаче (14), (15).

Рассмотрим функцию $G^*(t_0 - t, x) = F_B[e^{(t_0 - t)\varphi(\sigma)}](x)$. Аналогично тому, как это было сделано в случае задачи Коши (14), (15), доказываем, что $G^*(t - t_0, x)$, как абстрактная функция параметра t со значениями в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$, дифференцируема по t $(0 < t < t_0 \leq T)$; решение задачи (16), (17) дается формулой

$$v(t,x) = (f * G^*)(t_0 - t, x), \quad (t,x) \in \Omega'_+,$$

при этом $v(t,\cdot) \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ для каждого t, $0 < t < t_0 \leq T$.

Пусть $Q^t_{t_0} : \big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'_* \to \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ — оператор, сопоставляющий элементу $f \in \big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'_*$ решение $v(t,\cdot) \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ задачи (16), (17):

$$\forall f \in \big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'_* \;\; Q^t_{t_0} f = (f * G^*)(t_0 - t, x) \equiv v(t,x),$$
$$v(t,\cdot) \in \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}), \quad (t,x) \in \Omega'_+.$$

Оператор $Q^t_{t_0}$ — линейный и непрерывный, поскольку такими свойствами обладает операция свертки. Он определен для произвольных t и t_0 таких, что $0 < t < t_0 \leq T$, причем

$$\forall f \in \big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'_* \;\; \frac{dQ^t_{t_0} f}{dt} = -A^*_\varphi Q^t_{t_0} f, \quad \lim_{t \to t_0} Q^t_{t_0} f = f$$

(здесь рассматривается слабый предел).

Возьмем теперь решение $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega_+$, задачи Коши (14), (15), которое будем понимать как функционал из пространства $\big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)' \supset \overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$. Докажем, что задача Коши (14), (15) может иметь в пространстве $\big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'$ единственное решение. Для этого достаточно доказать, что единственным решением уравнения (14) при нулевом начальном условии может быть только функционал $u(t,x) = 0$ (так как u непрерывно зависит от начальной функции $f \in \big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'_*$ вследствие непрерывности операции свертки). Зафиксируем произвольно t_0, $0 < t_0 \leq T$, и применим функционал $u(t,x)$ к функции $Q^t_{t_0}\psi$, $0 < t \leq t_0 \leq T$, где ψ — произвольный функционал пространства $\big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'_*$. Дифференцируя по t и используя уравнения (14) и (16), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u(t,x), Q^t_{t_0}\psi\rangle = \Big\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q^t_{t_0}\psi \Big\rangle + \Big\langle u, \frac{\partial Q^t_{t_0}\psi}{\partial t} \Big\rangle = \langle A_\varphi u, Q^t_{t_0}\psi\rangle - \langle u, A^*_\varphi Q^t_{t_0}\psi\rangle =$$
$$= \langle A_\varphi u, Q^t_{t_0}\psi\rangle - \langle A_\varphi u, Q^t_{t_0}\psi\rangle = 0, \quad \psi \in \big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'_*.$$

Отсюда вытекает, что $\langle u(t,x), Q^t_{t_0}\psi\rangle$ — постоянная величина. Используя начальное условие $u|_{t=0} = 0$ находим, что эта величина при всех t, $0 < t < t_0$, равна нулю. В частности, при $t \to t_0$ (в слабом понимании предела) получаем $\langle u(t_0,x), \psi\rangle = 0$. Так как ψ — произвольный элемент пространства $\big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'_*$, а $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}) \subset \big(\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\big)'_*$, то $\langle u(t_0,x), \psi\rangle = 0$ для всех ψ из пространства $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$. Поэтому $u(t_0,x)$ — нулевой функционал. Поскольку t_0 выбрано произвольно между 0 и T (включая случай $t_0 = T$), то $u(t,x) \equiv 0$ для всех $t \in (0,T]$. □

Отметим, что теорему 2 можно сформулировать следующим образом.

Если преобразование Бесселя начальной функции для уравнения (14) *является мультипликатором в пространстве* $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$, *то задача Коши* (14), (15) *корректно разрешима и ее решение имеет вид* $u(t,x) = (f * G)(t,x)$, $(t,x) \in \Omega_+$.

Действительно, если $F_B[f]$ — мультипликатор в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$, то обобщенная функция f — свертыватель в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$. Следовательно, имеет место утверждение теоремы 2.

Замечание. Полученные здесь результаты имеют место и в n-мерном случае, а также для: 1) эволюционных уравнений с оператором, действующим по одной группе независимых переменных как оператор дифференцирования бесконечного порядка, а по другой группе переменных — как оператор Бесселя бесконечного порядка; 2) сингулярных эволюционных уравнений бесконечного порядка, содержащих оператор дробного дифференцирования по временной переменной.

Литература

[1] Городецкий В.В., Мартынюк О.В. *Задача Коши для эволюционных уравнений с оператором Бесселя бесконечного порядка.* I, Изв. вузов. Математика, № 6, 3–15 (2010).

[2] Гуревич Б.Л. *Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных систем*, ДАН СССР **99** (6), 893–896 (1954).

[3] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений* (Физматгиз, М., 1958).

[4] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности задачи Коши*, УМН **8** (6), 3–54 (1953).

[5] Житомирский Я.И. *Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя*, Матем. сб. **36** (2), 299–310 (1955).

[6] Крехивский В.В. *Теоремы единственности решений задачи Коши для уравнений с оператором Бесселя*, Матем. моделир. физ. проц., Киев, Ин-т математики АН УССР, 82–86 (1989).

[7] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Пространства основных и обобщенных функций* (Физматгиз, М., 1958).

[8] Матійчук М.І. *Параболічні сингулярні крайові задачі* (Інститут математики НАН України, Київ, 1999).

В.В. Городецкий

профессор, заведующий кафедрой алгебры и информатики,
Черновицкий национальный университет,
ул. Коцюбинского, д. 2, г. Черновцы, 58000, Украина

О.В. Мартынюк

доцент, кафедра алгебры и информатики,
Черновицкий национальный университет,
ул. Коцюбинского, д. 2, г. Черновцы, 58000, Украина,

e-mail: alfaolga@rambler.ru

V.V. Gorodetskii

Professor, Head of the Chair of Algebra and Information Science,
Chernovtsy National University,
2 Kotsyubin'skii str., Chernovtsy, 58000 Ukraine

O.V. Martynyuk

Associate Professor, Chair of Algebra and Information Science,
Chernovtsy National University,
2 Kotsyubin'skii str., Chernovtsy, 58000 Ukraine,

e-mail: alfaolga@rambler.ru