ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 5 (444)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.988.8

С.Е. ЖЕЛЕЗОВСКИЙ, Н.Н. БУКЕСОВА

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ АБСТРАКТНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В работе приводятся асимптотические оценки погрешности проекционного метода (полудискретного метода Галёркина) решения задачи Коши для абстрактного гиперболического уравнения в гильбертовом пространстве. Подобные оценки ранее устанавливались в [1], [2], но только при специальном выборе подпространств, в которых должны принимать значения приближенные решения, тогда как в данной работе эти подпространства не подчинены никаким ограничительным условиям. Из работ по обоснованию проекционного метода для различных задач отметим также [3]–[8].

Будем использовать стандартные обозначения $\mathcal{L}(X;Y)$, $L^p(0,T;X)$, $C^k([0,T];X)$, где X и Y — банаховы пространства, $[0,T]$ — отрезок оси $\mathbb{R}$ (см., напр., [9], с. 579), а также следующие обозначения: $\mathcal{L}(X)=\mathcal{L}(X;X)$, $\mathcal{H}(X)$ — пространство эрмитовых форм $h(\cdot,\cdot\cdot)$ в X, для которых

$$\|h\|_{\mathcal{H}(X)}=\sup_{x,y\in X\setminus\{0\}}|h(x,y)|\cdot\|x\|_X^{-1}\|y\|_X^{-1}<\infty,$$

$W^{k,p}(0,T;X)$ — пространство функций, отображающих $[0,T]$ в X и принадлежащих $L^p(0,T;X)$ вместе со своими производными до k-го порядка включительно.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $[0,T]$ — заданный отрезок оси $\mathbb{R}$. Исходная задача Коши имеет вид

$$u''(t)+A(t)u(t)=F(t,u(t)),\quad u(0)=u'(0)=0. \tag{1}$$

Здесь $t\in[0,T]$, $\{A(t)\mid t\in[0,T]\}$ — семейство неограниченных самосопряженных положительно-определенных в H операторов с общей областью определения $D(A)$. Пусть A_0 — некоторый самосопряженный положительно-определенный в H оператор, область определения которого совпадает с $D(A)$, имеющий компактный в H обратный оператор A_0^{-1} и такой, что для всех $t\in[0,T]$, $v\in D(A)$ $\|A_0v\|_H\le a_0\|A(t)v\|_H$, где a_0 — константа, не зависящая от t и v. Обозначим через $a(t,\cdot,\cdot\cdot)$, где t — любое число из $[0,T]$, скалярное произведение энергетического пространства ([10], с. 21) оператора $A(t)$ и через V — энергетическое пространство оператора A_0. Примем, что функция "$t\to a(t,\cdot,\cdot\cdot)$" принадлежит $W^{2,1}(0,T;\mathcal{H}(V))$. Оператор F в (1) нелинейный и имеет производную Фреше $DF(t,v)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}\times V;H)$ в каждой точке $(t,v)\in[0,T]\times V$, причем для любого $r\ge 0$ $\sup\limits_{\|v\|_V\le r}\|DF(t,v)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}\times V;H)}$ — суммируемая на $[0,T]$ функция переменной t. Ниже $\partial F(t,v)\in\ \mathcal{L}(V;H)$ — производная Фреше отображения "$v\to F(t,v)$", вычисленная в точке $v\in V$ при фиксированном $t\in[0,T]$.

Зададим такую последовательность $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных подпространств пространства V, что

$$\|R_nv\|_V\to 0\quad\text{при}\quad n\to\infty\quad\forall v\in V; \tag{2}$$

здесь и далее $R_n = I - P_n$, где I — тождественный оператор в V, P_n — ортопроектор в V на V_n. Будем решать задачу (1) проекционным методом

$$(u_n''(t), v_n)_H + a(t, u_n(t), v_n) = (F(t, u_n(t)), v_n)_H, \quad u_n(t) \in V_n, \quad u_n(0) = u_n'(0) = 0, \tag{3}$$

где n — произвольно заданное натуральное число, $t \in [0, T]$, v_n — любой элемент V_n. Действуя в основном по схеме работы [1], можно показать, что на некотором отрезке $[0, t_0] \subset [0, T]$ задача (3) имеет единственное решение $u_n \in C^2([0, t_0]; V_n)$ при любом $n \in \mathbb{N}$, и задача (1) имеет единственное решение u, принадлежащее $W^{2,\infty}(0, t_0; H) \cap W^{1,\infty}(0, t_0; V)$ и такое, что для почти всех (п. в.) $t \in [0, t_0]$ $u(t) \in D(A)$, "$t \to A(t)u(t)$"$\in L^\infty(0, t_0; H)$. При определенном усилении условий на операторы $A(t)$ и F решение задачи (1) обладает повышенной гладкостью, в частности,

$$\text{для п. в.} \quad t \in [0, t_0] \quad u'(t) \in D(A), \quad \text{“}t \to A(t)u'(t)\text{”} \in L^1(0, t_0; H). \tag{4}$$

Положим $\rho_n = \|R_n A_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(H;V)}$, $n \in \mathbb{N}$. Величина ρ_n будет характеризовать скорость сходимости приближенных решений u_n задачи (1), построенных проекционным методом (3), к точному решению. Из (2) и условия компактности оператора A_0^{-1} следует, что $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$. В приложениях, если (1) — первая начально-краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка и V_n — подпространства, соответствующие методу конечных элементов, то для этих подпространств характерно следующее аппроксимационное свойство (см., напр., [11], с. 135): для любых $n \in \mathbb{N}$ и $v \in D(A)$

$$\min_{v_n \in V_n} \|v - v_n\|_V \le c h_n \|A_0 v\|_H,$$

где h_n — максимальный из диаметров конечных элементов, порождающих подпространство V_n, c — константа, не зависящая от n и v. Тогда, очевидно, $\rho_n \le c h_n$. Для другого варианта проекционного метода, когда V_n — собственные подпространства оператора A_0, имеем $\rho_n = \|R_n A_0^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(H)} = \mu_n^{-1/2}$, где μ_n — минимальное из собственных значений оператора A_0, соответствующих его собственным элементам, не принадлежащим V_n.

Обозначим погрешность проекционного метода (3) через Δu_n, т. е. $\Delta u_n = u - u_n$, где $n \in N$, u — точное решение задачи (1), u_n — приближенное решение этой задачи, построенное проекционным методом (3). Приведем оценки погрешности Δu_n в норме пространства $C^1([0, t_0]; H) \cap C^0([0, t_0]; V)$.

Теорема 1. *Погрешность проекционного метода* (3) *для задачи* (1) *допускает оценку*

$$\max_{0 \le t \le t_0} (\|\Delta u_n'(t)\|_H + \|\Delta u_n(t)\|_V) = o(\rho_n^{1/2}) \quad (n \to \infty); \tag{5}$$

если же решение задачи (1) *удовлетворяет условию* (4), *то*

$$\max_{0 \le t \le t_0} (\|\Delta u_n'(t)\|_H + \|\Delta u_n(t)\|_V) = O(\rho_n) \quad (n \to \infty). \tag{6}$$

Обозначим пространство, двойственное к V, через V' и отождествим пространство H с двойственным к нему, так что $V \subset H \subset V'$. Для любого $t \in [0, T]$ определим продолжение оператора $A(t)$ с $D(A)$ на V из тождества $(A(t)v, w) = a(t, v, w)$, где $(\cdot, \cdot\cdot)$ — спаривание элементов пространств V' и V, v и w — любые элементы V. Условие "$t \to a(t, \cdot, \cdot\cdot)$"$\in W^{2,1}(0, T; \mathcal{H}(V))$ равносильно тому, что "$t \to A(t)$"$\in W^{2,1}(0, T; \mathcal{L}(V; V'))$, так что производная первого порядка $A'(t) \in \mathcal{L}(V; V')$ существует в каждой точке $t \in [0, T]$.

Приведем оценки погрешности Δu_n в норме пространства $C^0([0, t_0]; H)$.

Теорема 2. *Пусть для п. в.* $t \in [0, t_0]$ *и для всех* $v \in V$ *оператор* $\partial F(t, v)$ *допускает продолжение с* V *на* H *до оператора из* $\mathcal{L}(H; V')$, *и для любого* $r \ge 0$ $\sup\limits_{\|v\|_V \le r} \|\partial F(t, v)\|_{\mathcal{L}(H;V')}$ — *суммируемая на* $[0, t_0]$ *функция переменной* t. *Тогда*

$$\max_{0 \le t \le t_0} \|\Delta u_n(t)\|_H = o(\rho_n^{5/4}) \quad (n \to \infty). \tag{7}$$

Если также для п. в. $t \in [0, t_0]$ оператор $A'(t)$ отображает $D(A)$ в H и "$t \to A'(t)(A(t))^{-1}$"$\in L^1(0, t_0; \mathcal{L}(H))$, а решение задачи (1) *удовлетворяет условию* (4), *то*

$$\max_{0 \le t \le t_0} \|\Delta u_n(t)\|_H = O(\rho_n^2) \quad (n \to \infty). \tag{8}$$

При выводе оценок (5)–(8) комбинируются элементы техники работ [1]–[4]. Отметим, что по определению ρ_n оценка (6) является точной по порядку аппроксимации элементов из $D(A)$ элементами V_n в норме $\|\cdot\|_V$, откуда нетрудно вывести, что эта оценка неулучшаема в классе решений, обладающих гладкостью (4).

Литература

1. Железовский С.Е. *Метод Бубнова–Галёркина для абстрактной квазилинейной задачи о стационарном действии* // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31. – № 7. – С. 1222–1231.
2. Железовский С.Е. *О скорости сходимости метода Галёркина для одного класса квазилинейных эволюционных задач.* Ред. журн. "Сиб. матем. журн." – Новосибирск, 1998. – 19 с. – Деп. в ВИНИТИ 08.01.98, № 24-В98.
3. Смагин В.В. *Оценки погрешности полудискретных приближений по Галёркину для параболических уравнений с краевым условием типа Неймана* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 3. – С. 50–57.
4. Смагин В.В. *Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений* // Матем. сб. – 1997. – Т. 188. – № 3. – С. 143–160.
5. Ляшко А.Д. *О сходимости методов типа Галёркина* // ДАН СССР. – 1958. – Т. 120. – № 2. – С. 242–244.
6. Тимербаев М.Р., Ляшко А.Д. *Об оценках погрешности схем метода конечных элементов для квазилинейных вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 7. – С. 1239–1243.
7. Соболевский П.Е. *Теорема о смешанных производных и оценка скорости сходимости метода Галёркина для параболических уравнений* // ДАН УССР. Сер. А. – 1987. – № 8. – С. 12–16.
8. Зарубин А.Г. *О скорости сходимости метода Фаэдо–Галёркина для квазилинейных нестационарных операторных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 12. – С. 2051–2059.
9. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 588 с.
10. Михлин С.Г. *Численная реализация вариационных методов.* – М.: Наука, 1966. – 432 с.
11. Сьярле Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических задач.* – М.: Мир, 1980. – 512 с.

Поволжская академия государственной службы

Поступила 06.10.1998