ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 7 (542)

УДК 512.541

Е.М. КОЛЕНОВА

ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫЕ АБЕЛЕВЫ End-ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

В теории абелевых групп важной задачей является изучение связей между абелевой группой и ее группой эндоморфизмов. Возникает вопрос, при каких условиях абелева группа и ее группа эндоморфизмов изоморфны ([1], проблема 31). Ответ на этот вопрос получен в классах вполне разложимых абелевых групп [2], векторных групп [3], в классах периодических абелевых групп, делимых абелевых групп, нередуцированных абелевых групп, редуцированных алгебраически компактных абелевых групп [4].

Группу A будем называть *E^+-группой*, если она изоморфна своей группе эндоморфизмов $\mathrm{End}(A)$.

Ясно, что если абелева группа A является E^+-группой, то и ее группа эндоморфизмов $\mathrm{End}(A)$ тоже является E^+-группой. В данной статье показано, что обратное утверждение не всегда имеет место.

Группу A назовем End-*группой*, если имеет место импликация

$$\mathrm{End}(\mathrm{End}(A)) \cong \mathrm{End}(A) \Rightarrow \mathrm{End}(A) \cong A.$$

Из определения следует, что A является End-группой, если из того, что $\mathrm{End}(A)$ есть E^+-группа, следует, что и A является E^+-группой.

В данной работе найдены End-группы в классе вполне разложимых абелевых групп без кручения.

Для простоты изложения определим некоторые используемые в работе понятия и обозначения: $\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел, $\aleph_0$ — наименьший бесконечный кардинал, $r(A)$ — ранг группы A, $\tau(A)$ — тип группы без кручения A ранга 1.

Тип будем называть *идемпотентным*, если он содержит характеристику, состоящую только из нулей и символов ∞.

Пусть $P_\infty(\tau)$ — множество простых чисел, соответствующих символам ∞ в характеристике типа τ. Говорят, что типы τ_1 и τ_2 *сравнимы по* ∞, если $P_\infty(\tau_1) \subseteq P_\infty(\tau_2)$ или $P_\infty(\tau_2) \subseteq P_\infty(\tau_1)$.

Под *разностью характеристик* $\alpha = (\dots, \alpha_n, \dots)$ и $\beta = (\dots, \beta_n, \dots)$ таких, что $\alpha \le \beta$, будем понимать характеристику $\gamma = (\dots, \gamma_n, \dots)$, в которой $\gamma_n = \beta_n - \alpha_n$ для любого n из $\mathbf{N}$, где $\beta_n - \alpha_n = \infty$, если $\beta_n = \infty$. Тип, соответствующий характеристике γ, назовем *разностью типов*, соответствующих характеристикам α и β.

Остальные обозначения соответствуют [1] или вводятся по ходу изложения. Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы.

Следующие известные факты будут часто использоваться в дальнейшем.

Лемма 1 ([2], с. 78). *Группа без кручения ранга* 1 *изоморфна своей группе эндоморфизмов тогда и только тогда, когда она идемпотентного типа.*

Лемма 2 (следствие из [2], с. 78, теорема 2, и [2], с. 81, теорема 3). *Если $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ — вполне разложимая группа без кручения, где $r(A_i) = 1$, то группы A и $\mathrm{End}(A)$ изоморфны в том и только том случае, когда выполняются следующие условия*:

1) *группа A конечного ранга*;

2) *типы $\tau(A_i)$ и $\tau(A_j)$ несравнимы, если $i \ne j$ $(i, j \in I)$*;

3) *для любого* $i \in I$ *тип* $\tau(A_i)$ *идемпотентный.*

Лемма 3 ([3], с. 73). *Если* $A = \prod\limits_{i\in I} A_i$ *— векторная группа, где* $r(A_i) = 1$*, то группы* A *и* $\mathrm{End}(A)$ *изоморфны в том и только том случае, когда выполняются следующие условия:*

1) *типы* $\tau(A_i)$ *и* $\tau(A_j)$ *несравнимы, если* $i \neq j$ $(i, j \in I)$;

2) *для любого* $i \in I$ *тип* $\tau(A_i)$ *идемпотентный.*

Теорема 1. *Группа без кручения ранга* 1 *является* End*-группой в том и только том случае, когда ее тип идемпотентный.*

Доказательство. Пусть A — группа без кручения ранга 1. В этом случае группа $\mathrm{End}(A)$ тоже является группой без кручения ранга 1 ([1], с. 213), причем тип группы $\mathrm{End}(A)$ идемпотентный, т. к. $\tau(\mathrm{End}(A)) = \tau(A) - \tau(A)$ ([5], с. 21). Следовательно, в силу леммы 1 группы $\mathrm{End}(A)$ и $\mathrm{End}(\mathrm{End}(A))$ изоморфны для любой группы A без кручения ранга 1. Таким образом, для того чтобы и группа A была End-группой, необходимо и достаточно (лемма 1), чтобы группа A была идемпотентного типа. □

Теорема 2. *Вполне разложимая группа* A *без кручения конечного ранга* (*ранга больше* 1) *является* End*-группой тогда и только тогда, когда*

1) *либо* A *есть* E^+*-группа*;

2) *либо существует хотя бы одна пара прямых слагаемых ранга* 1*, типы которых сравнимы*;

3) *либо существует хотя бы одна пара прямых слагаемых ранга* 1*, типы которых сравнимы по* ∞.

Доказательство. Пусть $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ — вполне разложимая группа без кручения, где $r(A_i) = 1$, $|I| < \aleph_0$. Имеем

$$\mathrm{End}(A) \cong \bigoplus_{i\in I}(\bigoplus_{j\in I} \mathrm{Hom}(A_i, A_j)) = \bigoplus_{i\in I}(\bigoplus_{j\in I} H_{ij})$$

— вполне разложимая группа без кручения конечного ранга (здесь через H_{ij} обозначена группа $\mathrm{Hom}(A_i, A_j)$).

Если A — E^+-группа, то, очевидно, $\mathrm{End}(A)$ — тоже E^+-группа, а поэтому группа A является End-группой.

Если A не является E^+-группой, то по лемме 2 не выполняется какое-нибудь из условий — либо 2), либо 3). И в этом случае для того, чтобы группа A была End-группой, необходимо и достаточно, чтобы группа $\mathrm{End}(A)$ не являлась E^+-группой.

Пусть для группы A не выполняется второе условие леммы 2, т. е. в прямом разложении $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ существует пара прямых слагаемых A_k и A_l ранга 1, типы которых сравнимы, например, $\tau(A_k) \leq \tau(A_l)$. В этом случае группа H_{kl} отлична от нуля, а тип $\tau(H_{kl}) = \tau(\mathrm{Hom}(A_k, A_l)) = \tau(A_l) - \tau(A_k) \geq \tau(A_k) - \tau(A_k) = \tau(H_{kk})$. Таким образом, в прямом разложении группы $\mathrm{End}(A)$ есть две группы ранга 1, типы которых сравнимы. Поэтому по лемме 2 группа $\mathrm{End}(A)$ не является E^+-группой, и, следовательно, A — End-группа.

Пусть теперь для группы A второе условие леммы 2 выполнено, а третье — нет. Отсюда, в частности, следует, что если $k \neq l$, то $H_{kl} = 0$. Теперь разложение группы $\mathrm{End}(A)$ можно записать в виде $\mathrm{End}(A) \cong \bigoplus\limits_{i\in I} H_{ii}$. Очевидно, для любой группы A_i тип $\tau(H_{ii}) = \tau(\mathrm{End}(A_i)) = \tau(A_i) - \tau(A_i)$ идемпотентный. Поэтому по лемме 2 группа $\mathrm{End}(A)$ не является E^+-группой в том и только том случае, когда в ее прямом разложении найдутся две группы H_{kk} и H_{ll} ранга 1, типы которых сравнимы. Учитывая, что типы $\tau(H_{kk}) = \tau(A_k) - \tau(A_k)$ и $\tau(H_{ll}) = \tau(A_l) - \tau(A_l)$ идемпотентные и то, что типы $\tau(A_k)$ и $\tau(A_l)$ несравнимы, не умаляя общности, заключаем, что $\tau(H_{kk}) \leq \tau(H_{ll})$ тогда и только тогда, когда типы $\tau(A_k)$ и $\tau(A_l)$ сравнимы по ∞.

Будем теперь рассматривать вполне разложимые группы без кручения бесконечного ранга.

Теорема 3. *Вполне разложимая группа без кручения бесконечного ранга, типы всех прямых слагаемых ранга* 1 *которой попарно несравнимы, является* End-*группой тогда и только тогда, когда у нее существует хотя бы одна пара прямых слагаемых ранга* 1*, типы которых сравнимы по* ∞.

Доказательство. Пусть $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ — вполне разложимая группа без кручения, где $r(A_i)=1$, $|I| > \aleph_0$. Имеем ([1], с. 214) $\mathrm{End}(A) \cong \prod_{i\in I} \bigoplus_{j\in I} \mathrm{Hom}(A_i, A_j)$. Так как по условию теоремы для любых $i, j \in I$ $(i \neq j)$ типы $\tau(A_i)$ и $\tau(A_j)$ несравнимы, то получим, что группа $\mathrm{Hom}(A_i, A_j) = 0$. Теперь разложение группы $\mathrm{End}(A)$ примет вид $\mathrm{End}(A) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{End}(A_i)$. И тогда $\mathrm{End}(A)$ — векторная группа.

Так как группа A — вполне разложимая группа без кручения бесконечного ранга, то по лемме 2 она не является E^+-группой, а следовательно, чтобы группа A была End-группой, необходимо и достаточно, чтобы группа $\mathrm{End}(A)$ тоже не являлась E^+-группой. В свою очередь, это выполняется тогда и только тогда, когда для группы $\mathrm{End}(A)$ нарушено какое-нибудь из условий леммы 3.

Заметим, что второе условие леммы 3 выполнено для любой группы A_i. Действительно, тип $\tau(\mathrm{End}(A_i)) = \tau(A_i) - \tau(A_i)$ идемпотентен для любой группы A_i.

Таким образом, группа A является End-группой только в том случае, когда для группы $\mathrm{End}(A)$ не выполняется второе условие леммы 3, т. е. в ее прямом разложении найдутся две группы $\mathrm{End}(A_k)$ и $\mathrm{End}(A_l)$ ранга 1, типы которых сравнимы. Учитывая, что типы $\tau(\mathrm{End}(A_k)) = \tau(A_k) - \tau(A_k)$ и $\tau(\mathrm{End}(A_l)) = \tau(A_l) - \tau(A_l)$ идемпотентные и то, что типы $\tau(A_k)$ и $\tau(A_l)$ несравнимы, не умаляя общности, заключаем, что $\tau(\mathrm{End}(A_k)) \leq \tau(\mathrm{End}(A_l))$ тогда и только тогда, когда типы $\tau(A_k)$ и $\tau(A_l)$ сравнимы по ∞. $\square$

Теорема 4. *Если у вполне разложимой группы бесконечного ранга существует хотя бы пара прямых слагаемых ранга* 1 *со сравнимыми типами и множество таких пар прямых слагаемых конечно, то эта группа является* End-*группой.*

Доказательство. Пусть группа $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$, где $r(A_i) = 1$, $|I| > \aleph_0$, удовлетворяет условиям теоремы. В этом случае по лемме 2 A не является E^+-группой. Следовательно, для того чтобы группа A была End-группой, необходимо и достаточно, чтобы группа $\mathrm{End}(A)$ тоже не являлась E^+-группой.

Пусть $I' = \{i \in I \mid \forall j \in I\ (j \neq i)$, типы $\tau(A_i)$ и $\tau(A_j)$ несравнимы$\}$, а $I'' = \{i \in I \mid \exists j \in I$ $(j \neq i)$, типы $\tau(A_i)$ и $\tau(A_j)$ сравнимы$\}$. По условию теоремы множество I'' непустое и конечное. Заметим, что $\mathrm{Hom}(A_i, A_j) = 0$, если $i \in I'(I'')$, а $j \in I''(I')$. Поэтому имеем

$$\mathrm{End}(A) \cong \mathrm{End}(\bigoplus_{i\in I''} A_i \oplus [\bigoplus_{i\in I'} A_i]) \cong \mathrm{End}(\bigoplus_{i\in I''} A_i) \oplus \mathrm{End}(\bigoplus_{i\in I'} A_i) \cong$$

$$\cong \bigoplus_{i\in I''} [\bigoplus_{j\in I''} \mathrm{Hom}(A_i, A_j)] \oplus \prod_{i\in I'} \mathrm{End}(A_i)$$

— векторная группа, т. к. является прямой суммой вполне разложимой группы без кручения конечного ранга и векторной группы. Так как множество I'' непустое, то в прямом разложении группы A найдутся две группы A_k и A_l $(k, l \in I'')$ ранга 1, типы которых сравнимы, например, $\tau(A_k) \leq \tau(A_l)$. Но тогда $\tau(\mathrm{Hom}(A_k, A_l)) = \tau(A_l) - \tau(A_k) \geq \tau(A_k) - \tau(A_k) = \tau(\mathrm{End}(A_k))$. Получили, что для векторной группы $\mathrm{End}(A)$ нашлись две группы, типы которых сравнимы, откуда по лемме 3 следует, что она не изоморфна своей группе эндоморфизмов, т. е. $\mathrm{End}(A)$ не является E^+-группой. $\square$

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность А.М. Себельдину за внимание к работе.

Литература

1. Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы.* Т. 1. – М.: Мир, 1974. – 336 с.
2. Себельдин А.М. *Группы гомоморфизмов вполне разложимых абелевых групп без кручения* // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 7. – С. 77–84.
3. Себельдин А.М. *О группах гомоморфизмов абелевых групп без кручения* // Группы и модули. – Томск, 1976. – С. 70–77.
4. Коленова Е.М. *Условия изоморфизма абелевой группы и ее группы эндоморфизмов* // Математика в высшем образовании: Тезисы докл. на 12-й международной конференции. – Чебоксары, 2004. – С. 144.
5. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. *Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов.* – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 2002. – 464 с.

Нижегородский государственный
педагогический университет

Поступили
первый вариант 23.03.2005
окончательный вариант 14.08.2006