ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 2 (453)

УДК 517.911

Ю.Т. СИЛЬЧЕНКО

ОБ ОЦЕНКЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

1. Пусть $ly = -y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$ — линейное дифференциальное выражение, $x \in [0,1]$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ — непрерывные на $[0,1]$ функции, а $L_1 y$, $L_2 y$ — соответствующие граничные формы, причем будем считать, что они содержат некоторые интегралы от функции $y = y(x)$.

Обыкновенные дифференциальные уравнения с нелокальными граничными условиями $L_i y = 0$ $(i = 1,2)$ изучались многими авторами (напр., [1]–[6]). В этих работах рассматриваются различные спектральные свойства соответствующего оператора (спектральность, собственные функции, сопряженная задача и преимущественно в пространстве $L_2(0,1)$), причем граничные формы содержат значения функции $y(x)$ или ее производной на концах отрезка. Это позволяет строить сопряженный оператор [2] или предполагать регулярность ([7], с. 67) краевых условий [1], [4]. Нас будет интересовать вопрос о регулярном множестве оператора L, отвечающего дифференциальному выражению ly, и поведение его резольвенты $(L+\lambda I)^{-1}$ при больших значениях λ в зависимости от граничных условий в пространстве $L_p(0,1) = L_p$. Если граничные условия для L являются регулярными ([7], с. 67), то регулярное множество $\lambda(L)$ оператора L содержит область

$$\Omega_\varepsilon = \{\lambda : |\arg\lambda| < \pi - \varepsilon,\ |\lambda| \ge R_\varepsilon\}$$

для любого $\varepsilon > 0$ и $\|(L+\lambda I)^{-1}\| \le c|\lambda|^{-1}$.

В [8] рассматриваются нелокальные граничные условия, которые содержат значения искомой функции на концах отрезка и которые не являются регулярными. При этом показано, что $\Omega_\varepsilon \subset \rho(L)$ и $\|(L+\lambda I)^{-1}\| \le c|\lambda|^{-1/2}$. Наконец, в работах [5], [6] установлено необходимое и достаточное условие дискретности спектра оператора L в случае интегральных условий

$$L_i y = \int_0^1 \varphi_i(x) y(x)dx, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

и для регулярных λ при $p = 2$ получена оценка

$$\|(L+\lambda I)^{-1}\| \le c|\lambda|^{-3/4}.$$

В данной работе дифференциальный оператор L рассматривается с граничными условиями (1). Для него устанавливаются более общие достаточные условия существования резольвенты, а также оценка ее поведения в пространстве L_p при любом $p \ge 1$.

2. Для построения резольвенты оператора L рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Ly + \lambda y = f(x) \tag{2}$$

с граничными условиями (1), где λ — комплексный параметр, $f(x) \in L_p$. Положим $\rho^2 = \lambda$ и пусть $\operatorname{Re}\rho > 0$, $|\arg\rho| < \frac{\pi-\varepsilon}{2}$. Тогда ([7], сс. 53, 58) у уравнения (2) при $a_1(x) \ne 0$, $f(x) = 0$ существует фундаментальная система решений $y_1(x)$, $y_2(x)$ такая, что

$$y_1(x) = e^{\rho(x-1)}(1+R_1), \quad y_2(x) = e^{-\rho x}(1+R_2),$$
$$y_1'(x) = \rho e^{\rho(x-1)}(1+R_1), \quad y_2'(x) = \rho e^{-\rho x}(-1+R_2),$$

где функции $R_i = R_i(x,\rho)$ непрерывны и $|R_i(x,\rho)| \le c_i|\rho|^{-1}$.

Будем предполагать, что для функций $\varphi_i(x)$ выполнены соотношения

$$\int_0^1 \varphi_i(x)e^{\rho(x-1)}dx = \frac{a_{i1}+R_{i1}(\rho)}{\rho^{k_{i1}}}, \quad \int_0^1 \varphi_i(x)e^{-\rho x}dx = \frac{a_{i2}+R_{i2}(\rho)}{\rho^{k_{i2}}} \tag{3}$$

и

$$\int_0^z \varphi_i(x)e^{(x-z)\rho}dx = \frac{\varphi_i(z)+P_{i1}(z,\rho)}{\rho}, \quad \int_z^1 \varphi_i(x)e^{(z-x)\rho}dx = \frac{\varphi_i(z)+P_{i2}(z,\rho)}{\rho}, \tag{4}$$

где все функции R_{ij} и P_{ij} непрерывны и $a_{ij} \ne 0$, $|R_{ij}(\rho)| \le c|\rho|^{-1}$, $|P_{ij}(z,\rho)| \le c$, $P_{ij}(z,\rho) \to 0$ почти всюду при $\rho \to 0$, k_{ij} — натуральные числа. Эти равенства выполнены, например, если функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и коэффициенты уравнения $a_1(x)$, $a_2(x)$ являются гладкими функциями. При этом в (3) $a_{i1} = (-1)^{k_{i1}-1}\varphi_i^{(k_{i1}-1)}(1)$, $a_{i2} = (-1)^{k_{i2}}\varphi_i^{(k_{i2}-1)}(0)$, если $\varphi_i^{(r)}(1) = 0$ для $r = 0,1,\dots,k_{i1}-2$ и $\varphi_i^{(n)}(0) = 0$ для $n = 0,1,\dots,k_{i2}-2$, т.е. a_{ij} — первые отличные от нуля слагаемые в разложении интегралов (3) по степеням ρ^{-1} (для гладких функций такие разложения получаются с помощью интегрирования по частям).

Теперь сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть функции $a_i(x)$, $\varphi_i(x)$ $(i = 1,2)$ непрерывны на отрезке $[0,1]$, $a_1(x) \ne 0$, для функций $\varphi_i(x)$ имеют место асимптотические разложения* (3)–(4). *Пусть выполнено одно из двух условий*

А) $k_{11}+k_{22} \ne k_{21}+k_{12}$;

Б) $k_{11}+k_{22} = k_{21}+k_{12}$, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \ne 0$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $R_\varepsilon > 0$, что множество $\{\lambda \in C : |\lambda| \ge R_\varepsilon,\ |\arg\lambda| < \pi-\varepsilon\}$ является регулярным для оператора L и

$$\|(L+\lambda I)^{-1}\| = (c+R(\lambda))|\lambda|^{-r}, \tag{5}$$

где $r = 1+\frac{k-m}{2}+\frac{1}{2p}$, $c \ne 0$, $k = \min\{k_{ij}\}$, $m = \min\{k_{11}+k_{22},\ k_{21}+k_{12}\}$, $R(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$.

Доказательство. По методу вариации произвольных постоянных общее решение уравнения (2) запишем в виде $y(x) = c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_3(x)$, где

$$y_3(x) = \frac{1}{2\rho}\left[\int_0^x e^{(s-x)\rho}f(s)(1+R)ds + \int_x^1 e^{(x-s)\rho}f(s)(1+R)ds\right],$$

$R = R(x,s,\rho)$ — непрерывные функции, для которых $|R(x,s,\rho)| \le c|\rho|^{-1}$.

Подберем константы c_1 и c_2 так, чтобы удовлетворить условиям (1). При этом для c_1, c_2 получим систему линейных алгебраических уравнений (с учетом формул (3))

$$c_1(a_{i1}+R_{i1})\rho^{-k_{i1}} + c_2(a_{i2}+R_{i2})\rho^{-k_{i2}} =$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^1\left\{\int_0^x \varphi_i(x)e^{(s-x)\rho}(1+R)f(s)ds + \int_x^1 \varphi_i(x)e^{(x-s)\rho}(1+R)f(s)ds\right\}dx, \quad i = 1,2.$$

Поменяв в интегралах порядок интегрирования и применив формулы (4), получим правые части этой системы в виде

$$-\frac{1}{\rho^2}\int_0^1 \varphi_i(s)f(s)ds + \frac{b_i(\rho)}{\rho^2},$$

где $|b_i(\rho)| \le c|\rho|^{-1}$. Определитель этой системы $\Delta(\rho) = \frac{a_{11}a_{22}}{\rho^{k_{11}+k_{22}}} - \frac{a_{12}a_{21}}{\rho^{k_{12}+k_{21}}} + R(\rho)$ или $\Delta(\rho) = \frac{\theta+R(\rho)}{\rho^m}$, где $\theta \ne 0$, $|R(\rho)| \le c|\rho|^{-1}$. Присоединенные определители имеют вид

$$\Delta_1(\rho) = -\frac{a_{22}}{\rho^{2+k_{22}}}\int_0^1 \varphi_1(s)f(s)ds + \frac{a_{12}}{\rho^{2+k_{12}}}\int_0^1 \varphi_2(x)f(s)ds + b(\rho),$$
$$\Delta_2(\rho) = -\frac{a_{11}}{\rho^{2+k_{11}}}\int_0^1 \varphi_2(s)f(s)ds + \frac{a_{21}}{\rho^{2+k_{21}}}\int_0^1 \varphi_1(x)f(s)ds + b(\rho),$$

где $b(\rho)$ — малые более высокого порядка. Поскольку $c_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, то отсюда вытекает асимптотическая формула решения

$$y(x) = e^{(x-1)\rho}(1+R)\frac{\rho^m}{\theta}\Delta_1 + e^{-x\rho}(1+R)\frac{\rho^m}{\theta}\Delta_2 + y_3(x).$$

Здесь $\|y_3\| \leq c|\rho|^{-2}\|f\|$. Поэтому основную роль в убывании играют первые два слагаемых. Вычисляя их нормы, получим (5). □

Замечание. Если $f(x)$ принадлежит подпространству, выделяемому условиями (1), то для таких функций

$$\|y\| \leq c|\lambda|^{-1}\|f\|.$$

Примеры.

1) Пусть $\varphi_1(0)\varphi_2(1) - \varphi_1(1)\varphi_2(0) \neq 0$. Тогда $k_{11} = k_{12} = k_{21} = k_{22} = 1$, $k = 1$, $m = 2$ и в соотношении (5) $r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p}$. При $p = 2$ получается результат из [5], [6] с $r = 3/4$.

2) Пусть $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x$. Вычисляя соответствующие интегралы, получим следующие значения параметров:

$$a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 1, \quad k_{11} = k_{12} = k_{21} = 1, \quad k_{22} = 2, \quad k = 1, \quad m = 2, \quad r = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2p}.$$

3) Пусть $\varphi_1(x) = 2x - 1$, $\varphi_2(x) = x(1-x)$. Тогда

$$a_{11} = a_{21} = a_{22} = 1, \quad a_{12} = -1, \quad k_{11} = k_{12} = 1, \quad k_{21} = k_{22} = 2, \quad k = 1, \quad m = 3, \quad r = \tfrac{1}{2p}.$$

3. Полученное условие (5) означает, что по оператору L можно построить ([8], с. 104) полугруппу линейных ограниченных операторов, с помощью которой устанавливается разрешимость начально-краевой задачи

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(t,x), \quad t \in (0,1], \quad x \in [0,1], \\ \int_0^1 \varphi_1(x)u(t,x)dx = 0, \quad i = 1,2, \quad u(0,x) = u_0(x). \end{gathered} \tag{6}$$

Эта задача сводится к абстрактной задаче Коши

$$\frac{du}{dt} + Lu = f(t), \quad t \in (0,1], \quad u(0) = u_0, \tag{7}$$

в банаховом пространстве L_p. Ее особенностью является то, что область определения

$$D(L) = \left\{ y(x) \in W_p^2, \ \int_0^1 \varphi_i(x)y(x)dx = 0, \ i = 1,2 \right\}$$

оператора L не является плотным в L_p множеством и возникающая полугруппа имеет в нуле особенность. Однако к задаче (7) применима

Теорема 2 [9] (случай постоянного операторного коэффициента L). *Пусть выполнены условия:*

1°. *существует бесконечно дифференцируемая полугруппа линейных ограниченных операторов* $\exp(-tL) : L_p \to D(L)$, *для которой выполнены оценки (при малых* $t > 0$)

$$\|\exp(-tL)\| \leq Mt^{-\alpha}, \quad \|L\exp(-tL)\| \leq Mt^{-\beta} \tag{8}$$

при некоторых $0 \leq \alpha < 1$, $1 + \alpha \leq \beta$;

2°. $\|f(t + \Delta t) - f(t)\| \leq c|\Delta t|^\nu$ *при некотором* $\nu \in (\frac{\beta-1}{\beta-\alpha}, 1]$;

3°. $u_0 \in D(L)$.

Тогда задача (7) *имеет единственное решение* $u = u(t)$, $t \in [0,1]$, *такое, что функции* $u'(t)$, $Lu(t)$ *существуют и непрерывны при* $t \in (0,1]$.

Проверим, что для задачи (6) выполнены условия теоремы 2. В силу оценки (5) для резольвенты оператора L из ([8], с. 104) следует существование полугруппы указанного класса, причем в оценках (8) $\alpha = 1 - r$, $\beta = 1 + \alpha$. В нашем случае $\alpha = \frac{m-k}{2} - \frac{1}{2p}$ и условие $0 \le \alpha < 1$ выполнено, если

$$1/p \le m - k < 2 + 1/p. \tag{9}$$

Таким образом, получена

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *условие* (9), *правая часть* $f(t,x)$ *в* (6) *удовлетворяет условию Гёльдера по* t *в норме* $\|\cdot\|$ *пространства* L_p

$$\|f(t+\Delta t,\ \cdot) - f(t,\ \cdot)\| \le c|\Delta t|^{\nu}$$

с некоторым $\nu \in \left(\frac{m-k}{2} - \frac{1}{2p},\ 1\right]$ *и* $u_0(x) \in D(L)$.

Тогда задача (6) *имеет единственное решение* $u = u(t,x)$ *такое, что функции* $\frac{\partial u}{\partial t}$ *и* Lu *непрерывны по* t *при* $t > 0$ *в норме пространства* L_p.

Отметим, что условие (9) выполнено для функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, приведенных в примерах 1)–3) при любом $p \in [1, \infty)$.

Литература

1. Шкаликов А.А. *О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1982. – № 6. – С. 12–21.
2. Кесельман Г.М. *О спектральности возмущенного оператора Штурма–Лиувилля с нелокальными краевыми условиями* // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21. – № 3. – С. 494–499.
3. Ильин В.А., Моисеев Е.И. *Априорная оценка решения задачи, сопряженной к нелокальной краевой задаче первого рода* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 5. – С. 795–804.
4. Баскаков А.Г., Кацаран Т.К. *Интегральные и интегро-дифференциальные уравнения* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т.24. – № 8. – С. 1424–1433.
5. Галахов Е.И., Скубачевский А.Л. *Об одной нелокальной спектральной задаче* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 1. – С. 25–32.
6. Скубачевский А.Л., Стеблов Г.М. *О спектре дифференциальных операторов с областью определения, не плотной в* $L_2(0,1)$ // Докл. РАН. – 1991. – Т. 321. – № 6. – С. 1158–1163.
7. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1969. – 528 с.
8. Якубов С.Я. *Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения.* – Баку: Элм, 1985. – 220 с.
9. Сильченко Ю.Т. *Эволюционные уравнения с неплотно заданным операторным коэффициентом* // Сиб. матем. журн. – 1993. – Т. 34. – № 2. – С. 166–169.

Воронежский государственный университет

Поступили
первый вариант 10.06.1997
окончательный вариант 07.12.1998