

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по научной деятельности КФУ  
Проф. Д.К. Нургалиев



" 10 " 2015 г.

### Программа дисциплины

#### **Б1.В.ДВ.2 Дополнительные главы теории сложности**

Направление подготовки: 01.06.01 Математика и механика

Направленность (профиль) подготовки:

Профиль подготовки: 01.01.05 Теория вероятностей и математическая статистика

Квалификация выпускника: «Исследователь. Преподаватель-исследователь»

Форма обучения: очная

Язык обучения: русский

Казань  
2015

## **Аннотация**

### **1. Цели освоения дисциплины**

Целями освоения дисциплины «Дополнительные главы сложности вычислений» в соответствии с общими целями основной профессиональной образовательной программы послевузовского профессионального образования (аспирантура) (далее – образовательная программа послевузовского профессионального образования) являются:

- усвоение аспирантами знаний об основных подходах к математическому уточнению интуитивного понятия алгоритм, их эквивалентности, о методах доказательства алгоритмической неразрешимости проблем, о способах оценки сложности выполнения алгоритмов;
- изучение вопросов применения понятий и методов теории алгоритмов в математике и ее приложениях;
- формирование у аспирантов общей математической культуры.

### **2. Место дисциплины в структуре программы аспирантуры**

Дисциплина «Дополнительные главы сложности вычислений» относится к разделу «Вариативная часть» (подраздел «Дисциплины по выбору аспиранта») образовательной составляющей образовательной программы послевузовского профессионального образования по специальности научных работников 01.01.09 Дискретная математика и математическая кибернетика. Дисциплина читается на втором курсе в четвертом семестре.

Для изучения данной дисциплины необходимы знания и умения, полученные в процессе обучения по программам специалитета или бакалавриата – магистратуры (дисциплины «Алгебра» и «Математическая логика и теория алгоритмов»). Дисциплина «Дополнительные главы и сложности вычислений» развивает и дополняет соответствующий раздел обязательной дисциплины «Сложность вычислений».

### **3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля) в соответствии с ФГОС ВО программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре**

Знать: основные определения, понятия и проблемы теории алгоритмов.

Уметь: применять математический аппарат теории алгоритмов для решения профессиональных задач.

Владеть: аппаратом теории алгоритмов и основными подходами к оценке сложности выполнения алгоритмов.

Демонстрировать способность и готовность: применять полученные знания на практике

В результате освоения дисциплины формируются компетенции:

Профессиональные:

- способность к преподаванию дисциплин и учебно-методической работе в областях профессиональной деятельности, в том числе, на основе результатов, проведенных теоретических и экспериментальных исследований (ПК-3).

#### **4. Структура и содержание дисциплины (модуля)**

##### **4.1. Распределение трудоёмкости дисциплины (в часах) по видам нагрузки обучающегося и по разделам дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц 108 часов: из них 18 часов - лекции, 18 часов - практика, 72 часа -самостоятельная работа аспиранта. Итоговая форма контроля – зачёт.

№	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				лекции	практ	самост	
1	Введение. Предмет и задачи курса.	3	1-2	1		8	
2	Понятие алгоритма.	3	3-4	3	3	8	
3	Машины Тьюринга	3	5-6	2	3	8	
4	Частично-рекурсивные функции.	3	7-8	2	2	8	
5	Арифметизация теории машин Тьюринга	3	9-10	2	2	8	
6	Сложность алгоритмов.	3	11	2	2	8	
7	Недетерминированные машины Тьюринга.	3	12	2	2	8	
8	Трудноразрешимые задачи.	3	13-14	2	2	8	
9	Неразрешимые алгоритмические проблемы.	3	14-15	2	2	8	
Всего:				18	18	72	Зачет

##### **4.2 Содержание дисциплины**

###### **Тема 1. Введение.**

Введение. Предмет и задачи курса.

###### **Тема 2. Понятие алгоритма.**

Примеры алгоритмов из различных разделов математики: алгебры, теории чисел, математической логики, математического анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и т. д. Основные свойства алгоритмов. Дискретность, детерминированность, элементарность шагов и массовость алгоритмов. Неразрешимые

алгоритмические проблемы в теории алгоритмов, алгебре, математической логике, теории чисел, математическом анализе, топологии.

### **Тема 3. Машины Тьюринга.**

Внешний и внутренний алфавиты, команды и программа машины Тьюринга. Различные варианты машин Тьюринга: многоленточные и одноленточные, с одномерной и многомерной лентой, с потенциально бесконечной в обе стороны лентой, с непротяжимой влево лентой и т. д. Вычислимые по Тьюрингу функции. Правильная вычислимость по Тьюрингу. Вычислимость по Тьюрингу элементарных теоретико-числовых функций. Разрешимые и перечислимые множества слов. Тезис Тьюринга. Замкнутость класса правильно вычислимых по Тьюрингу функций относительно операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

### **Тема 4. Частично рекурсивные функции.**

Простейшие (исходные) функции. Операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Примитивно рекурсивные функции. Примеры примитивно рекурсивных теоретико-числовых функций. Частично рекурсивные и рекурсивные функции, примеры. Операции над примитивными, рекурсивными и частично рекурсивными функциями. Тезис А. Черча. Нумерация пар и  $n$ -ок натуральных чисел. Нумерационные функции. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества и предикаты. Теорема Э. Поста. Теорема о графике функции. Правильная вычислимость по Тьюрингу любой частично рекурсивной функции.

### **Тема 5. Арифметизация теории машин Тьюринга.**

Геделева нумерация слов в конечных и счетных алфавитах. Нумерация команд и программ машин Тьюринга. Нумерация конфигураций. Построение примитивно рекурсивных функций, описывающих работу машин Тьюринга. Частичная рекурсивность любой вычислимой по Тьюрингу функции. Универсальные частично рекурсивные функции. Неразрешимость проблем останова, самоприменимости и бессмертия для машин Тьюринга. Неразрешимые алгоритмические проблемы. Неразрешимые проблемы в математической логике.

### **Тема 6. Сложность алгоритмов.**

Многоленточные машины Тьюринга: внешний и внутренний алфавиты, программы. Сложностные характеристики работы машины Тьюринга: временная и емкостная, связь между ними. Сложностные характеристики работы машины Тьюринга в худшем случае: временная и емкостная сигнализирующие функции (сложности, характеристики алгоритма), связь между ними. Сложностные классы. Другие сложностные характеристики.

### **Тема 7. Недетерминированные машины Тьюринга.**

Недетерминированные многоленточные машины Тьюринга: внешний и внутренний алфавиты, программы. Классы P и NP. NP-трудные и NP-полные задачи. Теорема Кука об NP-полноте проблемы выполнимости для логики высказываний. Примеры NP-полных проблем из различных разделов математики: дискретной математики, теории булевых функций, математической логики, теории графов, алгебры, теории чисел, теории автоматов и языков и т. д.

### **Тема 8. Трудно разрешимые задачи.**

Нижние оценки. Задачи, требующие экспоненциального времени и памяти. Неэлементарные задачи. Определение класса элементарных функций. Задачи, требующие неэлементарного времени для решения: из теории регулярных выражений, из математической логики.

## **Тема 9. Неразрешимые алгоритмические проблемы.**

Неразрешимые алгоритмические проблемы в топологии, математическом анализе, теории дифференциальных уравнений. Значение существования алгоритмически неразрешимых проблем и трудно разрешимых проблем для математики и ее приложений.

## **5. Образовательные технологии**

В преподавании используются методические пособия, программные комплексы. В преподавании курса используются активные и интерактивные технологии проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой. Часть практических занятий проводится в дисплейном классе с целью разработки, тестирования и модификации приложений, реализующих алгоритмы на различных моделях вычислений.

## **6. Учебно-методическое обеспечение для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

Самостоятельная работа аспирантов включает следующие виды работ: решение домашних задач, контрольные работы, подготовка рефератов, выступления с докладами по реферату.

### **7. Фонд оценочных средств**

#### **7.1. Регламент дисциплины**

В качестве средств текущего контроля используется 2 контрольных работы, а также написание в течение семестра 1 реферата на выбранную тему. Итоговая форма контроля (зачет) дает возможность выявить уровень профессиональной подготовки аспиранта по данной дисциплине.

**«Зачтено»** - Сформированные систематические представления об основных проблемах и методах решений и специфике теории сложности алгоритмов.

**«Не засчитано»** - Фрагментарные представления об основных проблемах и методах решений. Фрагментарные представления о теории сложности алгоритмов.

#### **7.2. Оценочные средства текущего контроля**

Задачи для контрольной работы № 1.

1. Доказать примитивную рекурсивность функции  $[x \operatorname{sqrt}(2)]$ .
2. Доказать, что функция  $c(x,y) = ((x+y)^2 + 3x + y)/2$  задает биективное отображение множества пар натуральных чисел на множество натуральных чисел.
3. Доказать примитивную рекурсивность функции  $S(x)$  – число делителей числа  $x$ .
4. Доказать примитивную рекурсивность функции  $R_i(x)$  – число простых чисел, не превосходящих числа  $x$ .
5. Доказать примитивную рекурсивность функции  $k(x, y)$  – наименьшее общее кратное чисел  $x$  и  $y$ .
6. Доказать примитивную рекурсивность функции  $d(x, y)$  – наибольший общий делитель чисел  $x$  и  $y$ .

Задания для контрольной работы № 2.

1. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую примитивно рекурсивную функцию  $S(x)$  – число делителей числа  $x$ .
2. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую примитивно рекурсивную функцию  $R_i(x)$  – число простых чисел, не превосходящих числа  $x$ .
3. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую примитивно рекурсивную функцию  $k(x, y)$  – наименьшее общее кратное чисел  $x$  и  $y$ .
4. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую примитивно рекурсивную функцию  $d(x, y)$  – наибольший общий делитель чисел  $x$  и  $y$ .

Темы рефератов:

1. Математические проблем, приведшие к уточнению понятия алгоритма.
2. Машины Тьюринга и Поста
3. Примитивно рекурсивные, частично рекурсивные и рекурсивные функции.
4. Неразрешимость проблем останова, самоприменимости и бессмертия для машин Тьюринга.
5. Универсальные машины Тьюринга.
6. Неразрешимые алгоритмические проблемы.
7. Сложность алгоритмов. Сложностные классы.
8. Классы P и NP. NP-трудные и NP-полные задачи.
9. Трудно разрешимые задачи.
10. Сложность описания алгоритма как средство доказательства существования алгоритмически неразрешимых проблем.
11. Неразрешимые алгоритмические проблемы в топологии, математическом анализе, теории дифференциальных уравнений.

### **7.3. Вопросы к зачёту**

1. Математические проблем, приведшие к уточнению понятия алгоритма.
2. Неразрешимые алгоритмические проблемы.
3. Машины Тьюринга и Поста
4. Разрешимые и перечислимые множества слов.
5. Диаграммы машин Тьюринга.
6. Примитивно рекурсивные, частично рекурсивные и рекурсивные функции.
7. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества и предикаты.
8. Арифметизация теории машин Тьюринга.
9. Универсальные частично рекурсивные функции.
10. Неразрешимость проблем останова, самоприменимости и бессмертия для машин Тьюринга.
11. Универсальные машины Тьюринга.
12. Неразрешимые алгоритмические проблемы.
13. Сложность алгоритмов. Сложностные классы.
14. Недетерминированные многоленточные машины Тьюринга.
15. Классы P и NP. NP-трудные и NP-полные задачи.
16. Теорема Кука об NP-полноте проблемы выполнимости для логики высказываний.
17. Трудно разрешимые задачи.
18. Теорема Рабина -- Фишера о сложности разрешения арифметики Пресбургера и поля действительных чисел).
19. Неэлементарные задачи.
20. Нормальные алгоритмы А.А. Маркова.
21. Сложность описания алгоритма как средство доказательства существования алгоритмически неразрешимых проблем.
22. Диофантовы множества и функции. 10-ая проблема Д.Гильберта.
23. Неразрешимые алгоритмические проблемы в топологии, математическом анализе, теории дифференциальных уравнений.

### **7.4. Таблица соответствия компетенций, критериев оценки их освоения и оценочных средств**

<b>Индекс компетенции</b>	<b>Расшифровка компетенции</b>	<b>Показатель формирования компетенции для данной дисциплины</b>	<b>Оценочное средство</b>
ПК-3	способность к преподаванию дисциплин и учебно-методической работе в областях профессиональной деятельности, в том числе, на основе результатов, проведенных теоретических и экспериментальных исследований	Аспирант способность к преподаванию дисциплин и учебно-методической работе в областях профессиональной деятельности, в том числе, на основе результатов, проведенных теоретических и экспериментальных исследований	Подготовка реферата и доклад по нему. Решение задач домашних заданий и контрольных работ.

## **8. Методические указания для обучающихся при освоении дисциплины**

В процессе обучения аспирантов по дисциплине основными формами обучения являются: аудиторные занятия, практические занятия и самостоятельная работа. Тематика лекций и практик соответствует содержанию программы дисциплины.

Для успешного освоения дисциплины каждый аспирант должен быть обеспечен учебно-методическими материалами по предмету (тематическими планами, учебно-методической литературой), а также возможностью отработки пропущенных занятий.

Обязательным условием освоения дисциплины является самостоятельная работа аспиранта. Кроме того, каждый аспирант должен подготовить реферат по одной из тем. Подобная форма обучения развивает навыки поиска научной литературы, ее анализа, составления резюме прочитанного текста, подготовки тезисов устного выступления с последующими ответами на вопросы аудитории, приемов аргументации защищаемых гипотез, т.е. ведения научно-исследовательской работы и ее защиты в рамках профессиональных дискуссий. Аналогичные цели должны преследоваться и при ориентации студентов на самостоятельный поиск новых материалов по текущим разделам и чтение дополнительной литературы.

## **9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)**

### **9.1 Основная литература:**

- Громкович, Юрай. Теоретическая информатика : Введение в теорию автоматов, теорию вычислимости, теорию сложности, теорию алгоритмов, рандомизацию, теорию связи и криптографию.— Издание 3—е .— СПб : БХВ–Петербург, 2010 .— 336 с.
- Теория алгоритмов: Учебное пособие / В.И. Игошин. - М.: ИНФРА-М, 2012. - 318 с.  
<http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=241722>
- Гринченков, Дмитрий Валерьевич. Математическая логика и теория алгоритмов для программистов : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем" направления подготовки "Информатика и вычислительная техника" / Д. В. Гринченков, С. И. Потоцкий .— Москва : КноРус, 2010 .— 206 с. : ил., табл. ; 22 .— Библиогр.: с. 205-206 .— ISBN 978-5-406-00120-2 ((в пер.)) , 3000.

## **9.2 Дополнительная литература:**

1. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость / Х. Роджерс ; Под ред. В. А. Успенского; Пер. с англ. В. А. Душского; Пер. М. И. Кановица; Пер. Е. Ю. Ногиной .— Москва : Мир, 1972 .— 624с.
2. Вычислимо перечислимые множества и степени : изучение вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств / Роберт И. Соар ; пер. с англ. под ред. М. М. Арсланова .— Казань : Казанское математическое общество, 2000 .— 576 с. : ил. ; 22 .— Загл. и авт. ориг.: *Resursively enumerable sets and degrees* / Robert I. Soare .— Библиогр.: с. 510-548 .— Предм. указ.: с. 562-576.
3. Зверев Г.Н. Теоретическая информатика и её основания. Том 2. — М.:Физматлит, 2008. – 576 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=2378](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2378)
4. Математическая логика и теория алгоритмов : учеб. пособие для студ.высш.учеб.заведений / В. И. Игошин .— М. : Академия, 2004 .— 448 с. — ISBN 5-7695-1363-2

## **9.3 Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:**

- <http://www.wikipedia.ru> – Википедия
- <http://www.machinelearning.ru> - Профессиональный информационно-аналитический ресурс MachineLearning.ru
- <http://www.lektoriuim.tv> - Медиатека Лекториум.
- <http://www.e-library.ru> – Научная электронная библиотека
- <http://www.rsl.ru> – Российская государственная библиотека

## **10. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, звуковая система)

- Электронная библиотечная система «[znanium.com](http://www.znanium.com)»
- Электронная библиотечная издательства «Лань»

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО аспирантуры и с учётом рекомендаций по направлению подготовки.

Автор: д.ф.-м.н., профессор Аблаев Ф.М.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Гайнутдинова А.Ф.

Программа одобрена на заседании Учебно-методической комиссии Института ВМиИТ КФУ от 9 сентября 2015 года, протокол № 1.