ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 6 (457)

УДК 512.573

*С.Н. ТРОНИН, О.А. КОПП*

# МАТРИЧНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАДЫ

В данной работе будет начато подробное изучение одного семейства линейных operad и многообразий алгебр над операдами из этого семейства. Многие известные классические объекты, например, многомерные матрицы, тензоры и т. п., допускают интерпретацию в терминах теории операд, которую можно рассматривать как многомерный аналог теории ассоциативных колец и модулей. По-видимому, линейные операды, как самостоятельный объект изучения, появились впервые (под другим названием) в работе [1]. Термин "операда" появился в [2] (см. также [3]). О современном состоянии теории операд и ее приложениях можно узнать из работ [4]–[8]. В [9]–[12] было показано, что класс многообразий линейных (мультиоператорных) алгебр над линейными операдами в точности совпадает с классом многообразий мультиоператорных линейных алгебр, определяемых полилинейными тождествами.

В начале данной работы приводятся основные определения из теории операд и алгебр над операдами. Описываются операды, являющиеся аналогами групповых колец, и алгебры над этими операдами. Определяется основной класс изучаемых объектов — операды многомерных матриц и их обобщения. Доказаны многомерные аналоги некоторых свойств матричных колец. Построено взаимно-однозначное соответствие между конгруэнциями операд и матричных операд, обобщающее соответствующий факт из теории ассоциативных колец. Наконец, доказана эквивалентность категорий алгебр над данной операдой и над соответствующей матричной операдой. Показано, что вместе с функторами, осуществляющими эквивалентность категорий (многообразий) алгебр над операдой и матричной операдой, существуют функторы, осуществляющие эквивалентность категорий модулей над переходящими друг в друга алгебрами. Часть результатов данной работы анонсирована в [13] и [14].

Мы будем использовать одновременно запись знака функции как слева, так и справа от аргумента. В частности, будет использоваться как левое, так и правое действия группы подстановок $\Sigma_n$ на множестве $[n] = \{1, \dots, n\}$, причем $\sigma i = i\sigma^{-1}$, где $\sigma \in \Sigma_n$, $i \in [n]$. Если определено действие $\Sigma_n$ на множестве $X$, то действие с противоположной стороны определяется аналогичным образом. Исходя из этого, определяется действие $\Sigma_n$ на множествах вида $X^n$ и на множествах функций от $n$ аргументов. Полагаем $\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{1\sigma}, x_{2\sigma}, \dots, x_{n\sigma})$, $(x_1, x_2, \dots, x_n)\sigma = (x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}, \dots, x_{\sigma n})$. Если, например, дано отображение $f : X^n \to Y$, и $\overline{x} \in X^n$, то определено отображение $f\sigma$ такое, что $f\sigma(\overline{x}) = f(\sigma\overline{x})$ (в случае записи функции слева от аргумента), или $\sigma f$ такое, что $(\overline{x})\sigma f = (\overline{x}\sigma)f$ (в случае записи справа). Разбиением множества $[n]$ на $m$ частей в данной работе будем называть упорядоченную последовательность целых положительных чисел $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$ такую, что $|\alpha| = n_1 + \dots + n_m = n$. Множество всех таких разбиений обозначим через $P(n, m)$. Определено правое действие группы подстановок $\Sigma_m$ на $P(n, m)$: $\alpha\sigma = (n_{\sigma 1}, \dots, n_{\sigma n})$. Для $\alpha \in P(n, m)$, $\sigma \in \Sigma_m$ определим $\alpha * \sigma \in \Sigma_n$ следующим образом. Пусть $X$ — некоторое достаточно большое множество, $\overline{x}_1 \in X^{n_1}, \dots, \overline{x}_m \in X^{n_m}$, $\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m \in X^{n_1 + \dots + n_m}$, $\sigma \in \Sigma_m$, $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$, тогда подстановка $\alpha * \sigma$ однозначно определяется действием на $X^{n_1 + \dots + n_m}$: $(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m)(\alpha * \sigma) = \overline{x}_{\sigma 1} \dots \overline{x}_{\sigma m}$. Если $\tau_1 \in \Sigma_{n_1}$, $\tau_2 \in \Sigma_{n_2}, \dots, \tau_m \in \Sigma_{n_m}$, то

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00717).

образ $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$ при естественном вложении $\Sigma_{n_1} \times \dots \times \Sigma_{n_m} \to \Sigma_{n_1+\dots+n_m}$ будет обозначаться через $\tau_1 \times \tau_2 \times \dots \times \tau_m$. Основные свойства введенных операций собраны в следующей лемме.

**Лемма 1.** *Пусть $\alpha$ — разбиение (в вышеуказанном смысле), $\tau_i$, $\sigma$ — подстановки. Предполагается, что они таковы, что соответствующие композиции существуют. Тогда имеют место тождества*

1) $\alpha * (\sigma\tau) = (\alpha * \sigma)(\alpha\sigma * \tau)$;
2) $(\tau_1 \times \tau_2 \times \dots \times \tau_m)(\alpha * \sigma) = (\alpha * \sigma)(\tau_{\sigma 1} \times \tau_{\sigma 2} \times \dots \times \tau_{\sigma m})$;
3) $((\alpha_1 * \tau_1) \times \dots \times (\alpha_m * \tau_m))(\alpha * \sigma) = (\alpha_1 \dots \alpha_m) * ((\tau_1 \times \dots \times \tau_m)(\alpha * \sigma))$.

**Доказательство.** Первое соотношение доказывается так:
$(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m)(\alpha * (\sigma\tau)) = \overline{x}_{\sigma\tau 1} \dots \overline{x}_{\sigma\tau m}$,
$((\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m)(\alpha * \sigma))(\alpha\sigma * \tau) = (\overline{x}_{\sigma 1} \dots \overline{x}_{\sigma m})(\alpha\sigma * \tau) = \overline{x}_{\sigma\tau 1} \dots \overline{x}_{\sigma\tau m}$.
Последнее равенство имеет место ввиду того, что $\overline{x}_{\sigma 1} \in X^{n_{\sigma 1}}, \dots, \overline{x}_{\sigma m} \in X^{n_{\sigma m}}$, $(n_{\sigma 1}, \dots, n_{\sigma m}) = \alpha\sigma$, и применимо определение. Остальные два соотношения доказываются примерно так же: сравниваются результаты действия левой и правой частей соотношения на подходящей последовательности $(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m)$. $\square$

Операдой называется следующий комплекс данных. Семейство множеств $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}_n \mid n = 1, 2, \dots\}$. На множестве $\mathfrak{R}_n$ задано левое действие группы $\Sigma_n$, $n = 1, 2, \dots$ Для каждого $(n_1, \dots, n_m) \in P(n, m)$ определена операция композиции

$$\mathfrak{R}_{n_1} \times \dots \times \mathfrak{R}_{n_m} \times \mathfrak{R}_m \longrightarrow \mathfrak{R}_{n_1+\dots+n_m}, \quad (\omega_1, \dots, \omega_m, \omega) \mapsto (\omega_1 \dots \omega_m)\omega = \omega_1 \dots \omega_m \omega.$$

Должно быть выполнено свойство ассоциативности

$$\begin{aligned}(\omega_{1\,1}\omega_{2\,1} \dots \omega_{k_1\,1}\omega_1)(\omega_{1\,2}\omega_{2\,2} \dots \omega_{k_2\,2}\omega_2) \dots (\omega_{1\,m}\omega_{2\,m} \dots \omega_{k_m\,m}\omega_m)\omega = \\ = (\omega_{1\,1}\omega_{2\,1} \dots \omega_{k_1\,1} \dots \omega_{1\,m}\omega_{2\,m} \dots \omega_{k_m\,m})(\omega_1\omega_2 \dots \omega_m\omega).\end{aligned}$$

Предполагается также наличие “единицы” — элемента $\varepsilon \in \mathfrak{R}_1$ такого, что $(\varepsilon \dots \varepsilon)\omega = \omega$ и $\omega\varepsilon = \omega$ для любого $\omega \in \mathfrak{R}_m$. В частности, $\mathfrak{R}_1$ будет полугруппой с единицей $\varepsilon$. Должны также выполняться два свойства, связывающие композиции и действия симметрических групп. Во-первых, $(\tau_1\omega_1)(\tau_2\omega_2) \dots (\tau_m\omega_m)\omega = (\tau_1 \times \tau_2 \times \dots \times \tau_m)(\omega_1\omega_2 \dots \omega_m\omega)$. Во-вторых, любая упорядоченная последовательность $\omega_1 \in \mathfrak{R}_{n_1}, \dots, \omega_m \in \mathfrak{R}_{n_m}$ определяет разбиение $\alpha = (n_1, \dots, n_m)$, и при $\sigma \in \Sigma_m$ должно быть выполнено соотношение

$$\omega_1\omega_2 \dots \omega_m(\sigma\omega) = (\alpha * \sigma)(\omega_{\sigma 1}\omega_{\sigma 2} \dots \omega_{\sigma m}\omega).$$

Пусть $K$ — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Большинство результатов данной работы справедливо также в случае, если вместо колец взять полукольца, а вместо модулей — полумодули. Когда это ясно из контекста, не употребляется приставка “полу”. $K$-линейная операда — это операда $\mathfrak{R}$, все компоненты $\mathfrak{R}_n$ которой являются $K$-(полу)модулями, причем действие $\Sigma_n$ на $\mathfrak{R}_n$ перестановочно с умножением на элементы $K$ (так что $\mathfrak{R}_n$ есть левый $K\Sigma_n$-(полу)модуль), и операции композиции являются $K$-полилинейными. При этом $\mathfrak{R}_1$ становится ассоциативной $K$-алгеброй, и единица $K$ отождествляется с $\varepsilon$. Из нелинейной операды очевидным образом можно получить линейную, взяв компоненты нелинейной операды в качестве базисов свободных $K$-(полу)модулей — компонент соответствующей линейной операды.

Семейство $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_n \mid \mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{R}_n,\ n \geq 1\}$ называется идеалом линейной операды $\mathfrak{R}$, если все $\mathfrak{A}_n$ являются $K\Sigma_n$-подмодулями $\mathfrak{R}_n$, и при $\omega_i \in \mathfrak{A}_{n_i}$ для некоторого $i$ или $\omega \in \mathfrak{A}_m$ композиция $\omega_1\omega_2 \dots \omega_m\omega$ принадлежит $\mathfrak{A}_{n_1+\dots+n_m}$. Гомоморфизмом операд $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{O}$ называется семейство гомоморфизмов $K\Sigma_n$-модулей $f_n : \mathfrak{R}_n \to \mathfrak{O}_n$ такое, что $f_1(\varepsilon) = \varepsilon$ и $f(\omega_1\omega_2 \dots \omega_m\omega) = f(\omega_1)f(\omega_2) \dots f(\omega_m)f(\omega)$ (мы опускаем индексы у $f$, которые однозначно определяются из контекста). Связь между идеалами и гомоморфизмами очевидна, т. к. операды можно рассматривать как многоосновные линейные алгебры.

Алгеброй над операдой $\mathfrak{R}$ называется правый $K$-модуль $A$ вместе с заданными для каждого $n \geq 1$ полилинейными операциями композиции

$$A^{\otimes n} \otimes_{K\Sigma_n} \mathfrak{R}_n \longrightarrow A, \quad (a_1 \otimes a_2 \otimes \dots a_n \otimes \omega) \mapsto a_1 a_2 \dots a_n \omega,$$

для которых $a\varepsilon = a$ для любого $a \in A$, и выполнено тождество ассоциативности

$$(a_{1\,1} a_{2\,1} \dots a_{k_1\,1} \omega_1)(a_{1\,2} a_{2\,2} \dots a_{k_2\,2} \omega_2) \dots (a_{1\,m} a_{2\,m} \dots a_{k_m\,m} \omega_m)\omega = \\ = (a_{1\,1} a_{2\,1} \dots a_{k_1\,1} \dots a_{1\,m} a_{2\,m} \dots a_{k_m\,m})(\omega_1 \omega_2 \dots \omega_m \omega).$$

Гомоморфизм алгебр $h : A \to B$ над одной и той же операдой $\mathfrak{R}$ есть гомоморфизм $K$-модулей такой, что $h(a_1 a_2 \dots a_n \omega) = h(a_1)h(a_2) \dots h(a_n)\omega$. Категория алгебр и гомоморфизмов Alg-$\mathfrak{R}$ является многообразием линейных мультиоператорных алгебр в следующем смысле. Сама операда $\mathfrak{R}$ рассматривается в качестве сигнатуры, причем для всех $n \geq 1$ $\mathfrak{R}_n$ есть множество символов $n$-арных полилинейных операций. Категория Alg-$\mathfrak{R}$ есть абстрактный класс универсальных алгебр, замкнутый относительно подалгебр, прямых произведений и факторалгебр. В соответствии с ([15], с. 328) это означает, что Alg-$\mathfrak{R}$ есть многообразие. Явный вид тождеств Alg-$\mathfrak{R}$ в рамках данной работы не является существенным.

**Пример 1.** Пусть $R$ — ассоциативная $K$-алгебра с единицей. Полагаем $\mathfrak{R}_1 = R$, $\mathfrak{R}_n = \{0\}$ при $n > 1$. Операция композиции состоит из умножения в $R$ и нулевых отображений. Таким образом, ассоциативные кольца с единицей можно рассматривать как простейшие операды. Алгебры над этими операдами суть в точности правые модули, многообразие алгебр эквивалентно категории всех модулей.

**Пример 2.** Пусть $\mathfrak{O}_n = \Sigma_n$ для каждого $n \geq 1$. Определим композицию следующим образом: если $\sigma_i \in \Sigma_{n_i}$, $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_m)$, то $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m \sigma = (\sigma_1 \times \sigma_2 \times \dots \times \sigma_m)(\alpha * \sigma)$. Из тождеств леммы 1 следует, что выполнены все аксиомы операды. Линеаризация этой операды $\mathfrak{O}$ есть $K$-линейная операда $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_n = K\Sigma_n$. Многообразие Alg-$\mathfrak{R}$ фактически является многообразием всех линейных ассоциативных $K$-алгебр (без единицы).

**Пример 3.** Построим операдный аналог полугрупповых и групповых алгебр. Пусть $G$ — полугруппа с единицей. Положим $\mathfrak{O}_n = G^n$. Действие $\Sigma_n$ определяется естественным образом (перестановка сомножителей). Определим композицию следующим образом. Пусть $\overline{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$, $g_1, \dots, g_k, x \in G$. Тогда полагаем $\overline{g}x = (g_1 x, \dots, g_n x)$. Если теперь $\omega_i = \overline{g}_i = (g_{1\,i}, \dots, g_{n_i\,i}) \in \mathfrak{O}_{n_i}$, $1 \leq i \leq m$, $\omega = (x_1, \dots, x_m) \in \mathfrak{O}_m$, то

$$\omega_1 \dots \omega_m \omega = (\overline{g}_1 x_1, \dots \overline{g}_m x_m) \in G^{n_1 + \dots + n_m} = \mathfrak{O}_{n_1 + \dots + n_m}.$$

Все свойства операды проверяются непосредственно. Линеаризация этой операды, т. е. семейство полугрупповых алгебр $\mathfrak{R} = \{ \mathfrak{R}_n = K[G^n] \mid n = 1, 2, \dots \}$, очевидным образом превращается в линейную операду. В случае, когда $G$ состоит из одного элемента, получается операда $\mathfrak{C}$ такая, что $\mathfrak{C}_n \cong K$, а композиция фактически сводится к умножению элементов коммутативного (полу)кольца $K$. В [5] она обозначена через **Com**.

**Пример 4.** Пусть $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{R}$ — две линейные операды над $K$. Определим операду $\mathfrak{K} \otimes \mathfrak{R}$, полагая $(\mathfrak{K} \otimes \mathfrak{R})_n = \mathfrak{K}_n \otimes \mathfrak{R}_n$. Действие симметрической группы $\Sigma_n$ на $\mathfrak{K}_n \otimes \mathfrak{R}_n$ определяется очевидным образом: $\sigma(\omega \otimes \lambda) = (\sigma\omega) \otimes (\sigma\lambda)$, а композиция — по правилу $(\omega_1 \otimes \lambda_1) \dots (\omega_m \otimes \lambda_m)(\omega \otimes \lambda) = (\omega_1 \dots \omega_m \omega) \otimes (\lambda_1 \dots \lambda_m \lambda)$. Определение операды проверяется без затруднений. Положим $\mathfrak{K}[G]_n = \mathfrak{K}_n \otimes K[G^n]$, т. е. $\mathfrak{K}[G]$ есть тензорное произведение $\mathfrak{K}$ и операды предыдущего примера.

**Теорема 1.** *Многообразие* Alg-$\mathfrak{K}[G]$ *изоморфно категории, объектами которой являются* $\mathfrak{K}$*-алгебры с заданным правым (линейным) действием полугруппы с единицей* $G$ *таким, что* $(a_1 g) \dots (a_n g)\omega = (a_1 \dots a_n \omega)g$ *для каждых* $\omega \in \mathfrak{K}_n$ *и* $g \in G$*, а морфизмами —* $G$*-эквивариантные гомоморфизмы* $\mathfrak{K}$*-алгебр.*

**Доказательство.** По определению $\mathfrak{K}[G]_n = \mathfrak{K}_n \otimes K[G^n]$. Можно представлять элементы $\mathfrak{K}[G]_n$ как линейные комбинации вида $\sum \omega\overline{g} = \sum \omega \otimes \overline{g}$, где $\omega \in \mathfrak{K}_n$, $\overline{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$ и почти все $\omega = 0$. Определим композицию на базисных элементах следующим образом: $(\omega_1\overline{g}_1)\dots(\omega_m\overline{g}_m)(\omega\overline{g}) = (\omega_1 \dots \omega_m\omega)(\overline{g}_1 \dots \overline{g}_m\overline{g})$, и далее распространим по линейности. Если выбрать $\overline{e} = (e, e, \dots, e)$, где $e \in G$ — единица группы $G$, то имеется гомоморфное вложение операд $\mathfrak{K}_n \to \mathfrak{K}[G]_n$, $\omega \mapsto \omega \otimes \overline{e} = \omega\overline{e}$. Поэтому любая $\mathfrak{K}[G]$-алгебра будет также алгеброй над подоперадой $\mathfrak{K}$, поэтому $K[G] \subset \mathfrak{K}[G]_1 = \mathfrak{K}_1[G]$. Это значит, что $\mathfrak{K}[G]$-алгебры являются также и $K[G]$-модулями. Пусть $g \in G$, $\overline{g} = \underbrace{(g, g, \dots, g)}_{n}$, $\omega \in \mathfrak{K}_n$, $a_1, \dots, a_n \in A$. Рассмотрим $(a_1 \dots a_n)(\omega \otimes \overline{g})$. По определению композиции в операде $\mathfrak{C}[G]$ имеем $\overline{g} = (e, e, \dots, e)g$, где $(e, e, \dots, e) \in \mathfrak{C}[G]_n = K[G^n]$, $g \in \mathfrak{C}[G]_1 = K[G]$. Отсюда $\omega\otimes\overline{g} = \omega\varepsilon\otimes(e, \dots, e)g = (\omega\otimes(e, \dots, e))(\varepsilon\otimes g)$. Ранее $\omega\otimes(e, \dots, e) = \omega\otimes\overline{e}$ уже отождествлен с $\omega$, а $\varepsilon \otimes g$ — с $g$. Поэтому элемент $(a_1 \dots a_n)(\omega \otimes \overline{g})$ алгебры $A$ можно представить как $((a_1 \dots a_n)\omega)g$. С другой стороны, тот же $\overline{g} = (g, g, \dots, g)$ в операде $\mathfrak{C}[G]$ есть $g \dots g(e, \dots, e) = (g, g, \dots, g)\overline{e}$.

Аналогично, $\omega \in \mathfrak{K}_n$ есть $\omega = (\varepsilon \dots \varepsilon)\omega$. Отсюда $\omega \otimes \overline{g} = \varepsilon \dots \varepsilon\omega \otimes (g \dots g)\overline{e} = (\varepsilon \otimes g) \dots (\varepsilon \otimes g)(\omega\overline{e})$. Ввиду ассоциативности $(a_1 \dots a_n)(\omega \otimes g) = (a_1 \dots a_n)((\varepsilon \otimes g) \dots (\varepsilon \otimes g)(\omega\overline{e})) = (a_1(\varepsilon \otimes g)) \dots (a_n(\varepsilon \otimes g))(\omega\overline{e}) = (a_1 g) \dots (a_n g)\omega$.

Обратно, пусть дана $\mathfrak{K}$-алгебра $A$, на которой линейно действует $G$ так, что выполнено тождество $(a_1 g) \dots (a_n g)\omega = (a_1 \dots a_n\omega)g$. Определим композицию $A^n \times (\mathfrak{K}_n \otimes K[G]) \to A$, удовлетворяющую необходимым требованиям. Пусть $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in G^n$, $\omega \in \mathfrak{K}_n$, $a_1, \dots, a_n \in A$. Для $\overline{x} = x_1 \dots x_n\overline{e}$ и $\omega = \varepsilon \dots \varepsilon\omega$ положим $a_1 \dots a_n(\omega \otimes \overline{x}) = (a_1 x_1) \dots (a_n x_n)\omega$. Прямая проверка показывает, что все аксиомы алгебры выполнены. Очевидно, что совпадают также соответствующие гомоморфизмы, и переходы от $\mathfrak{K}[G]$-алгебр к $\mathfrak{K}$-алгебрам (с указанным в теореме свойством) и в противоположном направлении взаимно обратны. $\square$

Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторая $K$-линейная операда, $X$ — произвольное множество. Построим матричную операду $\mathfrak{M} = M(X, \mathfrak{K})$, являющуюся операдным обобщением кольца $|X| \times |X|$-матриц над ассоциативным кольцом. Положим $\mathfrak{M}_n$ равным множеству всех отображений $\omega$ из $X^n \times X$ в $\mathfrak{K}_n$ таких, что для каждого $\overline{x} \in X^n$ имеет место $\omega(\overline{x}, y) = 0$ для почти всех $y \in X$. Определим действие $\Sigma_n$ на $\mathfrak{M}_n$, полагая $(\sigma\omega)(\overline{x}, y) = \sigma(\omega(\overline{x}\sigma, y))$. Пусть $\omega_i \in \mathfrak{M}_{n_i}$, $\omega \in \mathfrak{M}_m$, $1 \le i \le m$, $\overline{x}_i \in X^{n_i}$. Определим

$$(\omega_1 \dots \omega_m\omega)(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m, z) = \sum_{y_1, \dots, y_m \in X} \omega_1(\overline{x}_1, y_1) \dots \omega_m(\overline{x}_m, y_m)\omega(y_1 \dots y_m, z).$$

Непосредственная проверка показывает, что $\mathfrak{M}$ — операда. В случае, когда $\mathfrak{K} = \mathfrak{C}$, т. е. $\mathfrak{K}_n = K$ для всех $n$, получим классический объект — многомерные матрицы [16]. Введенная нами композиция превращается по сути в умножение многомерных матриц, определенное в [17].

Положим $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ и $M(n, \mathfrak{R}) = M([n], \mathfrak{R})$. Многомерным аналогом известного в теории колец факта [18] является

**Теорема 2.** *Операда $\mathfrak{K}$ изоморфна матричной операде $M(n, \mathfrak{R})$ для некоторой операды $\mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{K}_1$ существует семейство матричных единиц $\{e_{i\,j} \mid i, j = 1, \dots, n\}$. При этом операду $\mathfrak{R}$ можно выбрать как подоперaду в $\mathfrak{K}$.*

**Доказательство.** Пусть матричные единицы $e_{i\,j} \in \mathfrak{K}_1$, $1 \le i, j \le n$, существуют. Будем действовать по аналогии с [18]. Определим операду $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}_m \mid m \ge 1, 2 \dots\}$, $\mathfrak{R}_m = \{\omega \in \mathfrak{K}_m \mid \forall i, j \;\; e_{i\,j} \dots e_{i\,j}\omega = \omega e_{i\,j}\}$.

Легко проверяется, что $\mathfrak{R}$ — подоперада операды $\mathfrak{K}$. Для всех $\omega \in \mathfrak{K}_m$ определяем элементы $\omega_{j_1 \dots j_m, i} = \sum\limits_{j} e_{j\,j_1} \dots e_{j\,j_m}\, \omega e_{i\,j}$, принадлежащие $\mathfrak{R}_m$. Тогда $\omega = \sum\limits_{j_1 \dots j_m, i} e_{j_1\,i} \dots e_{j_m\,i}\omega_{j_1 \dots j_m, i}$. Обратно, по любому набору элементов $\mu_{j_1 \dots j_m, i} \in \mathfrak{R}_m$ по аналогичной формуле строится элемент $\mu \in \mathfrak{K}_m$, причем это соответствие взаимно однозначно. Утверждается, что $\mathfrak{R}$ — искомая операда, т. е. $\mathfrak{K} \cong M(n, \mathfrak{R})$. Построим $K$-линейное отображение $\omega \mapsto \widetilde{\omega} = (\omega)^{\sim}$, $\mathfrak{K} \to M(n, \mathfrak{R})$, определяя его так: $\widetilde{\omega} : X^n \times X \to \mathfrak{N}_m$, $\widetilde{\omega}(j_1 \dots j_m, i) = \omega_{j_1 \dots j_m, i}$. Взаимная однозначность этого отображения следует из однозначности представления $\omega$ через $\omega_{j_1 \dots j_m, i}$. Ясно, что $\widetilde{\sigma\omega} = \sigma\widetilde{\omega}$. $\widetilde{\sigma\omega}(\alpha, i) = (\sigma\omega)_{j_1 \dots j_m, i}(\alpha, i) = \sigma(\omega_{j_1 \dots j_m, i}(\alpha, i)) = \sigma\widetilde{\omega}(\alpha, i)$ для всех $(\alpha, i) \in X^m \times X$. Пусть $\omega_i \in \mathfrak{K}_{n_i}$, $\omega \in \mathfrak{K}_m$. Проверка показывает, что $(\omega_1 \dots \omega_m \omega)^{\sim} = \widetilde{\omega_1} \dots \widetilde{\omega_m}\widetilde{\omega}$. Итак, имеет место изоморфизм $\mathfrak{K} \cong M(n, \mathfrak{N})$. $\square$

Будем в дальнейшем обозначать операду $M(X, \mathfrak{C})$ через $M(X, K)$, т. к. это фактически операда многомерных матриц с элементами из $K$. Базисные элементы в $K$-модуле $M(X, K)_m$ (многомерные аналоги матричных единиц) определим так: $e_{\overline{x}, y}(\overline{x}', y') = 1$ при $\overline{x} = \overline{x}' \in X^m$, $y = y' \in X$, в противном случае это нуль. Легко проверить, что $e_{\overline{x}_1, y_1} \dots e_{\overline{x}_m, y_m} e_{y_1 \dots y_m, z} = e_{\overline{x}_1 \dots \overline{x}_m, z}$, в остальных случаях такая композиция равна нулю, как и в случае обычных матричных единиц. Доказательства следующих утверждений несложны.

**Лемма 2.** *Имеет место изоморфизм операд $M(X, \mathfrak{K}) \cong \mathfrak{K} \otimes M(X, K)$.*

**Лемма 3.** *Существует гомоморфизм операд $P : \mathfrak{C}[\Sigma_n] \longrightarrow M(n, K)$, который на базисных элементах определяется так: если $\overline{\sigma} = (\sigma_1 \dots \sigma_m)$ и $\omega = P(\overline{\sigma})$, то $\omega = \sum\limits_{j=1}^{n} e_{\sigma_1(j) \dots \sigma_m(j); j}$.*

Для любых двух $K$-линейных операд $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{K}$ можно определить произведение операд $\mathfrak{N} \times \mathfrak{K}$, $(\mathfrak{N} \times \mathfrak{K})_n = \mathfrak{N}_n \times \mathfrak{K}_n$, где все операции (композиция и действие $\Sigma_n$) покомпонентные. Конгруэнцией на $\mathfrak{K}$ назовем подоперaду $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{K} \times \mathfrak{K}$, $\mathfrak{E}_n \subseteq \mathfrak{K}_n \times \mathfrak{K}_n$ такую, что $\mathfrak{E}_n$ есть отношение эквивалентности для всех $n$ с обозначением $\omega_1 \sim_{\mathfrak{E}} \omega_2 \Leftrightarrow (\omega_1, \omega_2) \in \mathfrak{E}_n$. Если $K$ — коммутативное кольцо и все $\mathfrak{K}_n$ — модули, то конгруэнции на $\mathfrak{K}$ взаимно однозначно соответствуют идеалам, как и в случае колец.

**Теорема 3.** *Имеет место изоморфизм решеток конгруэнций операд $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{M} = M(n, \mathfrak{K})$. Если операды определены над кольцом, то имеет место изоморфизм решеток идеалов операд.*

**Доказательство.** Пусть дана некоторая конгруэнция $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{K} \times \mathfrak{K}$ в операде $\mathfrak{K}$. По ней строится конгруэнция $M(n, \mathfrak{U}) \subseteq M(n, \mathfrak{K}) \times M(n, \mathfrak{K})$,

$$(\omega_1, \omega_2) \in M(n, \mathfrak{U})_k \Leftrightarrow \forall\, (i_1 \dots i_k, i) \in [n]^k \times [n], \quad \omega_1(i_1 \dots i_k, i) \sim_{\mathfrak{U}} \omega_2(i_1 \dots i_k, i)$$
$$(\text{или} \ \ (\omega_1(i_1 \dots i_k, i), \omega_2(i_1 \dots i_k, i)) \in \mathfrak{U}_k).$$

Нетрудно проверить, что этим действительно определяется конгруэнция. Покажем, что соответствие $\mathfrak{U} \mapsto M(n, \mathfrak{U})$ инъективно. Пусть $M(n, \mathfrak{U}_1) = M(n, \mathfrak{U}_2)$. Возьмем любые $x', x'' \in \mathfrak{K}_m$ такие, что $x' \sim_{\mathfrak{U}_1} x''$, тогда существуют $\omega', \omega'' \in \mathfrak{M}_m$ такие, что $\omega'(1 \dots 1, 1) = x'$, $\omega''(1 \dots 1, 1) = x''$, $\omega'(i_1 \dots i_m, i) = 0$, $\omega''(i_1 \dots i_m, i) = 0$ для любого набора $(i_1 \dots i_m, i) \neq (1 \dots 1, 1)$. Отсюда следует $\omega' \sim_{M(n, \mathfrak{U}_1)} \omega''$, а значит, $\omega' \sim_{M(n, \mathfrak{U}_2)} \omega''$, откуда ввиду выбора $\omega'$, $\omega''$ получим $x' \sim_{\mathfrak{U}_2} x''$. По симметрии $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_2$.

Набор $(i_1 \dots i_k)$ из $[n]^k$ будем обозначать через $\alpha$. $\omega_1 \sim_{M(n, \mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2)} \omega_2 \Rightarrow$ для всех индексов $(\alpha, i)$ имеет место $\omega_1(\alpha, i) \sim_{\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2} \omega_2(\alpha, i) \Rightarrow \omega_1(\alpha, i) \sim_{\mathfrak{U}_1} \omega_2(\alpha, i)$ и $\omega_1(\alpha, i) \sim_{\mathfrak{U}_2} \omega_2(\alpha, i)$, откуда $M(n, \mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2) \subseteq M(n, \mathfrak{U}_1) \cap M(n, \mathfrak{U}_2)$. Обратное очевидно. Итак, соответствие $\mathfrak{U} \mapsto M(n, \mathfrak{U})$ сохраняет пересечения. Оно сохраняет также и включения, т. е. $\mathfrak{U}_1 \subseteq \mathfrak{U}_2$ влечет $M(n, \mathfrak{U}_1) \subseteq M(n, \mathfrak{U}_2)$, что проверяется очевидным образом. Следовательно, соответствие $\mathfrak{U} \mapsto M(n, \mathfrak{U})$ сохраняет и точные верхние грани, т. к. $\mathfrak{U}_1 \vee \mathfrak{U}_2 = \bigcap\limits_{\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2 \subseteq \mathfrak{U}} \mathfrak{U}$.

Осталось показать, что любая конгруэнция $\mathfrak{E}$ на $M(n, \mathfrak{K})$ имеет вид $M(n, \mathfrak{U})$ для некоторой (однозначно определенной) конгруэнции $\mathfrak{U}$ на $\mathfrak{K}$. Пусть дана конгруэнция $\mathfrak{E}$ на $M(n, \mathfrak{K})$, тогда конгруэнция $\mathfrak{U}$ на $\mathfrak{K}$, для которой $\mathfrak{E} = M(n, \mathfrak{U})$, определяется так. Пусть $x, y \in \mathfrak{K}_k$. Тогда

$$x \sim_{\mathfrak{U}} y \ \Leftrightarrow \ \exists\, \omega, \mu \in \mathfrak{N}_k \ \text{ такие, что } \ \omega(1 \dots 1, 1) = x, \ \ \mu(1 \dots 1, 1) = y, \ \ \omega \sim_{\mathfrak{E}} \mu.$$

Проверим, что это действительно конгруэнция. Бо́льшая часть проверок не вызывает затруднений. Пусть $x_1' \sim_{\mathfrak{U}} x_1'', \dots, x_m' \sim_{\mathfrak{U}} x_m''$, $x' \sim_{\mathfrak{U}} x''$. Тогда существуют $\omega_1' \sim_{\mathfrak{E}} \omega_1'', \dots, \omega_m' \sim_{\mathfrak{E}} \omega_m''$,

$\omega' \sim_{\mathfrak{E}} \omega''$ такие, что $\omega'_i(1\dots 1,1) = x'_i$, $\omega''_i(1\dots 1,1) = x''_i$, $\omega'(1\dots 1,1) = x'\omega''(1\dots 1,1) = x''$. Заменим элементы $\omega'_i$, $\omega''_i$, $\omega'$, $\omega''$, $1 \le i \le m$, на соответствующие элементы вида $\mu = e_{1\,1}\dots e_{1\,1}\omega e_{1\,1}$ (добавляя соответственные штрихи и индексы). Тогда $\mu(1\dots 1,1) = \omega(1\dots 1,1)$ и $\mu(i_1\dots i_m, i) = 0$ при $(i_1\dots i_m, i) \ne (1\dots 1,1)$. При этом сохранятся эквивалентности $\mu'_1 \sim_{\mathfrak{E}} \mu''_1, \dots, \mu'_m \sim_{\mathfrak{E}} \mu''_m$, $\mu' \sim_{\mathfrak{E}} \mu''$. Отсюда $\mu'_1\dots\mu'_m\mu'(1\dots 1,1) = x'_1\dots x'_m x'$, $\mu''_1\dots\mu''_m\mu''(1\dots 1,1) = x''_1\dots x''_m x''$, т. е. $x'_1\dots x'_m x' \sim_{\mathfrak{U}} x''_1\dots x''_m x''$.

Используя тождества

$e_{i_1\,1}\dots e_{i_m\,1}\omega e_{1\,i}(i_1\dots i_m, i) = \omega(1\dots 1,1)$,

$e_{i_1\,1}\dots e_{i_m\,1}\omega e_{1\,i}(i'_1\dots i'_m, i') = 0$ на остальных наборах $(i'_1\dots i'_m, i')$,

$e_{1\,i_1}\dots e_{1\,i_m}\omega' e_{i\,1}(1\dots 1,1) = \omega'(i_1\dots i_m, i)$,

легко убедимся, что набор $(1\dots 1,1) \in [n]^m \times [n]$ в определении конгруэнции $\mathfrak{U}$ можно заменить на любую фиксированную комбинацию $(i_1\dots i_m, i) \in [n]^m \times [n]$.

Теперь покажем, что $\mathfrak{E} = M(n,\mathfrak{U})$, где $\mathfrak{U}$ построена по $\mathfrak{E}$. Пусть $\omega_1 \sim_{\mathfrak{E}} \omega_2$. Утверждается,что $\omega_1 \sim_{M(n,\mathfrak{U})} \omega_2$, т. е. для всех $(\alpha, j) \in [n]^m \times [n]$ верно $\omega_1(\alpha,j) \sim_{\mathfrak{U}} \omega_2(\alpha,j)$. Это эквивалентно тому, что для любого фиксированного $(\alpha,j)$, как показано выше, существуют $\omega'_1$, $\omega'_2$ такие, что $\omega'_1(\alpha,j) = \omega_1(\alpha,j)$, $\omega'_2(\alpha,j) = \omega_2(\alpha,j)$ и $\omega'_1 \sim_{\mathfrak{E}} \omega'_2$. Но по условию в качестве $\omega'_1$ и $\omega'_2$ можно взять сами $\omega_1$ и $\omega_2$, причем сразу для всех $(\alpha,j)$.

Обратно, пусть $\omega_1 \sim_{M(n,\mathfrak{U})} \omega_2$. Рассмотрим представление $\omega_l$ при $l = 1,2$ в виде $\omega_l = \sum\limits_{k_1\dots k_m,k} \omega_{l(\alpha,k)}$, где $\omega_{l(\alpha,k)} = e_{k_1\,k_1}\dots e_{k_m\,k_m}\omega_l e_{k\,k}$ при $\alpha = (k_1\dots k_m)$. Проверка показывает, что $\omega_{l(\alpha,k)}(\alpha,k) = \omega_l(\alpha,k)$, а в остальных случаях $\omega_{l(\alpha,k)}(\beta,j) = 0$. Так как достаточно установить, что для всех $(\alpha,k)$ $\omega_{1(\alpha,k)} \sim_{\mathfrak{E}} \omega_{2(\alpha,k)}$, то можно считать, что $\omega_1(\beta,j) = \omega_2(\beta,j) = 0$ для всех $(\beta,j) \ne (\alpha,k)$. Но по определению $\mathfrak{U}$ существуют $\omega'_1$, $\omega'_2$ такие, что $\omega'_1(\alpha,k) = \omega_1(\alpha,k)$, $\omega'_2(\alpha,k) = \omega_2(\alpha,k)$ и $\omega'_1 \sim_{\mathfrak{E}} \omega'_2$. Замена $\omega'_l$ на $e_{k_1\,k_1}\dots e_{k_m\,k_m}\omega'_l e_{k\,k}$ не повлияет на эквивалентность по модулю $\mathfrak{E}$, но после этого окажется, что $\omega_l = \omega'_l$, $l = 1,2$. Значит, $M(n,\mathfrak{U}) \subseteq \mathfrak{E}$. $\square$

Пусть $\mathfrak{K}$ — линейная операда над $K$, и $A \in \mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{K}$. Модулем над алгеброй $A$ ([5], [19], [20]) называется следующий комплекс данных. Правый $K$-(полу)модуль $M$. Семейство $K$-линейных отображений композиции, заданных для всех $n = 1,2,\dots$,

$$M \otimes A^{\otimes(n-1)} \otimes \mathfrak{K}_n \longrightarrow M, \quad x \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1} \otimes \omega \mapsto x a_1 \dots a_{n-1}\omega,$$

которые, помимо линейности по всем аргументам, должны обладать следующими свойствами.

1) В случае $n = 1$ отображение $M \otimes \mathfrak{K}_1 \longrightarrow M$ задает на $M$ структуру унитарного $\mathfrak{K}_1$-модуля. В частности, $x\varepsilon = x$.

2) Ассоциативность. Пусть $x \in M$, $\overline{a}_1 \in A^{n_1-1}$, $\overline{a}_i \in A^{n_i}$ при $2 \le i \le m$, $\omega_i \in \mathfrak{K}_{n_i}$ при $1 \le i \le m$, $\omega \in \mathfrak{K}_m$. Тогда $(x\overline{a}_1\omega_1)(\overline{a}_2\omega_2)\dots(\overline{a}_m\omega_m)\omega = x(\overline{a}_1\overline{a}_2\dots\overline{a}_m)(\omega_1\omega_2\dots\omega_m\omega)$.

3) Если $\sigma \in \Sigma_n$, $\sigma(1) = 1$, то $x(a_2\dots a_n)(\sigma\omega) = x(a_{\sigma 2}\dots a_{\sigma n})\omega$.

Гомоморфизм модулей над алгеброй $A \in \mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{K}$ — это $K$-линейное отображение $h : M_1 \to M_2$ такое, что $h(x\overline{a}\omega) = h(x)\overline{a}\omega$. Обозначим через $\mathrm{Mod}\text{-}A_{\mathfrak{K}}$ категорию модулей над $A$ и их гомоморфизмов. Определим категорию $\mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{K}$, объекты которой — пары $(M,A)$, где $A$ есть $\mathfrak{K}$-алгебра, а $M$ — $A$-модуль. Морфизм этой категории из $(M_1,A_1)$ в $(M_2,A_2)$ состоит из пары $(h,f)$, где $f : A_1 \to A_2$ есть гомоморфизм $\mathfrak{K}$-алгебр, а $h : M_1 \to M_2$ есть гомоморфизм $K$-модулей такой, что для любого натурального $n$ и всевозможных $x \in M_1$, $a_1,\dots,a_{n-1} \in A_1$, $\omega \in \mathfrak{K}_n$ имеет место равенство $h(xa_1\dots a_{n-1}\omega) = h(x)f(a_1)\dots f(a_{n-1})\omega$. Естественным образом определен функтор $S = S_{\mathfrak{K}} : \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{K} \longrightarrow \mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{K}$, отображающий объект $(M,A)$ в $A$, а морфизм $(h,f)$ — в $f$. Ясно, что $\mathrm{Mod}\text{-}A_{\mathfrak{K}}$ изоморфна подкатегории $\mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{K}$, состоящей из всех объектов вида $(M,A)$ при данном фиксированном $A$ и всех морфизмов вида $(h,1_A)$.

**Теорема 4.** *Пусть $\mathfrak{M} = M(n,\mathfrak{K})$. Существуют функторы*

$F : \mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{K} \longrightarrow \mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{M}$, $G : \mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{M} \longrightarrow \mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{K}$,

$\overline{F} : \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{K} \longrightarrow \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{M}$, $\overline{G} : \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{M} \longrightarrow \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{K}$

*такие, что следующая диаграмма коммутативна с точностью до естественных эквивалентностей:*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{K} & \xrightarrow{F} & \mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{M} & \xrightarrow{G} & \mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{K} \\
\uparrow{\scriptstyle S_{\mathfrak{K}}} & & \uparrow{\scriptstyle S_{\mathfrak{M}}} & & \uparrow{\scriptstyle S_{\mathfrak{K}}} \\
\mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{K} & \xrightarrow{\overline{F}} & \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{M} & \xrightarrow{\overline{G}} & \mathrm{Mod}\text{-}\mathfrak{K}.
\end{array}$$

*При этом* $FG \cong \mathrm{Id}_{\mathrm{Alg}-\mathfrak{M}}$, $GF \cong \mathrm{Id}_{\mathrm{Alg}-\mathfrak{K}}$, $\overline{F}\,\overline{G} \cong \mathrm{Id}_{\mathrm{Mod}-\mathfrak{M}}$ *и* $\overline{G}\,\overline{F} \cong \mathrm{Id}_{\mathrm{Mod}-\mathfrak{K}}$. *В частности, для любой* $\mathfrak{K}$*-алгебры* $A$ *имеет место эквивалентность категорий* $\mathrm{Mod}\text{-}A_{\mathfrak{K}}$ *и* $\mathrm{Mod}\text{-}F(A)_{M(n,\mathfrak{K})}$.

**Доказательство.** Пусть $A \in \mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{K}$, тогда положим $F(A) = \mathrm{Map}([n], A) = \{\gamma \mid \gamma : [n] \to A\}$. ($\mathrm{Map}(X, Y)$ есть множество всех отображений из $X$ в $Y$.) Покажем, что $F(A)$ является $\mathfrak{M}$-алгеброй. При этом, если $\omega \in \mathfrak{M}_m$, $\omega : [n]^m \times [n] \to \mathfrak{K}_m$, то $\gamma_1 \dots \gamma_m \omega \in \mathrm{Map}([n], A)$ определяется так:

$$(\gamma_1 \dots \gamma_m \omega)(j) = \sum_{k_1 \dots k_m} \gamma_1(k_1) \dots \gamma_m(k_m) \omega(k_1 \dots k_m, j).$$

Имеем $\gamma_i(k_i) \in A$, $1 \le i \le m$, $\omega(k_1 \dots k_m, j) \in \mathfrak{K}_m$. Ввиду того, что $A$ есть $\mathfrak{K}$-алгебра, вся сумма принадлежит $A$. Ассоциативность композиции проверяется прямым вычислением. Легко проверяются также свойство единицы и свойство, связанное с действием подстановок (по определению $(\gamma_1 \dots \gamma_m)(\sigma\omega) = \gamma_{\sigma 1} \dots \gamma_{\sigma m}\omega)$. Итак, $F(A)$ — действительно $\mathfrak{M}$-алгебра. Если дан гомоморфизм $\mathfrak{K}$-алгебр $f : A_1 \to A_2$, то $F(f)$ есть гомоморфизм $\mathfrak{M}$-алгебр, определяемый следующим образом: если $\gamma : [n] \longrightarrow A_1$, то $F(f)$ действует по правилу $F(f)(\gamma)(i) = f(\gamma(i))$, $F(f) : F(A_1) \longrightarrow F(A_2)$. Гомоморфность $F(f)$ есть без труда проверяемое соотношение $F(f)(\gamma_1 \dots \gamma_m \omega) = F(f)(\gamma_1) \dots F(f)(\gamma_m)\omega$. Свойство $F(gf) = F(g)F(f)$, где $A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3$, сразу следует из определения. Таким образом, $F$ — функтор.

Определим теперь (по аналогии с теорией колец) операду $e_{i\,i}\mathfrak{M}e_{i\,i}$ следующим образом: $(e_{i\,i}\mathfrak{M}e_{i\,i})_m = e_{i\,i} \dots e_{i\,i}\mathfrak{M}_m e_{i\,i} = \{e_{i\,i} \dots e_{i\,i}\omega e_{i\,i} \mid \omega \in \mathfrak{M}_m\}$. Ее можно считать подоперадой операды $\mathfrak{M}$, хотя в $e_{i\,i}\mathfrak{M}e_{i\,i}$ единицей является элемент $e_{i\,i}$. Очевидно, $(e_{i\,i}\mathfrak{M}e_{i\,i})_m$ совпадает с множеством $D_{i,m} = \{\mu : [n]^m \times [n] \to \mathfrak{K}_m \mid \mu(i_1 \dots i_m, j) = 0$ при $(i_1, \dots, i_m, j) \ne (i, \dots, i, i)\}$. Построим изоморфизмы операд $\lambda_i : \mathfrak{K} \longrightarrow e_{i\,i}\mathfrak{M}e_{i\,i}$, $(\lambda_i)_m : \mathfrak{K}_m \longrightarrow (e_{i\,i}\mathfrak{M}e_{i\,i})_m$, полагая $(\lambda_i)_m(c) = \lambda_c$, $\lambda_c(i \dots i, i) = c$, $\lambda_c(i_1 \dots i_m, j) = 0$, если хотя бы один из $i_1 \dots i_m$, $j \ne i$. Фиксируем здесь $i$, а $m$ будет однозначно определяться из контекста. Проверим, что $\lambda_i$ — гомоморфизм операд. Линейность и эквивариантность очевидны, так что надо установить равенство $\lambda_{c_1} \dots \lambda_{c_m}\lambda_c = \lambda_{c_1 \dots c_m c}$, сравнив значения функций на одних и тех же аргументах. Так как $(e_{i\,i}\mathfrak{M}e_{i\,i})_m = D_{i,m}$, то легко заметить, что $\lambda_i$ — изоморфизм. В частности, имеем изоморфизм $e_{i\,i}\mathfrak{M}e_{i\,i} \cong e_{j\,j}\mathfrak{M}e_{j\,j}$, задаваемый композицией $e_{i\,i}\mathfrak{M}e_{i\,i} \xrightarrow{\lambda_i^{-1}} \mathfrak{K} \xrightarrow{\lambda_j} e_{j\,j}\mathfrak{M}e_{j\,j}$.

Пусть $B \in \mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{M}$, $Be_{i\,i} = \{be_{i\,i} \mid b \in B\}$. Легко проверяется, что $Be_{i\,i}$ имеет структуру $e_{i\,i}\mathfrak{M}e_{i\,i}$-алгебры

$$(b_1 e_{i\,i}) \dots (b_m e_{i\,i})(e_{i\,i} \dots e_{i\,i}\omega e_{i\,i}) = ((b_1 e_{i\,i}) \dots (b_m e_{i\,i})(e_{i\,i} \dots e_{i\,i}\omega))e_{i\,i} \in Be_{i\,i}.$$

$Be_{i\,i}$ можно теперь превратить в $\mathfrak{K}$-алгебру следующим образом: $(b_1 e_{i\,i}) \dots (b_m e_{i\,i})\omega = (b_1 e_{i\,i}) \dots (b_m e_{i\,i})(\lambda_i)_m(\omega)$, где $\omega \in \mathfrak{K}_m$, $(\lambda_i)_m(\omega) \in (e_{i\,i}\mathfrak{R}e_{i\,i})_m$.

Построим изоморфизмы $K$-алгебр $\alpha_{i\,j} : Be_{i\,i} \longrightarrow Be_{j\,j}$, полагая $\alpha_{i\,j}(b) = be_{i\,j}$. Предварительно заметим, что $Be_{i\,i} = \{b \in B \mid be_{i\,i} = b\}$. Линейность $\alpha_{i\,j}$ очевидна, остается убедиться, что $\alpha_{i\,j}(b_1 \dots b_m\omega) = \alpha_{i\,j}(b_1) \dots \alpha_{i\,j}(b_m)\omega$. В самом деле, $\alpha_{i\,j}(b_1 \dots b_m\omega) = b_1 \dots b_m e_{i\,j} \dots e_{i\,j}(\lambda_j)_m(\omega)$, и достаточно показать, что $(\lambda_i)_m(\omega)e_{i\,j} = e_{i\,j} \dots e_{i\,j}(\lambda_j)_m(\omega)$. Вычисляя для каждого аргумента $(i_1 \dots i_m, j_0)$ левую и правую части необходимого нам равенства, убеждаемся, что обе части равны $\omega$ для $(i \dots i, j)$, а на остальных аргументах — это нули. Для каждого $\alpha_{i\,j}$ существует обратный $\alpha_{i\,j}^{-1} = \alpha_{j\,i}$. Таким образом, $\alpha_{i\,j} : Be_{i\,i} \longrightarrow Be_{j\,j}$ есть изоморфизм $\mathfrak{K}$-алгебр. Так как

$\sum\limits_{i=1}^{n} e_{i\,i} = 1$, то $B = \sum\limits_{i=1}^{n} Be_{i\,i}$. Теперь можно построить функтор $G : \mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{M} \to \mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{K}$. Пусть $B \in \mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{M}$. Положим $G(B) = Be_{1\,1}$. Как было показано выше, $Be_{1\,1}$ является $\mathfrak{K}$-алгеброй. Пусть дан гомоморфизм $\mathfrak{M}$-алгебр $g : B_1 \longrightarrow B_2$, тогда определяем $G(g) : G(B_1) \longrightarrow G(B_2)$ как ограничение $g$ на подмножество $Be_{1\,1} \subset B$, $G(g)(be_{1\,1}) = g(be_{1\,1}) = g(b)e_{1\,1}$. Проверка показывает, что $G(g)$ — гомоморфизм, а $G$ — функтор.

Построим естественный изоморфизм $\varphi : \mathrm{Id}_{\mathrm{Alg}-\mathfrak{K}} \to GF$. Пусть $A \in \mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{K}$, тогда $GF(A) = F(A)e_{1\,1} = \{\, \gamma e_{1\,1} \mid \gamma : [n] \to A\}$, $\gamma e_{1\,1}(i) = \sum\limits_{j} \gamma(j) e_{1\,1}(j, i) = \gamma(1)e_{1\,1}(1, i)$, отсюда $\gamma e_{1\,1}(i) = 0$, если $i \neq 1$, и $\gamma e_{1\,1}(1) = \gamma(1)$. Положим $\varphi(A)(a) = \gamma_a$, где $\gamma_a : [n] \to A$ есть такое отображение, что $\gamma_a(1) = a$, $\gamma_a(j) = 0$, $j \neq 1$. Очевидно, отображение $a \mapsto \gamma_a$ является биективным. Легко проверяются $K$-линейность $\varphi(A)$, равенство $\varphi(A)(a_1 \ldots a_m \omega) = \varphi(A)(a_1) \ldots \varphi(A)(a_m)\omega$ и то, что $\varphi(A)$ есть гомоморфизм. Проверим, что $\varphi$ — естественное преобразование, т. е. совпадают два отображения: $A_1 \xrightarrow{\varphi(A_1)} F(A_1)e_{1\,1} \xrightarrow{F(f)e_{1\,1}} F(A_2)e_{1\,1}$ и $A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{\varphi(A_2)} F(A_2)e_{1\,1}$. По определению функтора $G$ для $B_1 \xrightarrow{g} B_2$ имеем $G(g)(be_{1\,1}) = g(b)e_{1\,1}$, таким образом, $GF(f)(\gamma) = F(f)e_{1\,1} = (f\gamma)e_{1\,1}$, т. е. все будет следовать из равенства $(f\gamma_a)e_{1\,1} = \gamma_{f(a)}$, проверяемого прямым вычислением. Итак, $\varphi$ — естественный изоморфизм.

Построим естественный изоморфизм $\psi : FG \to \mathrm{Id}_{\mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{M}}$. Пусть $B \in \mathrm{Alg}\text{-}\mathfrak{M}$, $\omega \in FG(B)$, т. е. $\omega : [n] \to G(B) = Be_{1\,1}$. Положим $\psi(B)(\omega) = \psi(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{1\,i}(\omega(i))$, где $\omega(i) \in G(B) = Be_{1\,1}$, $\alpha_{1\,i}(\omega(i)) \in Be_{i\,i}$. Покажем, что $\psi = \psi(B)$ — гомоморфизм $\mathfrak{M}$-алгебр, т. е. $\psi(\omega_1 \ldots \omega_m \mu) = \psi(\omega_1) \ldots \psi(\omega_m)\mu$, где $\mu \in \mathfrak{M}_m$. Имеет место тождество

$$\lambda_i(\mu(k_1 \ldots k_m, k)) = e_{i\,k_1} \ldots e_{i\,k_m} \mu e_{i\,i}. \qquad (*)$$

Заметим также, что $\alpha_{1\,k}(c)e_{l\,i} = \alpha_{1\,i}(c)$ при $l = k$, а при $l \neq k$ — это нуль. Здесь $c \in Be_{1\,1}$. Применив формулу $(*)$, получим

$$\psi(\omega_1 \ldots \omega_m \mu) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1\,k}(c)((\omega_1 \ldots \omega_m \mu)(k)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k_1 \ldots k_m} \alpha_{1\,k_1}(\omega_1(k_1)) \ldots \alpha_{1\,k_m}(\omega_m(k_m)) e_{k_1\,k_1} \ldots e_{k_m\,k_m} \mu e_{k\,k}. \qquad (**)$$

Так как для каждого $\mu \in \mathfrak{M}_m$ имеет место тождество $\mu = \sum\limits_{i_1 \ldots i_m} \sum\limits_{k} e_{i_1\,i_1} \ldots e_{i_m\,i_m} \mu e_{k\,k}$, то выражение $\psi(\omega_1) \ldots \psi(\omega_m)\mu$ также можно привести к виду $(**)$.

Итак, $\psi(B)$ есть гомоморфизм $\mathfrak{M}$-алгебр. Проверим естественность $\psi$. Для каждого гомоморфизма $\mathfrak{M}$-алгебр $g : B_1 \longrightarrow B_2$ должны быть равны следующие композиции отображений: $B_2 \xleftarrow{g} B_1 \xleftarrow{\psi(B_1)} FG(B_1)$ и $B_2 \xleftarrow{\psi(B_2)} FG(B_2) \xleftarrow{FG(g)} FG(B_1)$. Здесь $G(g)(b) = g(be_{1\,1}) = g(b)e_{1\,1}$, $FG(g)$ есть композиция $[n] \xrightarrow{\gamma} B_1 e_{1\,1} \xrightarrow{G(g)} B_2 e_{1\,1}$. Все сводится к равенству $g\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{1\,i}(\gamma(i))\Big) = \sum\limits_{i=1}^{n} g(\alpha_{1\,i}(\gamma(i))) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{1\,i}(g\gamma(i))$. Для доказательства достаточно установить, что для всех $i$ будет $g(\alpha_{1\,i}(b)) = \alpha_{1\,i}(g(b))$. Так как $\alpha_{1\,i} = xe_{1\,i}$, а $g$ есть гомоморфизм $\mathfrak{M}$-алгебр, то это проверяется непосредственно.

Осталось показать, что $\psi$ — изоморфизм. Ранее было отмечено, что $B = \sum\limits_{i=1}^{n} Be_{i\,i}$. На самом деле, легко показать, что эта сумма $K$-модулей прямая. Таким образом, $\omega \in FG(B)$ можно однозначно представить как строку $(\omega(1), \ldots, \omega(n))$, $\omega(i) \in Be_{i\,i}$. Теперь становится очевидным наличие взаимно однозначного соответствия $(\omega(1), \ldots, \omega(n)) \leftrightarrow (\alpha_{1\,1}(\omega(1)), \ldots, \alpha_{1\,n}(\omega(n)))$, а т. к. $\alpha_{i\,j}$ являются изоморфизмами, то имеем изоморфизм на каждой компоненте $\omega(i) \leftrightarrow \alpha_{1\,i}(\omega(i))$, откуда получаем, что $\psi$ есть изоморфизм $\mathfrak{M}$-алгебр.

Полагаем $\overline{F}(M,A) = (F_1(M),F(A))$, $\overline{G}(N,B) = (G_1(N),G(B))$, где $F_1(M) = \mathrm{Map}([n],M)$, $G_1(N) = Ne_{1\,1}$. Сначала проверим, что $F_1(M)$ есть модуль над алгеброй $F(A)$ над операдой $\mathfrak{M}$. Пусть $\gamma_1 \in F_1(M)$, $\gamma_1 : [n] \to M$, $\gamma_2 \in F(A), \dots, \gamma_k \in F(A)$, $\omega \in \mathfrak{M}_k$, $\gamma_i : [n] \to A$, $2 \le i \le k$, $\omega : [n]^k \times [n] \to \mathfrak{K}_k$. Определим отображение $F_1(M) \times F(A) \times \dots \times F(A) \times \mathfrak{M}_k \to F_1(M)$, полагая $(\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_k\omega)(j) = \sum\limits_{1 \le l_1 \dots l_k \le n} \gamma_1(l_1) \dots \gamma_k(l_k)\omega(l_1 \dots l_k, j)$. Здесь $\gamma_1(l_1) \in M$, $\gamma_i(l_i) \in A$ по определению $F(A)$ при $i \ge 2$, $\omega(l_1 \dots l_k, j) \in \mathfrak{K}_k$. Тогда $\gamma_1(l_1) \dots \gamma_k(l_k)\omega(l_1 \dots l_k, j) \in M$, т.к. $M$ — модуль над алгеброй $A$. Свойства модульной композиции без затруднений проверяются прямым вычислением значений функций для одних и тех же аргументов. Итак, $F_1(M)$ — модуль над алгеброй $F(A)$; $\overline{F} = (F_1, F)$ — функтор из Mod-$\mathfrak{K}$ в Mod-$\mathfrak{M}$: для заданного гомоморфизма $\mathfrak{K}$-алгебр $f : A_1 \to A_2$ и соответствующего ему гомоморфизма $h$ из $A_1$-модуля $M_1$ в $A_2$-модуль $M_2$ формула $F_1(h)(\gamma)(i) = h(\gamma(i))$ определяет гомоморфизм из $F(A_1)$-модуля $F_1(M_1)$ в $F(A_2)$-модуль $F_1(M_2)$, соответствующий гомоморфизму алгебр $F(f) : F(A_1) \to F(A_2)$.

Перейдем к построению функтора $G_1 : \text{Mod-}B_{\mathfrak{M}} \to \text{Mod-}G(B)_{\mathfrak{K}}$. Пусть $N \in \text{Mod-}B_{\mathfrak{M}}$, тогда положим $G_1(N) = Ne_{1\,1}$. Покажем сначала, что $G_1(N)$ есть $G(B)$-модуль над операдой $e_{1\,1}\mathfrak{M}e_{1\,1} \cong \mathfrak{K}$. Определим отображение $G_1(N) \times G(B) \times \dots \times G(B) \times e_{1\,1}\mathfrak{M}e_{1\,1} \longrightarrow G(N)$, полагая его равным ограничению композиции для модуля $N$ на подмножество $(Ne_{1\,1} \times Be_{1\,1} \times \dots \times Be_{1\,1} \times e_{1\,1}\mathfrak{M}_k e_{1\,1}) \subset N \times B \times \dots \times B \times \mathfrak{M}_k$. Достаточно показать, что результат принадлежит $Ne_{1\,1}$. Пусть $x \in N$, $b_i \in B$, тогда $(xe_{1\,1})(b_2e_{1\,1}) \dots (b_ke_{1\,1})(e_{1\,1} \dots e_{1\,1}\omega e_{1\,1}) = (xb_2 \dots b_k)(e_{1\,1} \dots e_{1\,1}\omega)e_{1\,1}$. Равенство имеет место в силу ассоциативности композиции для модуля $N$ над алгеброй $B$. Отсюда же следует ассоциативность композиции для модуля $Ne_{1\,1}$. Нетрудно показать, что свойство, связанное с действием симметрических групп, также выполнено. Итак, $G_1(N)$ есть модуль над алгеброй $G(B)$ над операдой $e_{1\,1}\mathfrak{M}e_{1\,1}$. Чтобы превратить $G_1(N)$ в модуль над операдой $\mathfrak{M}$, как и выше, используется изоморфизм $\lambda_1 : \mathfrak{K} \to e_{1\,1}\mathfrak{M}e_{1\,1}$. Так как бо́льшая часть вычислений и проверок аналогична уже проделанным, то будем опускать их, описывая только общую схему рассуждений.

Легко проверяется, что $\overline{G} = (G_1, G)$ является функтором. Остается построить естественные изоморфизмы $\overline{\varphi} : \mathrm{Id}_{\text{Mod-}\mathfrak{K}} \to \overline{G}\,\overline{F}$, $\overline{\psi} : \overline{F}\,\overline{G} \to \mathrm{Id}_{\text{Mod-}\mathfrak{M}}$. Каждый из них фактически состоит из двух компонент: $\overline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi)$, $\varphi_1 : \mathrm{Id} \to G_1F_1$, $\varphi : \mathrm{Id} \to GF$, $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi)$, $\psi_1 : F_1G_1 \to \mathrm{Id}$, $\psi : FG \to \mathrm{Id}$. Отображения $\varphi_1$ и $\psi_1$ строятся следующим образом. Пусть $M$ — модуль над $A \in \text{Alg-}\mathfrak{K}$, тогда $G_1F_1(A) = F_1(A)e_{1\,1} = \{\gamma : [n] \to M \mid \gamma(j) = 0 \text{ при } j \neq 1\}$. Определяем $\varphi_1(M)(x) = \gamma_x : [n] \to M$, $\gamma_x(1) = x$, $\gamma_x(j) = 0$ при $j > 1$. Биективность очевидна, а все остальные необходимые свойства проверяются точно так же, как и для $\varphi$. Пусть $N$ — модуль над $B \in \text{Alg-}\mathfrak{M}$, тогда $F_1G_1(N) = \{\gamma : [n] \to Ne_{1\,1}\}$. Ясно, что $N = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} Ne_{i\,i}$, и каждый $Ne_{i\,i}$ есть $Be_{i\,i}$-модуль над операдой $e_{i\,i}\mathfrak{M}e_{i\,i}$. Существует семейство изоморфизмов $\beta_{i\,j} : Ne_{i\,i} \to Ne_{j\,j}$, согласованных с изоморфизмами $\alpha_{i\,j}$, построенными выше, а именно, $\beta_{i\,j}(x) = xe_{i\,j}$. Теперь определяем $\psi_1(N) = \psi_1 : F_1G_1(N) \to N$, полагая $\psi_1(\gamma) = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_{1\,i}(\gamma(i))$. Биективность и остальные требуемые проверки проходят по аналогии с проделанными выше. $\square$

## Литература


1. Артамонов В.А. *Клоны полилинейных операций и мультиоператорные алгебры* // УМН. – 1969. – Т. 24. – № 1. – С. 47–59.
2. May J.P. *The geometry of iterated loop spaces* // Lect. Notes Math. – 1972. – V. 271. – 175 p.
3. Бордман Дж., Фогт Р. *Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах.* – М.: Мир, 1977. – 408 с.
4. Смирнов В.А. *Гомотопическая теория коалгебр* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1985. – Т. 49. – № 6. – С. 1302–1321.
5. Ginzburg V., Kapranov M. *Koszul duality for operads* // Duke Math. J. – 1994. – V. 76. – № 1. – P. 203–272.

6. Loday J.-L, Stasheff J.D., Voronov A.A. *Operads: proceedings of renaissance conferences* // Contemporary Math. – 1997. – V. 202. – 443 p.
7. Kapranov M. *Operads and algebraic geometry* // Proc. Int. Congr. Math. Berlin, 1998. August 18–27. V. II: Invited Lectures. (Documenta Mathematica. Extra Volume ICM. II. – P. 277–286).
8. Далецкий Ю.Л. *Модули и расслоения над операдой* // Алгебра и анализ. – 1998. – Т. 10. – № 1. – С. 20–31.
9. Тронин С.Н. *О многообразиях, задаваемых полилинейными тождествами* // Тез. сообщ. XIX Всесоюзн. алгебр. конф., 9–11 сент. 1987 г. Ч. 2. – Львов, 1987. – С. 280.
10. Тронин С.Н. *О некоторых свойствах финитарных алгебраических теорий* // Тез. сообщ. V Сибирской школы по многообразиям алгебр. систем, 1–5 июля 1988 г. – Барнаул, 1988. – С. 68–70.
11. Тронин С.Н. *О некоторых свойствах алгебраических теорий многообразий линейных алгебр,* I. *Многообразия, задаваемые полилинейными тождествами.* – Казанск. гос. ун-т. – Казань, 1988. – 31 с. – Деп. в ВИНИТИ 11.08.88, № 6511-В88.
12. Тронин С.Н. *О ретракциях свободных алгебр и модулей*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Кишинев, 1989. – 105 с.
13. Тронин С.Н., Копп О.А. *Матричные линейные операды* // Алгебра и анализ. Тез. докл. школы-конф., посвящ. 100-летию со дня рожд. Б.М. Гагаева (16–22 июня 1997 г., г. Казань). – Казань. – 1997. – С. 216–217.
14. Копп О.А. *Эквивалентность Мориты для матричных линейных операд* // Математика, механика, программирование. Тез. докл. студ. научн. конф. фак-ов ВМК и мехмата Казанск. гос. ун.-та. – Казань, 1998. – С. 12–13.
15. Артамонов В.А., Салий В.Н., Скорняков Л.А. и др. *Общая алгебра.* Т. 2. – М.: Наука, 1991. – 480 с.
16. Соколов Н.П. *Введение в теорию многомерных матриц.* – Киев: Наук. думка, 1972. – 175 с.
17. Гаспарян А.С. *О некоторых приложениях многомерных матриц.* – М.: ВЦ АН СССР, 1983. – 60 с.
18. Джекобсон Н. *Строение колец.* – М.: Ин. лит., 1961. – 392 с.
19. May J.P. *Operads, algebras and modules* // Contemp. Math. – 1997. – V. 202. – P. 15–31.
20. May J.P. *Definitions: operads, algebras and modules* // Contemp. Math. – 1997. – V. 202. – P. 1–7.

*Казанский государственный университет*

*Поступили*
*первый вариант* 01.07.1998
*окончательный вариант* 21.04.1999