*Известия вузов. Математика* *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
*2011, № 7, с. 67–79* *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0074*

*В.Ю. ШАПРЫНСКИЙ*

# ДИСТРИБУТИВНЫЕ И НЕЙТРАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ РЕШЕТКИ КОММУТАТИВНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

*Аннотация.* В статье полностью описаны многообразия коммутативных полугрупп, являющиеся дистрибутивными, стандартными или нейтральными элементами решетки всех коммутативных многообразий полугрупп. В частности, показано, что свойства быть дистрибутивным и стандартным элементом в этой решетке эквивалентны.

*Ключевые слова*: полугруппа, многообразие, решетка, дистрибутивный элемент, нейтральный элемент, стандартный элемент.

*УДК*: 512.532

*Abstract.* We completely determine commutative semigroup varieties that are distributive, standard or neutral elements of the lattice of all commutative semigroup varieties. In particular, it turns out that the properties of being a distributive element and of being a standard element in this lattice are equivalent.

*Keywords*: semigroup, variety, lattice, distributive element, neutral element, standard element.

## 1. Введение и формулировки основных результатов

Решетка всех многообразий полугрупп, которую будем обозначать через **SEM**, является предметом интенсивных исследований на протяжении более чем четырех последних десятилетий. В этом направлении накоплен обширный и весьма разнообразный материал, систематическому изложению которого посвящен недавний обзор [1].

В теории решеток заметное внимание уделяется изучению специальных элементов различных типов. Напомним определения тех из них, которые будут упоминаться в дальнейшем. Элемент $x$ решетки $\langle L; \vee, \wedge \rangle$ называется
*дистрибутивным*, если

$$\forall y, z \in L \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$$

*стандартным*, если

$$\forall y, z \in L \quad (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z);$$

Поступила 01.03.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 09-01-12142, 10-01-00524, и программы "Развитие научного потенциала высшей школы" Федерального агентства по образованию Российской Федерации (проект № 2.1.1/3537).

*модулярным*, если

$$\forall y, z \in L \ \ y \leq z \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y;$$

*нижнемодулярным*, если

$$\forall y, z \in L \ \ x \leq y \longrightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z);$$

*нейтральным*, если для любых элементов $y, z \in L$ элементы $x$, $y$ и $z$ порождают дистрибутивную подрешетку в $L$.

*Кодистрибутивные, костандартные* и *верхнемодулярные* элементы определяются двойственно к дистрибутивным, стандартным и нижнемодулярным соответственно. Обширную информацию о [ко]дистрибутивных, [ко]стандартных и нейтральных элементах, показывающую естественность и важность их изучения, можно найти, например, в ([2], § III.2).

В последние годы появился целый ряд работ, посвященных изучению специальных элементов решетки **SEM**. Изложению полученных при этом результатов посвящен § 14 обзора [1]. Решетка **SEM** содержит целый ряд обширных и важных подрешеток (см. § 1 и гл. 2 в [1]). Представляется естественным изучать специальные элементы не только всей решетки **SEM**, но и этих ее подрешеток. Одной из основных подрешеток в **SEM** является решетка всех коммутативных многообразий полугрупп, которую будем обозначать через **Com**. Эта решетка устроена весьма сложно. Достаточно сказать, что она содержит изоморфную копию любой конечной решетки [3] и потому не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству. В то же время, известно, что эта решетка счетна [4]. В работе [5] предложена некоторая параметризация решетки **Com**. Мы не будем излагать ее здесь, поскольку далее она не понадобится. В данной работе описываем дистрибутивные, стандартные и нейтральные элементы решетки **Com**. Чтобы сформулировать основные результаты работы, нам понадобятся некоторые определения и обозначения.

Для краткости будем называть многообразие коммутативных полугрупп *дистрибутивным в* **Com**, если оно является дистрибутивным элементом решетки **Com**. Аналогичное соглашение будет приниматься и для всех остальных типов специальных элементов. Через $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{COM}$ обозначаем тривиальное многообразие, многообразие всех полурешеток и многообразие всех коммутативных полугрупп соответственно. Пару тождеств вида $ux = xu = u$, где $x$ – буква, не входящая в запись слова $u$, как обычно, заменяем символическим тождеством $u = 0$. Тождества такого вида называются 0-*приведенными*. Многообразие коммутативных полугрупп, которое можно задать только 0-приведенными тождествами и тождеством коммутативности, будем называть 0-*приведенным в* **Com**.

Первым из двух основных результатов данной работы является

**Теорема 1.1.** *Для многообразия коммутативных полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны*:

а) *$\mathcal{V}$ дистрибутивно в* **Com**,

б) *$\mathcal{V}$ стандартно в* **Com**,

в) *либо $\mathcal{V} = \mathcal{COM}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ —* 0-*приведенное в* **Com** *многообразие, в котором выполнены тождества*

$$x^3yz = x^2y^2z = 0 \tag{1}$$

*и либо выполнены оба тождества*

$$x^3y = 0, \quad x^2y^2 = 0, \tag{2}$$

*либо не выполнено ни одно из них.*

Поскольку всякий стандартный элемент модулярен, из теоремы 1.1 вытекает

**Следствие 1.1.** Если многообразие коммутативных полугрупп дистрибутивно в **Com**, то оно модулярно в **Com**.

Вторым основным результатом работы является

**Теорема 1.2.** *Для многообразия коммутативных полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны*:

а) *$\mathcal{V}$ нейтрально в* **Com**,
б) *$\mathcal{V}$ дистрибутивно и кодистрибутивно в* **Com**,
в) *либо $\mathcal{V} = \mathcal{COM}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ – одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству*

$$x^2y = 0. \tag{3}$$

Работа состоит из трех разделов. В разделе 2 собраны необходимые для дальнейшего определения, обозначения и вспомогательные результаты. Некоторые из них (например, предложения 2.1–2.3) представляют определенный самостоятельный интерес. В разделе 3 доказываются теоремы 1.1 и 1.2.

## 2. Вспомогательные результаты

Если $a$ — элемент решетки $L$, то через $(a]$ (соответственно $[a)$) обозначается *главный* [*ко*]*идеал* решетки $L$, порожденный элементом $a$, т. е. множество $\{x \in L \mid x \le a\}$ (соответственно $\{x \in L \mid x \ge a\}$).

**Лемма 2.1.** *Пусть $a$ — атом и нейтральный элемент решетки $L$, и пусть $s(x_0, x_1, ..., x_n) = t(x_0, x_1, \dots, x_n)$ — решеточное тождество, выполненное в двухэлементной решетке. Тогда для любых значений переменных $x_0, x_1, \dots, x_n \in L$ равенство*

$$s(x_0, x_1, \dots, x_n) = t(x_0, x_1, \dots, x_n) \tag{4}$$

*эквивалентно равенству $s(x_0 \vee a, x_1 \vee a, \dots, x_n \vee a) = t(x_0 \vee a, x_1 \vee a, \dots, x_n \vee a)$.*

*Доказательство.* Поскольку $a$ — нейтральный элемент, отображение $x \longmapsto (x \wedge a, x \vee a)$ является вложением $L$ в прямое произведение $(a] \times [a)$ (см., например, [2], теорема III.2.4). Следовательно, равенство (4) эквивалентно системе равенств

$$s(x_0 \wedge a, x_1 \wedge a, \dots, x_n \wedge a) = t(x_0 \wedge a, x_1 \wedge a, \dots, x_n \wedge a),$$
$$s(x_0 \vee a, x_1 \vee a, \dots, x_n \vee a) = t(x_0 \vee a, x_1 \vee a, \dots, x_n \vee a).$$

Остается заметить, что первое из равенств этой системы выполняется тождественно. Действительно, так как $a$ — атом, идеал $(a]$ является двухэлементной цепью и потому удовлетворяет тождеству $s = t$. □

Пусть $I$ — решеточное тождество вида $s = t$ от (упорядоченного) набора переменных $x_0, x_1, \dots, x_n$. Элемент $x$ решетки $L$ назовем *$I$-элементом*, если

$$\forall x_1, \dots, x_n \in L \ s(x, x_1, \dots, x_n) = t(x, x_1, \dots, x_n).$$

Отметим, что специальные элементы всех рассматриваемых нами типов являются $I$-элементами для подходящего $I$. Для [ко]дистрибутивных и [ко]стандартных элементов это видно непосредственно из определения. Общеизвестно, что элемент $x \in L$ нейтрален тогда и только тогда, когда

$$\forall y, z \in L \quad (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$$

(см., например, [2], теорема III.2.4). Наконец, модулярные элементы определяются условием

$$\forall y, z \in L \quad (x \vee y) \wedge (y \vee z) = \bigl(x \wedge (y \vee z)\bigr) \vee y,$$

нижнемодулярные — условием
$$\forall y, z \in L \quad x \vee \big((x \vee y) \wedge z\big) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$
а верхнемодулярные — условием, двойственным к последнему.

**Следствие 2.1.** Пусть $a$ — атом и нейтральный элемент решетки $L$, а $I$ — решеточное тождество вида $s(x_0, x_1, \ldots, x_n) = t(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, выполненное в двухэлементной решетке. Тогда для любого элемента $x \in L$ следующие условия эквивалентны:

(а) $x$ является $I$-элементом решетки $L$,
(б) $x \vee a$ является $I$-элементом решетки $L$,
(в) $x \vee a$ является $I$-элементом коидеала $[a)$,
(г) равенство $s(x, x_1, \ldots, x_n) = t(x, x_1, \ldots, x_n)$ выполняется для любых $x_1, \ldots, x_n \in [a)$.

*Доказательство.* Эквивалентность условий (а) и (в) непосредственно вытекает из леммы 2.1, поскольку если значения переменных $x_1, \ldots, x_n$ пробегают все множество $L$, то $x_1 \vee a, \ldots, x_n \vee a$ пробегают множество $[a)$. Применив эту же лемму для набора значений переменных $x \vee a, x_1, \ldots, x_n$, заключаем, что условие (б) также эквивалентно (в). Наконец, снова применив лемму 2.1 для набора значений переменных $x, x_1, \ldots, x_n$, где $x_1, \ldots, x_n \in [a)$, заключаем, что (в) эквивалентно (г). □

**Лемма 2.2.** *Элемент решетки стандартен тогда и только тогда, когда он дистрибутивен и модулярен.*

*Доказательство. Необходимость* очевидна.

*Достаточность.* Пусть $x$ — дистрибутивный и модулярный элемент решетки $L$, а $y, z \in L$. Тогда
$$(x \vee y) \wedge z = (x \vee y) \wedge \big((x \vee z) \wedge z\big) = \big((x \vee y) \wedge (x \vee z)\big) \wedge z = \big(x \vee (y \wedge z)\big) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$
(последнее равенство вытекает из того, что элемент $x$ модулярен и $y \wedge z \leq z$). Следовательно, $x$ стандартен в $L$. □

**Лемма 2.3.** *Элемент решетки нейтрален тогда и только тогда, когда он кодистрибутивен и стандартен.*

*Доказательство. Необходимость* очевидна.

*Достаточность.* Пусть $x$ — кодистрибутивный и стандартный элемент решетки $L$. Будучи стандартным, элемент $x$ модулярен. Применяя теперь утверждение, двойственное лемме 2.2, получаем, что $x$ костандартен. А тот факт, что всякий стандартный и костандартный элемент нейтрален, известен (см., например, [2], теорема III.2.5 (iii)). □

Следующее утверждение хорошо известно (см., например, [1]).

**Лемма 2.4.** *Многообразие $\mathcal{SL}$ является атомом и нейтральным элементом решетки* **SEM** *(а значит, и решетки* **Com**).

**Предложение 2.1.** *Всякое* 0*-приведенное в* **Com** *многообразие коммутативных полугрупп модулярно и нижнемодулярно в* **Com**.

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие полугрупп, а $\nu$ — отвечающая ему вполне инвариантная конгруэнция на свободной в многообразии $\mathcal{COM}$ полугруппе $C$ счетного ранга. Ясно, что конгруэнция $\nu$ имеет ровно один неодноэлементный класс. Решетка **Com** антиизоморфна решетке вполне инвариантных конгруэнций на $C$, которая в свою очередь вкладывается в решетку эквивалентностей на $C$. Остается учесть, что отношение эквивалентности на произвольном множестве, имеющее не более одного неодноэлементного класса, является модулярным элементом решетки эквивалентностей на этом множестве (см. [6], предложение 2.2) и верхнемодулярным элементом этой решетки (см. [7], следствие 3). □

Напомним, что многообразие полугрупп называется *нильмногообразием*, если оно состоит из нильполугрупп, или, что эквивалентно, удовлетворяет тождеству $x^n = 0$ для некоторого натурального $n$. Пусть $\mathcal{V}$ — коммутативное нильмногообразие. Обозначим через $\mathrm{ZR}(\mathcal{V})$ многообразие, заданное тождеством $xy = yx$ и всеми 0-приведенными тождествами, выполненными в $\mathcal{V}$. Ясно, что $\mathrm{ZR}(\mathcal{V})$ — наименьшее 0-приведенное в **Com** многообразие, содержащее $\mathcal{V}$. Через $\ell_x(u)$ обозначается *кратность буквы $x$ в слове $u$*, т. е. число вхождений $x$ в $u$. Напомним, что тождество $u = v$ называется *уравновешенным*, если $\ell_x(u) = \ell_x(v)$ для всякой буквы $x$. Очевидно, всякое коммутативное многообразие удовлетворяет любому уравновешенному тождеству. Для всякого натурального $n$ обозначим через $\mathcal{A}_n$ многообразие всех периодических абелевых групп, экспонента которых делит $n$.

**Лемма 2.5.** *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие коммутативных полугрупп, удовлетворяющее тождеству $x^n = 0$. Тогда $\mathcal{V} \vee \mathcal{A}_n = \mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \vee \mathcal{A}_n$.*

*Доказательство.* Включение $\mathcal{V} \vee \mathcal{A}_n \subseteq \mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \vee \mathcal{A}_n$ очевидно. Докажем обратное включение. Нужно проверить, что если тождество $u = v$ выполнено в $\mathcal{V} \vee \mathcal{A}_n$, то оно выполнено и в $\mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \vee \mathcal{A}_n$. Так как тождество $u = v$ выполнено в $\mathcal{A}_n$, то $\ell_x(u) \equiv \ell_x(v) \pmod n$ для любой буквы $x$. Если тождество $u = v$ уравновешено, то оно автоматически выполнено в многообразии $\mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \vee \mathcal{A}_n$ ввиду коммутативности последнего. Предположим теперь, что тождество $u = v$ не является уравновешенным, т. е. $\ell_x(u) \neq \ell_x(v)$ для некоторой буквы $x$. Тогда хотя бы одно из чисел $\ell_x(u)$ и $\ell_x(v)$ не меньше $n$. Не ограничивая общности, предположим, что $\ell_x(u) \geq n$. Тогда многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$, а значит, и тождеству $v = 0$, так как $u = v$ в $\mathcal{V}$. Следовательно, многообразие $\mathrm{ZR}(\mathcal{V})$ также удовлетворяет тождествам $u = 0 = v$, и потому тождество $u = v$ выполнено в $\mathrm{ZR}(\mathcal{V}) \vee \mathcal{A}_n$. □

**Предложение 2.2.** *Нильмногообразие коммутативных полугрупп нижнемодулярно в* **Com** *тогда и только тогда, когда оно является 0-приведенным в* **Com** *многообразием.*

*Доказательство.* В силу предложения 2.1 в доказательстве нуждается только необходимость. Пусть $\mathcal{V}$ — нижнемодулярное в **Com** коммутативное нильмногообразие. Будучи нильмногообразием, $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x^n = 0$ для некоторого $n$. Учитывая, что $\mathcal{A}_n \wedge \mathrm{ZR}(\mathcal{V}) = \mathcal{T}$ и $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{ZR}(\mathcal{V})$, и используя лемму 2.5, имеем

$$\mathcal{V} = \mathcal{T} \vee \mathcal{V} = \big(\mathcal{A}_n \wedge \mathrm{ZR}(\mathcal{V})\big) \vee \mathcal{V} = (\mathcal{A}_n \vee \mathcal{V}) \wedge \mathrm{ZR}(\mathcal{V}) = \big(\mathcal{A}_n \vee \mathrm{ZR}(\mathcal{V})\big) \wedge \mathrm{ZR}(\mathcal{V}) = \mathrm{ZR}(\mathcal{V}),$$

а многообразие $\mathrm{ZR}(\mathcal{V})$ является 0-приведенным в **Com** по определению. □

Многообразие полугрупп, заданное системой тождеств $\Sigma$, обозначается через $\operatorname{var}\Sigma$.

**Предложение 2.3.** *0-приведенное в* **Com** *многообразие коммутативных полугрупп верхнемодулярно в* **Com** *тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет тождеству* (3).

*Доказательство. Достаточность* вытекает из теоремы 1.2 работы [8], в силу которой произвольное многообразие коммутативных полугрупп, удовлетворяющее тождеству (3), является верхнемодулярным элементом решетки **SEM**, и тем более решетки **Com**.

*Необходимость.* Пусть $\mathcal{V}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие коммутативных полугрупп, верхнемодулярное в **Com**, а $\mathcal{W}$ — собственное подмногообразие многообразия $\mathcal{V}$. Поскольку $\mathcal{V}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие, содержащее $\mathcal{W}$, оно содержит также многообразие $\mathrm{ZR}(\mathcal{W})$. Будучи нильмногообразием, $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x^n = 0$ для некоторого $n$. Учитывая, что $\mathcal{A}_n \wedge \mathcal{V} = \mathcal{T}$ и $\mathcal{W} \subseteq \mathrm{ZR}(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{V}$, и используя лемму 2.5, имеем

$$\mathcal{W} \subseteq \mathrm{ZR}(\mathcal{W}) = \big(\mathcal{A}_n \vee \mathrm{ZR}(\mathcal{W})\big) \wedge \mathrm{ZR}(\mathcal{W}) = (\mathcal{A}_n \vee \mathcal{W}) \wedge \mathrm{ZR}(\mathcal{W}) \subseteq \\ \subseteq (\mathcal{A}_n \vee \mathcal{W}) \wedge \mathcal{V} = (\mathcal{A}_n \wedge \mathcal{V}) \vee \mathcal{W} = \mathcal{T} \vee \mathcal{W} = \mathcal{W}.$$

Итак, $\mathcal{W} = \mathrm{ZR}(\mathcal{W})$. Следовательно, $\mathcal{W}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие.

Мы показали, что не только само многообразие $\mathcal{V}$, но и всякое его подмногообразие является 0-приведенным в **Com**. Рассмотрим многообразие $\mathcal{X} = \mathrm{var}\{x^2y = xy^2,\ x^3 = xyzt = 0\}$. Оно не является 0-приведенным в **Com**. Следовательно, $\mathcal{X} \nsubseteq \mathcal{V}$, и поэтому найдется тождество $w = 0$, которое выполнено в $\mathcal{V}$, но не выполнено в $\mathcal{X}$. Слово $w$ с точностью до переобозначения букв совпадает с одним из слов $x$, $x^2$, $xy$, $x^2y$, $xyx$, $yx^2$, $xyz$ (в противном случае $w = 0$ в $\mathcal{X}$). Следовательно, тождество $w = 0$ влечет тождество (3). Мы показали, что многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству (3). □

Договоримся обозначать абсолютно свободную полугруппу счетного ранга буквой $F$. Эндоморфизмы полугруппы $F$ будем называть *подстановками*. Отношение равенства на $F$ обозначается через $\equiv$. Говорят, что слово $v$ *содержит образ слова* $u$, если в $v$ есть подслово вида $\zeta(u)$, где $\zeta$ — некоторая подстановка. Для произвольных слов $u, v$ положим $u \le v$, если найдется уравновешенное тождество $v = w$ такое, что слово $w$ содержит образ слова $u$. Определенное таким образом бинарное отношение $\le$ на полугруппе $F$ является отношением квазипорядка. Действительно, если $u \le v$ и $v \le w$, то найдутся (возможно, пустые) слова $a$, $b$, $c$, $d$ и подстановки $\zeta$, $\xi$ такие, что тождества $v = a\zeta(u)b$ и $w = c\xi(v)d$ уравновешены. Но тогда и тождество $w = c\xi\big(a\zeta(u)b\big)d$ уравновешено, причем его правая часть содержит подслово $\xi\big(\zeta(u)\big)$ (так как $c\xi\big(a\zeta(u)b\big)d \equiv c\xi(a)\xi\big(\zeta(u)\big)\xi(b)d$). Таким образом, $u \le w$, т.е. отношение $\le$ транзитивно. Рефлексивность же отношения $\le$ очевидна. Будем называть слова $u$ и $v$ *эквивалентными* и писать $u \sim v$, если $u \le v$ и $v \le u$. В частности, $u \sim v$, если тождество $u = v$ уравновешено. Далее, будем называть слова $u$ и $v$ *несравнимыми* и писать $u \parallel v$, если $u \nleq v$ и $v \nleq u$. Через $c(u)$ обозначим множество всех букв, входящих в запись слова $u$, через $\ell(u)$ — длину слова $u$, а через $n(u)$ — число различных букв, входящих в запись $u$.

Для удобства ссылок отметим некоторые простейшие свойства отношения $\le$.

**Лемма 2.6.** *Пусть $u$ и $v$ — произвольные слова.*

(1) *Если $u \le v$, то $\ell(u) \le \ell(v)$, причем если $\ell(u) = \ell(v)$, то $n(u) \ge n(v)$.*

(2) *Следующие условия эквивалентны*:
   а) *$u \le v$, $\ell(u) = \ell(v)$ и $n(u) = n(v)$,*
   б) *существует уравновешенное тождество вида $u = \zeta(v)$, где $\zeta$ — подстановка, переводящая различные буквы слова $u$ в различные буквы,*
   в) *$u \sim v$.*

*Доказательство.* (1) Неравенство $u \le v$ означает, что найдется уравновешенное тождество вида $v = a\zeta(u)b$. Тогда $\ell(u) \le \ell\big(\zeta(u)\big) \le \ell\big(a\zeta(u)b\big) = \ell(v)$. Если $\ell(u) = \ell(v)$, то $\ell\big(\zeta(u)\big) = \ell\big(a\zeta(u)b\big)$. Это означает, что слова $a$ и $b$ пусты. Следовательно, $\ell(u) = \ell(\zeta(u))$. Это возможно только в том случае, если $\zeta$ переводит каждую букву слова $u$ в букву. Отсюда следует $n(u) \ge n\big(\zeta(u)\big) = n(v)$.

(2) а) $\Rightarrow$ б). Если $u \le v$, $\ell(u) = \ell(v)$ и $n(u) = n(v)$, то в обозначениях п. (1) подстановка $\zeta$ не уменьшает число различных букв в слове $u$. Следовательно, она переводит различные буквы в различные.

б) $\Rightarrow$ в). Пусть $u = \zeta(v)$ — уравновешенное тождество и подстановка $\zeta$ переводит различные буквы в различные. Тогда существует подстановка $\xi$, ограничение которой на множество $c\big(\zeta(u)\big)$ обратно к ограничению подстановки $\zeta$ на множество $c(u)$. Тождество $v = \xi(u)$ является уравновешенным. Следовательно, в этом случае $u \le v$ и $v \le u$, т.е. $u \sim v$.

в) $\Rightarrow$ а). Если $u \sim v$, то $u \leq v$ и $v \leq u$ по определению отношения $\sim$. Согласно утверждению (1) данной леммы, отсюда вытекает, что $\ell(u) = \ell(v)$ и $n(u) = n(v)$. $\square$

Хорошо известно, что тождество $u = v$ следует из системы тождеств $\Sigma$ тогда и только тогда, когда существует последовательность слов $w_0, w_1, \dots, w_k$ такая, что $w_0 \equiv u$, $w_k \equiv v$ и для каждого $i = 1, \dots, k$ найдутся такие (возможно пустые) слова $a_i$ и $b_i$, тождество $s_i = t_i$ из системы $\Sigma$ и подстановка $\zeta_i$, что либо $w_{i-1} \equiv a_i\zeta(s_i)b_i$ и $w_i \equiv a_i\zeta(t_i)b_i$, либо $w_{i-1} \equiv a_i\zeta(t_i)b_i$ и $w_i \equiv a_i\zeta(s_i)b_i$. В этом случае последовательность $w_0, w_1, \dots, w_k$ называют *выводом* тождества $u = v$ из системы $\Sigma$ и записывают в виде

$$w_0 \longrightarrow w_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow w_k. \tag{5}$$

Число $k$ называется *длиной* вывода (5). В частности, тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность (5), в которой $w_0 \equiv u$, $w_k \equiv v$ и каждое из тождеств $w_{i-1} = w_i$ при $i = 1, \dots, k$ выполнено в одном из многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$.

**Лемма 2.7.** *Если неуравновешенное тождество $s = t$ следует из системы тождеств $\{u = v,\ xy = yx\}$, то либо $u \leq s$, либо $v \leq s$.*

*Доказательство.* Пусть последовательность (5) является выводом тождества $s = t$ из тождеств $u = v$ и $xy = yx$. Так как тождество $s = t$ не является уравновешенным, существует такое $i$, что тождество $w_{i-1} = w_i$ неуравновешено. Пусть $i$ — наименьший индекс с таким свойством. Тогда $s \equiv w_0 \sim w_1 \sim \cdots \sim w_{i-1}$. Далее, найдутся слова $a$ и $b$ и подстановка $\zeta$ такие, что либо $w_{i-1} \equiv a\zeta(u)b$ и $w_i \equiv a\zeta(v)b$, либо $w_{i-1} \equiv a\zeta(v)b$ и $w_i \equiv a\zeta(u)b$. В первом случае $u \leq w_{i-1} \sim s$, а во втором $v \leq w_{i-1} \sim s$. $\square$

**Лемма 2.8.** *Пусть слова $u$ и $v$ несравнимы и $c(u) = c(v)$. Если тождество $u = w$ следует из системы тождеств $\{u = v,\ xy = yx\}$, то либо $w \sim u$, либо $w \sim v$.*

*Доказательство.* Пусть (5) — вывод тождества $u = w$ из тождеств $u = v$ и $xy = yx$. Будем вести доказательство индукцией по длине этого вывода, т. е. по числу $k$.

*База индукции.* При $k = 0$ доказываемое утверждение очевидно.

*Шаг индукции.* Пусть $k \geq 1$. Тождество $u = w_{k-1}$ вытекает из системы тождеств $\{u = v,\ xy = yx\}$ и соответствующий вывод $w_0 \longrightarrow w_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow w_{k-1}$ имеет длину $k - 1$. По предположению индукции либо $w_{k-1} \sim u$, либо $w_{k-1} \sim v$. Не ограничивая общности, предположим, что $w_{k-1} \sim u$. Тогда либо тождество $w_{k-1} = w_k$ уравновешено, либо существуют (возможно пустые) слова $a$ и $b$ и подстановка $\zeta$ такие, что либо $w_{k-1} \equiv a\zeta(u)b$ и $w_k \equiv a\zeta(v)b$, либо $w_{k-1} \equiv a\zeta(v)b$ и $w_k \equiv a\zeta(u)b$. Если тождество $w_{k-1} = w_k$ уравновешено, то $w \equiv w_k \sim w_{k-1} \sim u$. Равенство $w_{k-1} \equiv a\zeta(v)b$ невозможно, так как $w_{k-1} \sim u \parallel v$. Остается случай, когда $w_{k-1} \equiv a\zeta(u)b$ и $w_k \equiv a\zeta(v)b$. В этом случае $u \sim w_{k-1} \equiv a\zeta(u)b$, т. е. $u \sim a\zeta(u)b$. В силу п. (2) леммы 2.6 отсюда вытекает $\ell(u) = \ell\bigl(a\zeta(u)b\bigr)$ и $n(u) = n\bigl(a\zeta(u)b\bigr)$, а это возможно только если слова $a$ и $b$ пусты, а подстановка $\zeta$ переводит различные буквы слова $u$ (значит, и слова $v$, так как $c(u) = c(v)$) в различные буквы. Тогда $w_k \equiv \zeta(v)$, и потому из п. (2) леммы 2.6 следует $w \equiv w_k \sim v$. $\square$

**Лемма 2.9.** *Пусть $\mathcal{V}$ — нильмногообразие коммутативных полугрупп, удовлетворяющее тождеству $u = v$.*

(а) *Если $c(u) \neq c(v)$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$.*

(б) *Если $u \equiv x_1x_2\cdots x_n$ и $\ell(v) \neq n$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x_1x_2\cdots x_n = 0$.*

(в) *Если $u \leq v$ и $u \nsim v$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$.*

Здесь п. (а) очевиден, п. (б) вытекает из леммы 1 работы [9], а п. (в) — из п. (2) леммы 2.6 и леммы 1.3 [10].

Для удобства ссылок в виде леммы сформулируем хорошо известный факт.

**Лемма 2.10.** *Тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{SL}$ тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$.*

Следующее утверждение является частью полугруппового фольклора и используется в литературе на протяжении длительного времени (см., например, [11]). Однако в явном виде оно, насколько нам известно, нигде ранее не доказывалось. Для полноты изложения приводим здесь его доказательство, воспроизводя, по сути, соответствующий фрагмент доказательства предложения 1 работы [12].

**Лемма 2.11.** *Если $\mathcal{V}$ — многообразие коммутативных полугрупп, отличное от многообразия $\mathcal{COM}$, то $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — многообразие, порождаемое моноидом, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие.*

*Доказательство.* Рассмотрим полугруппу $S$, порождающую многообразие $\mathcal{V}$. Пусть $E$ — множество идемпотентов $S$. Тогда $ES$ — идеал в $S$. Поскольку $\mathcal{V} \neq \mathcal{COM}$, многообразие $\mathcal{V}$ периодично. Следовательно, оно удовлетворяет тождеству $x^n = x^{2n}$ для некоторого $n$, поэтому $x^n \in ES$ для любого $x \in S$. Это означает, что фактор-полугруппа Риса $S/ES$ является нильполугруппой. Естественный гомоморфизм $S$ на $S/ES$ разделяет элементы из $S \setminus ES$. Пусть $S^*$ — декартово произведение полугрупп вида $eS$, где $e$ пробегает множество $E$. Ясно, что $S^*$ является моноидом и отображение $\alpha : x \longmapsto (\dots, ex, \dots)_{e \in E}$ есть гомоморфизм $S$ в $S^*$. При этом $\alpha$ разделяет элементы из $ES$. Действительно, если $\alpha(ex) = \alpha(fy)$ для некоторых $x, y \in S$, $e, f \in E$, то $eex = efy$, $fex = ffy$ и $efex = effy$, откуда

$$ex = eex = efy = effy = efex = feex = fex = ffy = fy.$$

Следовательно, $S$ вкладывается в прямое произведение моноида $S^*$ и нильполугруппы $S/ES$, и потому $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ порождается полугруппой $S^*$, а $\mathcal{N}$ — полугруппой $S/ES$. □

Отметим, что приведенное доказательство сохраняет свою силу не только для коммутативных многообразий, но и для *многообразий полугрупп с центральными идемпотентами*, т. е. многообразий, удовлетворяющих квазитождеству $e^2 = e \longrightarrow ex = xe$.

## 3. Доказательство основных результатов

*Доказательство теоремы* 1.1. а) $\Rightarrow$ в). Здесь нам понадобится

**Лемма 3.1.** *Пусть $u$, $v$, $w$ — такие слова, что $c(u) = c(v)$, $u \parallel v$, $u \not\approx w$. Тогда любое многообразие коммутативных полугрупп $\mathcal{V}$, дистрибутивное в* **Com** *и удовлетворяющее тождеству $u = w$, удовлетворяет также тождествам $u = v_1 = w$ для некоторого слова $v_1$ такого, что $v_1 \sim v$ и $c(v_1) = c(u)$.*

*Доказательство.* Положим $\mathcal{X} = \mathrm{var}\{u = v,\ xy = yx\}$ и $\mathcal{Y} = \mathrm{var}\{v = w,\ xy = yx\}$. Тождество $u = w$ вытекает из тождеств $u = v$ и $v = w$. Следовательно, оно выполнено в $\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}$, а значит, и в $\mathcal{V} \vee (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y})$. Поскольку $\mathcal{V}$ дистрибутивно в **Com**, то выполнено равенство

$$\mathcal{V} \vee (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}) = (\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}), \tag{6}$$

и, значит, $u = w$ в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y})$. Рассмотрим вывод (5) тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{X}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$. Поскольку $u \parallel v$, найдется такое $i$, что $w_i \nsim u$. Пусть $i$ — наименьший индекс с таким свойством. Для всякого $j = 1, \dots, k$ тождество $w_{j-1} = w_j$ выполняется хотя бы в одном из многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{X}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$. Заметим, что тождества $w_{j-1} = w_j$ при $j = 1, \dots, i$ не выполняются в $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$. Действительно, предположим, что $w_{j-1} = w_j$ в $\mathcal{Y}$ для некоторого $1 \le j \le i$. Тогда тождество $w_{j-1} = w_j$ вытекает из тождеств

$v = w$ и $xy = yx$. В силу леммы 2.7 отсюда следует $v \le w_{j-1} \sim u$ или $w \le w_{j-1} \sim u$, что противоречит условиям $u \parallel v$ и $u \not\ge w$. Таким образом, тождества $w_0 = w_1 = \cdots = w_i$ выполнены в $\mathcal{V} \vee \mathcal{X}$, а значит, и в $\mathcal{X}$. Но тогда тождество $u = w_i$ должно вытекать из тождеств $u = v$ и $xy = yx$. Согласно лемме 2.8 отсюда следует, что либо $w_i \sim u$, либо $w_i \sim v$. Но $w_i \nsim u$ в силу выбора $i$, и потому $w_i \sim v$. Поскольку $c(u) = c(v)$, из леммы 2.10 вытекает, что $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{X}$, откуда $c(u) = c(w_i)$. Поскольку тождество $u = w_i$ выполнено в $\mathcal{V}$, то слово $v_1 \equiv w_i$ является искомым. □

Приступим к непосредственному доказательству импликации а) $\Rightarrow$ в). Пусть $\mathcal{V}$ — дистрибутивное в **Com** многообразие, отличное от многообразия $\mathcal{COM}$. В силу леммы 2.11 $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где многообразие $\mathcal{M}$ порождается моноидом, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. Докажем, что $\mathcal{M}$ совпадает с одним из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$. Поскольку $\mathcal{V} \ne \mathcal{COM}$, многообразие $\mathcal{V}$ периодично, т. е. удовлетворяет тождеству $x^n = x^{n+m}$ для некоторых натуральных $n$ и $m$. Без ограничения общности можно считать, что $n \ge 3$. Следствием тождества $x^n = x^{n+m}$ является тождество $x^{n+2m}y^n = x^{n+m}y^{n+m}$. Легко видеть, что среди слов $x^{n+2m}y^n$, $x^{n+m}y^{n+m}$, $x^{2n+2m-1}y$ и $x^{2n+2m-2}y^2$ никакие два не удовлетворяют условию б) п. (2) леммы 2.6, так что эти слова попарно неэквивалентны. При этом все четыре слова зависят от двух букв и имеют длину $2n + 2m$, поэтому согласно лемме 2.6 они попарно несравнимы. Применяя лемму 3.1 при $u \equiv x^{n+2m}y^n$, $w \equiv x^{n+m}y^{n+m}$ и $v \equiv x^{2n+2m-1}y$, получаем, что $\mathcal{V}$ должно удовлетворять одному из тождеств $x^{n+m}y^{n+m} = x^{2n+2m-1}y$ и $x^{n+m}y^{n+m} = y^{2n+2m-1}x$, а значит, и обоим этим тождествам. Точно так же можно проверить, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам $x^{n+m}y^{n+m} = x^{2n+2m-2}y^2 = y^{2n+2m-2}x^2$. Таким образом, многообразие $\mathcal{V}$, а значит, и $\mathcal{M}$ удовлетворяют тождеству $y^{2n+2m-1}x = y^{2n+2m-2}x^2$. Подставляя в него единицу вместо $y$, получаем, что $\mathcal{M}$ удовлетворяет тождеству $x = x^2$, т. е. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{SL}$. Следовательно, либо $\mathcal{M} = \mathcal{T}$, либо $\mathcal{M} = \mathcal{SL}$.

Поскольку $\mathcal{V}$ дистрибутивно в **Com**, из следствия 2.1 и леммы 2.4 вытекает, что многообразие $\mathcal{N}$ также дистрибутивно в **Com**. Очевидно, всякий дистрибутивный элемент решетки нижнемодулярен. Поэтому из предложения 2.2 следует, что $\mathcal{N}$ является 0-приведенным в **Com**. Далее, существует такое натуральное $n \ge 2$, что многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x^n = 0$, а значит, и тождествам $x^{n+1}yz = x^n y^2 z = 0$. Если $n = 2$, получаем тождества (1). Пусть теперь $n \ge 3$. Слова $x^{n+1}yz$, $x^n y^2 z$ и $x^{n-1}y^2z^2$ имеют длину $n + 3$ и зависят от трех букв. Лемма 2.6 показывает, что эти слова попарно неэквивалентны и потому попарно несравнимы. Применяя лемму 3.1 при $u \equiv x^{n+1}yz$, $w \equiv x^n y^2 z$ и $v \equiv x^{n-1}y^2z^2$, получаем, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x^{n-1}y^2z^2 = 0$. Слова $x^{n-1}y^2z^2$ и $x^n yz$ также несравнимы: $x^{n-1}y^2z^2 \not\le x^n yz$, так как $\ell(x^n yz) < \ell(x^{n-1}y^2z^2)$, а $x^n yz \not\le x^{n-1}y^2z^2$, так как слово $x^{n-1}y^2z^2$ не содержит букв кратности $\ge n$, а любое слово вида $a\zeta(x^n yz)b$ содержит хотя бы одну такую букву. Применяя лемму 3.1 при $u \equiv x^{n-1}y^2z^2$, $w \equiv x^{n+1}yz$ и $v \equiv x^n yz$, получаем, что многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x^n yz = 0$. Слова $x^n yz$ и $x^{n-1}y^2z$ имеют длину $n+2$ и зависят от трех букв. В силу леммы 2.6 они неэквивалентны и потому несравнимы. Применив лемму 3.1 при $u \equiv x^n yz$, $v \equiv x^{n-1}y^2z$ и $w \equiv x^{n-1}y^2z^2$, получим, что многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x^{n-1}y^2z = 0$. Продолжая аналогичные рассуждения, заключаем, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам $x^{n-k+1}yz = x^{n-k}y^2z = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n-2$. При $k = n-2$ эти тождества совпадают с тождествами (1). Приравнивая в тождестве $x^3yz = 0$ переменные $x$ и $z$, получаем $x^4y = 0$. Чтобы получить то, что $\mathcal{N}$ либо удовлетворяет каждому из тождеств (2), либо не удовлетворяет ни одному из них, остается еще раз применить лемму 3.1: если $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x^3y = 0$, полагаем $u \equiv x^3y$, $v \equiv x^2y^2$ и $w \equiv x^4y$; если же $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $x^2y^2 = 0$, то нужно положить $u \equiv x^2y^2$, $v \equiv x^3y$ и $w \equiv x^4y$.

в) $\Rightarrow$ б). Слово, в котором кратность всех букв не превосходит единицы, называется *линейным.* Здесь нам понадобится

**Лемма 3.2.** *Пусть многообразие коммутативных полугрупп $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам* (1) *и либо удовлетворяет обоим тождествам* (2), *либо не удовлетворяет ни одному из них. Если в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $v = 0$ и не выполнено тождество $u = 0$, причем $c(u) = c(v)$, то $u \leq v$.*

*Доказательство.* Дальнейшие рассуждения основаны на следующих трех очевидных наблюдениях.

(а) В каждом классе эквивалентных слов имеется единственное слово вида $x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \cdots x_m^{\ell_m}$, где $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots \geq \ell_m$.

(б) Для каждого нелинейного слова $w$ найдется такое слово $s$, что $c(s) = c(w)$, $\ell(s) = \ell(w) - 1$ и $s \leq w$: слово $s$ можно получить, например, удалив в $w$ одно (любое) вхождение любой кратной буквы. Следовательно, для любого $k = n(w), n(w)+1, \ldots, \ell(w)$ найдется такое слово $s$, что $c(s) = c(w)$, $\ell(s) = k$ и $s \leq w$.

(в) Если $w_1 \leq w_2$, то $w_2 = 0$ вытекает из тождеств $w_1 = 0$ и $xy = yx$.

Из (а) следует, что каждое слово длины 5 от двух букв эквивалентно одному из слов $x^4y$ и $x^3y^2$, а каждое слово длины $m+4$ от $m+2$ букв (для произвольного натурального $m$) — одному из слов $x^3yz_1 \cdots z_m$ и $x^2y^2z_1 \cdots z_m$. По условию леммы многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам $x^3yz = x^2y^2z = 0$, из которых вытекают тождества $x^4y = x^3y^2 = 0$ и $x^3yz_1 \cdots z_m = x^2y^2z_1 \cdots z_m = 0$, а следовательно, согласно (б) и (в) и все тождества вида $w = 0$, где $w$ — слово длины $\geq 5$ от одной или двух букв либо слово длины $\geq m+4$ от $m+2$ букв. Согласно (а) каждое слово длины $\leq 4$ от одной или двух букв либо длины $\leq m+3$ от $m+2$ букв эквивалентно одному из слов

$$x, x^2, x^3, x^4, xy, x^2y, x^3y, x^2y^2, xyz_1 \cdots z_m, x^2yz_1 \cdots z_m. \tag{7}$$

В частности, одному из этих слов эквивалентно слово $u$. Отметим следующий факт:

(г) если $w$ — любое из слов (7), кроме $x^3y$ и $x^2y^2$, то $w$ эквивалентно любому слову $w'$ такому, что $\ell(w') = \ell(w)$ и $c(w') = c(w)$.

Пусть $w_1$ — одно из слов (7), а $w_2$ — любое слово такое, что $\ell(w_2) > \ell(w_1)$ и $c(w_2) = c(w_1)$. Покажем, что $w_1 \leq w_2$. Если $w_1$ не совпадает ни с одним из слов $x^3y$ и $x^2y^2$, то это следует из (б) и (г). Пусть $w_1$ — одно из слов $x^3y$ и $x^2y^2$. Согласно (б) можно считать, что $\ell(w_2) = \ell(w_1) + 1 = 5$. Тогда согласно (а) $w_2$ эквивалентно одному из слов $x^4y$ и $x^3y^2$. Но $x^3y^2$ содержит подслова $x^3y$ и $x^2y^2$, а $x^4y$ содержит подслово $x^4 \equiv \zeta(x^3y) \equiv \zeta(x^2y^2)$, где $\zeta(x) \equiv \zeta(y) \equiv x$, так что в любом случае $w_1 \leq w_2$. Таким образом, остается доказать, что $\ell(u) < \ell(v)$. Если $\ell(v) < \ell(u)$, то $v \leq u$ и тождество $u = 0$ вытекает из $v = 0$ в силу (в). Следовательно, $\ell(u) \leq \ell(v)$. Предположим, что $\ell(u) = \ell(v)$. Если $u$ не эквивалентно ни одному из слов $x^3y$ и $x^2y^2$, то из равенств $\ell(u) = \ell(v)$ и $c(u) = c(v)$ вытекает $u \sim v$. Но тогда тождество $u = 0$ выполнено в $\mathcal{V}$. Наконец, если $u$ эквивалентно одному из слов $x^3y$ и $x^2y^2$, то из равенств $\ell(u) = \ell(v)$ и $c(u) = c(v)$ вытекает, что $v$ также эквивалентно одному из этих двух слов. Тогда из условия леммы следует $u = 0$ в $\mathcal{V}$. Итак, равенство $\ell(v) = \ell(u)$ невозможно. Следовательно, $\ell(u) < \ell(v)$. $\square$

Приступим к непосредственному доказательству импликации в) $\Rightarrow$ б). Пусть многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию в) теоремы 1.1 и $\mathcal{V} \neq \mathcal{COM}$. Из следствия 2.1, леммы 2.4 и предложения 2.1 вытекает, что многообразие $\mathcal{V}$ модулярно в **Com**. В силу леммы 2.2 остается доказать, что $\mathcal{V}$ дистрибутивно в **Com**, т. е. что для любых коммутативных многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ выполнено равенство (6). В силу следствия 2.1 и леммы 2.4 можно считать, что $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \supseteq \mathcal{SL}$ и (в обозначениях п. в) теоремы 1.1) $\mathcal{V} = \mathcal{N}$. Случай, когда $\mathcal{X} = \mathcal{COM}$ или $\mathcal{Y} = \mathcal{COM}$, очевиден, поэтому далее мы будем считать $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \neq \mathcal{COM}$.

Поскольку включение $\mathcal{V} \vee (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}) \subseteq (\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y})$ очевидно, требуется доказать, что $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{V} \vee (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y})$, т. е. что произвольное тождество $u = v$, выполненное в $\mathcal{V} \vee (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y})$, выполнено и в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y})$. Поскольку многообразие $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y})$ коммутативно, можно считать, что тождество $u = v$ не является уравновешенным. Так как многообразие $\mathcal{V}$ является 0-приведенным в **Com** и удовлетворяет тождеству $u = v$, оно должно удовлетворять тождествам $u = 0$ и $v = 0$. Кроме того, тождество $u = v$ выполняется в $\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}$. Рассмотрим вывод (5) этого тождества из тождеств многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Для всякого $i = 1, \ldots, k$ тождество $w_{i-1} = w_i$ выполнено в одном из многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Поскольку каждое из этих многообразий содержит $\mathcal{SL}$, из леммы 2.10 вытекает $c(w_0) = c(w_1) = \cdots = c(w_k)$. Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам $w_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, k-1$, то (5) является выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{X}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$, и потому все доказано. Пусть теперь тождество $w_i = 0$ не выполнено в $\mathcal{V}$ для некоторого $i$, причем $i$ — минимальный индекс с таким свойством. Тождество $u = w_{i-1}$ выполнено в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y})$, так как последовательность слов $w_0 \longrightarrow w_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow w_{i-1}$ является выводом этого тождества из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{X}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$. Таким образом, остается проверить, что многообразие $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y})$ удовлетворяет тождеству $w_{i-1} = v$. Отметим, что последовательность слов $w_{i-1} \longrightarrow w_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow w_k$ является выводом тождества $w_{i-1} = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Это позволяет далее считать, что $i = 1$, т. е. что $\mathcal{V}$ не удовлетворяет тождеству $w_1 = 0$. Аналогичными рассуждениями можно свести доказательство к случаю, когда тождество $w_{k-1} = 0$ не выполнено в $\mathcal{V}$.

Поскольку $\mathcal{V}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \neq \mathcal{COM}$, то и $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \neq \mathcal{COM}$. В силу леммы 2.11 $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — многообразие, порождаемое моноидом, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. Остается убедиться в том, что тождество $u = v$ выполняется в каждом из многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Поскольку тождество $u = 0$ выполнено в $\mathcal{V}$, а тождество $w_1 = 0$ — нет, из леммы 3.2 вытекает, что $w_1 \leq u$, т. е. найдется уравновешенное тождество вида $u = a\zeta(w_1)b$ для некоторых (возможно пустых) слов $a$ и $b$ и подстановки $\zeta$. Так как $u \equiv w_0$, то тождество $u = w_1$, а значит, и тождество $a\zeta(w_1)b = w_1$ выполнено в одном из многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Не ограничивая общности, предположим, что оно выполнено в $\mathcal{X}$. Тогда тождество $a\zeta(w_1)b = a\zeta(a\zeta(w_1)b)b$ также выполнено в $\mathcal{X}$. Многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $a\zeta(w_1)b = 0$, а потому и тождествам $a\zeta(a\zeta(w_1)b)b = 0$ и $a\zeta(w_1)b = a\zeta(a\zeta(w_1)b)b$. Итак, тождество $a\zeta(w_1)b = a\zeta(a\zeta(w_1)b)b$ выполнено в $\mathcal{V} \vee \mathcal{X}$. Следовательно, оно выполнено в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y})$, а значит, и в $\mathcal{N}$. При этом $w_1 \not\approx a\zeta(w_1)b$ (поскольку тождество $a\zeta(w_1)b = 0$ выполнено в $\mathcal{V}$, а тождество $w_1 = 0$ — нет), откуда $a\zeta(w_1)b \not\approx a\zeta(a\zeta(w_1)b)b$. В силу леммы 2.9 (в) $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$. Аналогичным образом можно установить, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $v = 0$, а значит, и тождеству $u = v$.

Остается показать, что тождество $u = v$ выполнено в $\mathcal{M}$. Многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x^3yz = 0$ (в силу условия в) теоремы 1.1), а значит, и тождеству $x^5 = 0$. Пусть буква $x$ не входит в запись слов $w_0, w_1, \ldots, w_k$. Тождество $ux^5 = vx^5$ выполнено в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{X}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y})$: его выводом из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{X}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ будет последовательность слов $w_0x^5 \longrightarrow w_1x^5 \longrightarrow \cdots \longrightarrow w_kx^5$. Следовательно, тождество $ux^5 = vx^5$ выполняется в $\mathcal{M}$. Подставляя в это тождество единицу вместо $x$, получаем $u = v$. Мы доказали, что многообразие $\mathcal{V}$ дистрибутивно в **Com**. Импликация в) $\Rightarrow$ б) доказана.

Для завершения доказательства теоремы 1.1 осталось заметить, что импликация б) $\Rightarrow$ а) очевидна. $\square$

*Доказательство теоремы* 1.2. Импликация а) $\Rightarrow$ б) очевидна.

б) $\Rightarrow$ в). Пусть $\mathcal{V}$ — дистрибутивное и кодистрибутивное в **Com** многообразие, отличное от $\mathcal{COM}$. В силу теоремы 1.1 $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие. Из следствия 2.1 и леммы 2.4 вытекает, что многообразие $\mathcal{N}$ кодистрибутивно в **Com**. Следовательно, оно верхнемодулярно в **Com**. В силу предложения 2.3 в $\mathcal{N}$ выполнено тождество (3).

в) $\Rightarrow$ а). Положим $\mathcal{Z} = \mathrm{var}\{x^2y = 0,\ xy = yx\}$. По следствию 2.1 и лемме 2.4 достаточно убедиться в том, что если $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Z}$, то многообразие $\mathcal{N}$ нейтрально в **Com**. Легко понять, что всякое собственное подмногообразие многообразия $\mathcal{Z}$ задается внутри $\mathcal{Z}$ либо тождеством

$$x^2 = 0, \tag{8}$$

либо тождеством

$$x_1x_2\cdots x_n = 0 \tag{9}$$

для некоторого $n$, либо совокупностью этих двух тождеств. Следовательно, многообразие $\mathcal{N}$ является 0-приведенным в **Com**. В силу теоремы 1.1 многообразие $\mathcal{N}$ стандартно в **Com**. Согласно лемме 2.3 остается показать, что оно кодистрибутивно в **Com**. Иными словами, надо проверить, что если $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — произвольные коммутативные многообразия, то $\mathcal{N} \wedge (\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}) = (\mathcal{N} \wedge \mathcal{X}) \vee (\mathcal{N} \wedge \mathcal{Y})$. Положим $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{N} \wedge (\mathcal{X} \vee \mathcal{Y})$ и $\mathcal{Z}_2 = (\mathcal{N} \wedge \mathcal{X}) \vee (\mathcal{N} \wedge \mathcal{Y})$. Ясно, что $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2 \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{Z}$. Поэтому достаточно установить, что каждое из тождеств (8) и (9) либо выполнено в каждом из многообразий $\mathcal{Z}_1$ и $\mathcal{Z}_2$, либо не выполнено ни в одном из них. Поскольку $\mathcal{Z}_2 \subseteq \mathcal{Z}_1$, в действительности достаточно проверить, что каждое из тождеств (8) и (9) выполнено в $\mathcal{Z}_1$, если оно выполнено в $\mathcal{Z}_2$.

Предположим, что в $\mathcal{Z}_2$ выполнено тождество (8). В частности, оно выполнено в многообразии $\mathcal{N} \wedge \mathcal{X}$. Следовательно, существует вывод этого тождества из тождеств многообразий $\mathcal{N}$ и $\mathcal{X}$, и потому одно из этих многообразий удовлетворяет нетривиальному тождеству вида $x^2 = w$. Если это тождество выполнено в $\mathcal{N}$, то в силу леммы 2.9 $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (8). Предположим теперь, что $x^2 = w$ в $\mathcal{X}$. Если $c(w) = \{x\}$, то в $\mathcal{X}$ выполнено тождество

$$x^2 = x^m \tag{10}$$

для некоторого $m \neq 2$. Если $c(w) \neq \{x\}$ и $\ell(w) \neq 2$, то, приравнивая в $x^2 = w$ все буквы из $c(w) \setminus \{x\}$ к $x$, мы вновь получаем, что в $\mathcal{X}$ выполнено тождество (10) для некоторого $m \neq 2$. Наконец, если $c(w) \neq \{x\}$ и $\ell(w) = 2$, т. е. $w$ совпадает с одним из слов $xy$ и $yx$, то мы получим тот же результат, подставив $x^2$ вместо $y$ в $x^2 = w$.

Итак, либо $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (8), либо $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству (10) для некоторого $m \neq 2$. Аналогично проверяется, что либо $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (8), либо $\mathcal{Y}$ удовлетворяет тождеству (10) для некоторого $m \neq 2$. Если $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (8), то это тождество выполнено в $\mathcal{Z}_1$. Предположим теперь, что $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству $x^2 = x^{m_1}$, а $\mathcal{Y}$ — тождеству $x^2 = x^{m_2}$ для некоторых $m_1, m_2 \neq 2$. Тогда найдется такое $m \neq 2$, что (10) выполнено в $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$. Следовательно, оно выполнено и в $\mathcal{Z}_1$. Учитывая лемму 2.9 (в), мы получаем, что и в этом случае $\mathcal{Z}_1$ удовлетворяет тождеству (8).

Предположим теперь, что в $\mathcal{Z}_2$ выполнено тождество (9). В частности, оно выполнено в многообразии $\mathcal{N} \wedge \mathcal{X}$. Пусть (5) — кратчайший вывод этого тождества из тождеств многообразий $\mathcal{N}$ и $\mathcal{X}$. Тогда одно из этих многообразий удовлетворяет тождеству $x_1x_2\cdots x_n = w_1$. Если $c(w_1) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и $\ell(w_1) = n$, то тождество $x_1x_2\cdots x_n = w_1$ вытекает из тождества коммутативности. Но тогда оно выполнено и в $\mathcal{N}$, и в $\mathcal{X}$, и вывод (5) можно сократить вопреки его выбору. Поэтому далее можно считать, что либо $c(w_1) \neq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, либо $\ell(w_1) \neq n$. Если тождество $u = w_1$ выполнено в многообразии $\mathcal{N}$, то в силу леммы 2.9 $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству (9). Предположим теперь, что тождество $x_1x_2\cdots x_n = w_1$ выполнено в $\mathcal{X}$. В силу леммы 2.9 всякое нильподмногообразие многообразия $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству (9). Из коммутативности многообразия $\mathcal{X}$ и теоремы 2 работы [13] вытекает, что в этом случае $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству

$$x_1x_2\cdots x_n = (x_1x_2\cdots x_n)^{r+1} \tag{11}$$

для некоторого натурального $r$.

Итак, либо $\mathcal{N}$ удовлетворяет (9), либо $\mathcal{X}$ удовлетворяет (11) для некоторого $r$. Аналогично проверяется, что либо $\mathcal{N}$ удовлетворяет (9), либо $\mathcal{Y}$ удовлетворяет (11) для некоторого $r$. Если $\mathcal{N}$ удовлетворяет (9), то это тождество выполнено в $\mathcal{Z}_1$. Предположим теперь, что $\mathcal{X}$ удовлетворяет тождеству $x_1x_2\cdots x_n = (x_1x_2\cdots x_n)^{r_1+1}$, а $\mathcal{Y}$ — тождеству $x_1x_2\cdots x_n = (x_1x_2\cdots x_n)^{r_2+1}$ для некоторых $r_1$, $r_2$. Тогда в $\mathcal{X}\vee\mathcal{Y}$ выполнено (11) при $r = r_1r_2+1$. Следовательно, это тождество выполнено и в $\mathcal{Z}_1$. Учитывая лемму 2.9 (б), мы получаем, что и в этом случае $\mathcal{Z}_1$ удовлетворяет (9). Теорема 1.2 доказана. $\square$

Из теоремы 1.2 и предложения 2.3 вытекает

**Следствие 3.1.** Если 0-приведеннное в **Com** многообразие коммутативных полугрупп верхнемодулярно в **Com**, то оно нейтрально в **Com**.

## Литература


[1] Шеврин Л.Н., Верников Б.М., Волков М.В. *Решетки многообразий полугрупп*, Изв. вузов. Матем., № 3, 3–36 (2009).

[2] Гретцер Г. *Общая теория решеток* (Мир, М., 1982).

[3] Burris S., Nelson E. *Embedding the dual of* $\Pi_m$ *in the lattice of equational classes of commutative semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. **30** (1), 37–39 (1971).

[4] Perkins P. *Bases for equational theories of semigroups*, J. Algebra **11** (2), 298–314 (1969).

[5] Kisielewicz A. *Varieties of commutative semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. **342** (1), 275–306 (1994).

[6] Ježek J. *The lattice of equational theories.* Part I: *modular elements*, Czechosl. Math. J. **31** (1), 127–152 (1981).

[7] Верников Б.М., Волков М.В. *Решетки нильпотентных многообразий полугрупп*, Алгебраич. системы и их многообразия (Урал. гос. ун-т, Свердловск, 1988), с. 53–65 (1988).

[8] Vernikov B.M. *Upper-modular elements of the lattice of semigroup varieties*, Algebra Universalis **59** (3–4), 405–428 (2008).

[9] Сапир М.В., Суханов Е.В. *О многообразиях периодических полугрупп*, Изв. вузов. Матем., № 4, 48–55 (1981).

[10] Vernikov B.M., Volkov M.V. *Commuting fully invariant congruences on free semigroups*, Contrib. General Algebra **12**, 391–417 (2000).

[11] Korjakov I.O. *A scetch of the lattice of commutative nilpotent semigroup varieties*, Semigroup Forum **24** (4), 285–317 (1982).

[12] Волков М.В. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий*, Изв. вузов. Матем., № 6, 51–60 (1989).

[13] Тищенко А.В. *Замечание о полугрупповых многообразиях конечного индекса*, Изв. вузов. Матем., № 7, 79–83 (1990).



*В.Ю. Шапрынский*

*студент, кафедра алгебры и дискретной математики,*
*Уральский государственный университет,*
*пр. Ленина, д. 51, г. Екатеринбург, 620000,*

`e-mail:` vshapr@yandex.ru

*V.Yu. Shaprynskii*

*Student, Chair of Algebra and Discrete Mathematics,*
*Ural State University,*
*51 Lenin Ave., Ekaterinburg, 620000 Russia,*

`e-mail:` vshapr@yandex.ru