ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 2 (501)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.512

Л.Г. КОВАЛЕНКО

СКОРОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ СРЕДНИМИ ЧЕЗАРО ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА ДВОЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Пусть $Z^2_+ = \{i = (i_1, i_2)\}$ — множество точек из R^2 с целыми неотрицательными координатами, частично упорядоченное соглашением, что неравенство $i \le n$ для $i, n \in Z^2_+$ означает $i_1 \le n_1$ и $i_2 \le n_2$. Всюду в дальнейшем считаем $i, k, n \in Z^2_+$. Условимся обозначать $n^* = \max(n_1, n_2)$, $n_* = \min(n_1, n_2)$; для $x = (x_1, x_2) \in R^2_+$ будем писать $\|x\| = x_1 \cdot x_2$, и если $f(t)$ — функция одной переменной t, то будем полагать $\|f(x)\| = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

Пусть $\phi = \{\phi_i(x),\ x \in X = (0,1)^2\}$ — двойная ортонормированная система (ОНС). Рассмотрим двойной ортогональный ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i\phi_i(x) = \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty} a_{i_1 i_2}\phi_{i_1 i_2}(x), \quad x \in X, \quad \{a_i : i \in Z^2_+\} \in l^2. \tag{1}$$

Обозначим через $S_n(x)$ прямоугольные суммы ряда (1), через $f(x)$ — его L^2-сумму и через $\sigma_n^{-\alpha}(x)$ — средние Чезаро отрицательного порядка ряда (1) ($\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = 1, 2$).

Известно достаточное условие сходимости почти всюду (п. в.) на X последовательности $\{\sigma_n^{-\alpha}(x)\}$ по любой ОНС ϕ (см. теорему 1 [1], с. 312).

В данной работе исследуется вопрос о точном на классе всех ОНС порядке убывания к нулю величины $\Delta_n^{-\alpha}(x) = |f(x) - \sigma_n^{-\alpha}(x)|$.

Пусть $\{\lambda(n) = \lambda(n_1, n_2) > 0\}$ — неубывающая по каждой переменной последовательность, стремящаяся к бесконечности при $n^* \to \infty$ со следами на координатных осях $\lambda_1(n_1) = \lambda(n_1, 0)$ и $\lambda_2(n_2) = \lambda(0, n_2)$, нормированная условием $\lambda(0,0) = \lambda_1(0) = \lambda_2(0) = 1$.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема. *Пусть последовательность $\{\lambda(n) = \lambda(n_1, n_2) > 0\}$ такова, что по каждой переменной*

$$\lambda(n)/\|(n+1)^{\alpha}\| \uparrow 0 \quad \text{и} \quad \lambda(n)/\|(n+1)^{1+\alpha}\| \downarrow 0. \tag{2}$$

Тогда для любого $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = 1, 2$, и любой ОНС ϕ при условии

$$\sum_{i \ge 0} a_i^2 \lambda^2(i) < \infty, \tag{3}$$

п.в. на X справедлива окончательная оценка

$$\Delta_n^{-\alpha}(x) = o_x\Big\{\frac{(n_1+1)^{\alpha_1}}{\lambda_1(n_1)} + \frac{(n_2+1)^{\alpha_2}}{\lambda_2(n_2)}\Big\} \equiv o_x(\gamma_n^{-1}), \quad n_* \to \infty. \tag{4}$$

Соотношение $|g_n(x)| = o_x(\gamma_n^{-1})$ п.в. при $n_* \to \infty$, где $g_n(x) \in L^2(X)$ и γ_n — двойная последовательность положительных чисел, означает, что $\gamma_n|g_n(x)| \to 0$ п. в. при $n_* \to \infty$ и существует функция $F(x) \in L^2(X)$ такая, что $\gamma_n|g_n(x)| \le F(x)$ для всех $x \in X$, $n \in Z^2_+$.

Под окончательностью оценки (4) подразумевается тот факт, что для любой последовательности $0 < \omega(n) = \omega(n_1, n_2) \to \infty$ при $n^* \to \infty$ найдется ортогональный ряд (1), удовлетворяющий условию (3), для которого всюду на X $\lim_{n_* \to \infty} \sup \omega(n)\gamma_n \Delta_n^{-\alpha}(x) = +\infty$.

Доказательство теоремы следует из следующей леммы.

Лемма. *Пусть* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = 1, 2$, $\{\lambda(n) = \lambda(n_1, n_2)\}$ *— положительная последовательность, удовлетворяющая первому условию* (2) *по каждой переменной,* $\{m_k = (m_{k_1}, m_{k_2}) > 0\}$ *— некоторая строго возрастающая последовательность из* Z_+^2, *которая обладает следующими свойствами*:

$$1 < q_j \le m_{k_j+1}/m_{k_j} \le r_j, \quad j = 1, 2; \tag{5}$$

и для некоторых $\gamma_j \in (0, 1)$

$$\lambda_j(m_{k_j})/m_{k_j}^{1+\gamma_j} \downarrow, \quad j = 1, 2. \tag{6}$$

Если выполнено условие (3), *то для* $m_k < n \le m_{k+1}$ *и* $x \in X$ *справедливо равенство*

$$\sigma_n^{-\alpha}(x) = S_{m_k}(x) + \left\| \frac{\alpha}{n} \right\| S_{m_k}^{(1,2)}(x) + \frac{\alpha_1}{n_1} S_{m_k}^{(1)}(x) + \frac{\alpha_2}{n_2} S_{m_k}^{(2)}(x) + r_n(x), \tag{7}$$

где $S_{m_k}^{(j)}(x) = \sum_{i \le m_k} i_j a_i \phi_i(x)$, $j = 1, 2$, $S_{m_k}^{(1,2)}(x) = \sum_{i \le m_k} \|i\| a_i \phi_i(x)$, *п. в. на* X *и*

$$r_n(x) = o_x\{(n_1+1)^{\alpha_1}/\lambda_1(n_1) + (n_2+1)^{\alpha_2}/\lambda_2(n_2)\}, \quad n_* \to \infty.$$

По определению для $m_k < n \le m_{k+1}$ справедливо представление (7) с

$$\begin{gathered} r_n(x) = \sum_{i \le m_k} \left(\left\| \frac{A_{n-i}^{-\alpha}}{A_n^{-\alpha}} \right\| - 1 - \left\| \frac{\alpha i}{n} \right\| - \frac{\alpha_1 i_1}{n_1} - \frac{\alpha_2 i_2}{n_2} \right) a_i \phi_i(x) + \\ + \sum_{j=1}^{3} \sum_{i \in P_j} \left\| \frac{A_{n-i}^{-\alpha}}{A_n^{-\alpha}} \right\| a_i \phi_i(x) \equiv \rho_n(x) + \sum_{j=1}^{3} r_n^{(j)}(x), \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \{i = (i_1, i_2) \in Z_+^2 : m_{k_1} + 1 \le i_1 \le n_1,\ 0 \le i_2 \le m_{k_2}\}, \\ P_2 &= \{i = (i_1, i_2) \in Z_+^2 : 0 \le i_1 \le m_{k_1},\ m_{k_2} + 1 \le i_2 \le n_2\}, \\ P_3 &= \{i = (i_1, i_2) \in Z_+^2 : m_{k_1} + 1 \le i_1 \le n_1,\ m_{k_2} + 1 \le i_2 \le n_2\}. \end{aligned}$$

По аналогии с доказательством леммы 2 ([2], с. 7) доказывается

$$\rho_n(x) = o_x\{(n_1+1)^{\alpha_1}/\lambda_1(n_1) + (n_2+1)^{\alpha_2}/\lambda_2(n_2)\} \text{ при } n_* \to \infty$$

и

$$r_n^{(3)}(x) = o_x\left\{ \frac{\|(m_k+1)^{\alpha}\|}{\lambda(m_k)} \right\} = o_x\left\{ \frac{(n_1+1)^{\alpha_1}}{\lambda_1(n_1)} + \frac{(n_2+1)^{\alpha 2}}{\lambda_2(n_2)} \right\}. \tag{8}$$

Оценим теперь

$$\begin{aligned} r_n^{(2)}(x) = \|A_n^{-\alpha}\|^{-1} \sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{n_2} \|A_{n-i}^{-\alpha}\| a_i \phi_i(x) + \\ + \|A_n^{-\alpha}\|^{-1} \sum_{i_1=m_{k_1-1}+1}^{m_{k_1}} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{n_2} \|A_{n-i}^{-\alpha}\| a_i \phi_i(x) \equiv b_n^{(1)}(x) + b_n^{(2)}(x). \end{aligned} \tag{9}$$

Для $b_n^{(2)}(x)$ при $n_* \to \infty$ справедлива оценка вида (8):

$$b_n^{(2)}(x) = o_x\left\{ \frac{\|(m_{k-1}+1)^{\alpha}\|}{\lambda(m_{k-1})} \right\} = o_x\left\{ \frac{(n_1+1)^{\alpha_1}}{\lambda_1(n_1)} + \frac{(n_2+1)^{\alpha_2}}{\lambda_2(n_2)} \right\}. \tag{10}$$

Полагая $\delta = -1/2(\alpha+1)$, заметим, что

$$b_n^{(1)}(x) = \|A_n^{-\alpha}\|^{-1} \sum_{i_1 \le m_{k_1-1}} A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{n_2} a_i\phi_i(x) \sum_{i_2 \le p \le n_2} A_{n_2-p}^{-\alpha_2-\delta-1} A_{p-i_2}^{\delta} =$$

$$= \frac{1}{A_{n_2}^{-\alpha_2}} \sum_{p=m_{k_2}+1}^{n_2} A_{n_2-p}^{-\alpha_2-\delta-1} \left(\frac{1}{A_{n_1}^{-\alpha_1}} \sum_{i_1 \le m_{k_1-1}} A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{p} A_{p-i_2}^{\delta} a_i\phi_i(x) \right) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{A_{n_2}^{-\alpha_2}} \sum_{p=m_{k_2}+1}^{n_2} A_{n_2-p}^{-\alpha_2-\delta-1} S_p(x),$$

где для каждого натурального $m_{k_2} < p < n_2$

$$S_p(x) = \frac{1}{A_{n_1}^{-\alpha_1}} \sum_{i_1 \le m_{k_1-1}} A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{p} A_{p-i_2}^{\delta} a_i\phi_i(x).$$

Тогда согласно неравенству Коши–Буняковского для всех $n_1 > m_{k_1}$ и $m_{k_2} < n_2 \le m_{k_2+1}$

$$[b_n^{(1)}(x)]^2 \le C(\alpha_2) m_{k_2}^{2\alpha_2} \sum_{p=m_{k_2}+1}^{n_2} (n_2-p+1)^{-\alpha_2-1} \sum_{p=m_{k_2}+1}^{n_2} S_p^2(x) \tag{11}$$

(через $C(\alpha)$ здесь и далее будем обозначать некоторые постоянные, зависящие от указанного параметра и, вообще говоря, от r_j и q_j, $j=1,2$).

Применяя теперь к $S_p(x)$ последовательно преобразование Абеля и неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$S_p(x) = \frac{1}{A_{n_1}^{-\alpha_1}} \Bigg\{ \sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}-1} \Delta A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1} \sum_{j \le i_1} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{p} A_{p-i_2}^{\delta} a_{ji_2}\phi_{ji_2}(x) +$$

$$+ A_{n_1-m_{k_1-1}}^{-\alpha_1} \sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}} \sum_{i_2=m_{k_2+1}}^{p} A_{p-i_2}^{\delta} a_i\phi_i(x) \Bigg\},$$

$$[S_p(x)]^2 \le C(\alpha_1) \Bigg\{ \frac{1}{m_{k_1-1}} \sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}-1} \left[\sum_{j=0}^{i_1} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{p} A_{p-i_2}^{\delta} a_{ji_2}\phi_{ji_2}(x) \right]^2 +$$

$$+ \left[\sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}} \sum_{i_2=m_{k_2+1}}^{p} A_{p-i_2}^{\delta} a_i\phi_i(x) \right]^2 \Bigg\}, \tag{12}$$

поскольку $\Delta A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1} = A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1} - A_{n_1-i_1-1}^{-\alpha_1} = A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1-1} < 0$ и, следовательно,

$$\sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}-1} |\Delta A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1}| = |A_{n_1}^{-\alpha_1} - A_{n_1-m_{k_1-1}-1}^{-\alpha_1}| < A_{n_1-m_{k_1-1}-1}^{-\alpha_1}.$$

Кроме того, в силу (5) для всех $0 \le i_1 \le m_{k_1-1}$

$$\frac{1}{A_{n_1}^{-\alpha_1}} \sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}-1} |\Delta A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1}| < \frac{A_{n_1-m_{k_1-1}}^{-\alpha_1}}{A_{n_1}^{-\alpha_1}} \le C(\alpha_1) \frac{n_1^{\alpha_1}}{(n_1-m_{k_1-1})^{\alpha_1}} \le C(\alpha_1),$$

$$\frac{|\Delta A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1}|}{A_{n_1}^{-\alpha_1}} = \frac{|A_{n_1-i_1}^{-\alpha_1-1}|}{A_{n_1}^{-\alpha_1}} \le C(\alpha_1) \frac{n_1^{\alpha_1}}{(n_1-i_1)^{\alpha_1+1}} \le \frac{C(\alpha_1)}{m_{k_1-1}}.$$

Пусть

$$\psi_{m_k}(x) = \sup\{[b_n^{(1)}(x)]^2 : n_1 \ge m_{k_1},\ m_{k_2} < n_2 \le m_{k_2+1}\}. \tag{13}$$

На основании (11)–(13)

$$\int_X \max_{m_k<n\le m_{k+1}} |r_n^{(2)}(x)|^2\,dx \le \int_X \psi_{m_k}(x)\,dx \le$$
$$\le C(\alpha_1) m_{k_2}^{2\alpha_2} \sum_{p=m_{k_2}+1}^{n_2} \sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}-1} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{p} (p+1-i_2)^{-1-\alpha_2} a_i^2 \le$$
$$\le C(\alpha_1) m_{k_2}^{2\alpha_2} \sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}-1} \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{m_{k_2+1}} a_i^2$$

и, определив последовательность

$$F_{k_1}(x) = \sum_{k_2\ge 0} \lambda_2^2(m_{k_2})(m_{k_2}+1)^{-2\alpha_2}\psi_{m_k}(x) \le F_2(x),$$

легко видеть

$$\int_X F_2(x)\,dx \le C(\alpha_1) \sum_{i_1=0}^{m_1-1} \sum_{k_2\ge 0} \lambda_2^2(m_{k_2}) \sum_{i_2=m_{k_2}+1}^{m_{k_2+1}} a_i^2 < \infty.$$

Тогда по теореме Леви, признаку Вейерштрасса, с учетом (5), (6) и первого условия (2)

$$b_n^{(1)}(x) = o_x\{(n_2+1)^{\alpha_2}/\lambda_2(n_2)\} \ \text{ при } \ n_2\to\infty \ \text{ равномерно по } \ n_1. \tag{14}$$

Из (9), (10) и (14) следует

$$r_n^{(2)}(x) = o_x\left\{\frac{(n_1+1)^{\alpha_1}}{\lambda_1(n_1)} + \frac{(n_2+1)^{\alpha_2}}{\lambda_2(n_2)}\right\}, \quad n_*\to\infty.$$

Очевидно, что величина $r_n^{(1)}(x)$ имеет такой же порядок. □

Следствие. Для любых $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ и $\beta=(\beta_1,\beta_2)$, $0<\alpha_j<1$, $\beta_j>0$, $j=1,2$, п. в. на X при условиях (2), (3), (5)

$$\sigma_n^{-\alpha}(x) = \sigma_n^{\beta}(x) + o_x\{(n_1+1)^{\alpha_1}/\lambda_1(n_1) + (n_2+1)^{\alpha_2}/\lambda_2(n_2)\}, \quad n_*\to\infty.$$

Теорема является аналогом соответствующего однократного результата из ([3], с. 3) и доказывается по аналогии с одномерным случаем на основании следствия 1 и теоремы 1 из ([2], с. 7). Оба ее условия существенны. Кроме того, она остается верной в случае произвольного пространства (X,F,μ) с конечной положительной неатомической мерой и для d-кратного случая $(d>2)$.

Автор выражает благодарность В.А. Андриенко, под руководством которого выполнена эта работа.

Литература

1. Bregvadze D.V. *On the* $(C,\ -1<\alpha<0,\ -1<\beta<0)$*-summability of single and double orthogonal series* // Acta Math. Hung. – 1993. – V. 62. – P. 311–332.
2. Андриенко В.А., Коваленко Л.Г. *Аппроксимативные свойства средних Чезаро двойных ортогональных рядов* // Вісник Одеськ. держ. ун-та. – 2000. – Т. 5. – № 3. – С. 5–11.
3. Андриенко В.А. *О суммируемости ортогональных рядов методами Чезаро отрицательного порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 9. – С. 3–10.

Южноукраинский педагогический университет (Украина, г. Одесса)

Поступила 05.06.2002