ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 2 (501)

УДК 517.946

О.И. МАХМУДОВ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Система уравнений теории упругости является предметом многих исследований. В математической физике для этой системы ставятся три основные задачи, которые отличаются друг от друга видом краевых условий. В первой задаче на границе области задаются смещения, во второй задаче — напряжения, в третьей (смешанной задаче) на части границы задаются напряжения, а на оставшейся части — смещения.

В данной работе рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений теории упругости в пространственной неограниченной области по его значениям и значениям его напряжения на части границы этой области, т. е. задача Коши.

Система уравнений теории упругости эллиптическая, задача Коши для эллиптических уравнений неустойчива относительно малого изменения данных, т. е. некорректна (пример Адамара [1]). В некорректных задачах теорема существования не доказывается, существование предполагается заданным априори. Более того, предполагается, что решение принадлежит некоторому заданному подмножеству функционального пространства, обычно компактному, ([2], с. 4). Единственность решения следует из общей теоремы Холмгрена ([3], с. 58).

После установления единственности в теоретических исследованиях некорректных задач возникают важные вопросы получения оценки условной устойчивости и построения регуляризирующих операторов. В 1926 г. Т. Карлеман ([2], с. 41) построил формулу, которая связывает значения аналитической функции комплексного переменного в точках области с ее значениями на куске границы этой области. На основе этой формулы в ([2], с. 34) введено понятие функции Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и в некоторых случаях указан способ ее построения. Конструкция функции Карлемана дает возможность в этих задачах построить регуляризацию и получить оценку условной устойчивости.

На протяжении последних десятилетий не ослабевал интерес к классической некорректной задаче математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа начато в 50-х годах в работах [2], [4]–[6] и развивалось впоследствии в [7]–[14].

1. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ — точки трехмерного евклидова пространства E^3 и упругая среда D есть неограниченная односвязная область в E^3 с кусочно-гладкой границей, состоящей из плоскости $\Sigma : y_3 = 0$ и гладкой поверхности S, лежащей в полупространстве $y_3 > 0$, т. е. $\partial D = SU\Sigma$. Рассмотрим в области D системы уравнений теории упругости в векторной форме ([15], с. 10)

$$\mu\Delta u(y) + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u(y) = 0; \qquad (1)$$

здесь $u = (u_1; u_2; u_3)$ — вектор смещения, Δ — оператор Лапласа, λ, μ — постоянные Ламе рассматриваемой упругой среды.

Постановка задачи. Известны данные Коши решения системы (1) на поверхности S:

$$\begin{aligned} u(y) &= f(y), \quad y \in S, \\ T(\partial_y, n)u(y) &= g(y), \quad y \in S, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$T(\partial_y, n) = \|T_{kj}(\partial_y, n)\|_{3\times3} = \left\|\lambda n_k \frac{\partial}{\partial y_j} + \mu n_j \frac{\partial}{\partial y_k} + \mu \delta_{kj} \frac{\partial}{\partial n}\right\|_{3\times3}$$

— оператор напряжения, $n = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор нормали к поверхности S, $f = (f_1, f_2, f_3)$, $g = (g_1, g_2, g_3)$ — заданные непрерывные вектор-функции на S, δ_{kj} — символ Кронекера.

Требуется определить функцию $u(y)$ в D, исходя из заданных f и g, т. е. решить задачу аналитического продолжения решения системы уравнений теории упругости в пространственной неограниченной области по ее значениям f и значениям ее напряжений g на гладком куске S границы.

Пусть вместо $f(y)$ и $g(y)$ заданы их приближения f_δ и g_δ с точностью $\delta \in (0,1)$ (в метрике C). В данной работе строится семейство вектор-функций $U(x, f_\delta, g_\delta) = U_{\sigma\delta}$, зависящее от параметра σ, и доказывается, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma(\delta)$ при $\delta \to 0$ семейство $U_{\sigma\delta}(x)$ сходится в обычном смысле к решению задачи (1)–(2).

Следуя [16], функцию $U_{\sigma\delta}(x)$ назовем регуляризованным решением задачи Коши для системы теории упругости. Регуляризованное решение определяет устойчивость метода приближенного решения задачи.

С использованием результатов работ [2], [7], [8] по задаче Коши для уравнения Лапласа в данной статье построена матрица Карлемана в явном виде и на ее основе — регуляризованное решение задачи Коши для систем уравнений теории упругости. В [17] приведены теоремы существования матрицы Карлемана и критерий разрешимости более широкого класса краевых задач для эллиптических систем. Ранее в [9], [17] доказано, что матрица Карлемана существует во всякой задаче Коши для решений эллиптических систем, если только данные Коши задаются на граничном множестве положительной меры. Поскольку в данной статье идет речь о явных формулах, то построение матрицы Карлемана в элементарных и специальных функциях представляет значительный интерес.

Функция Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и ей близких в случае, когда $\partial D \setminus S$ — часть поверхности конуса, построена в [7], [8]. Матрицу Карлемана задачи Коши для уравнения Коши–Римана в случае, когда S — произвольное множество положительной меры, построил Л.А. Айзенберг [9]. В развитие идеи С.Е. Мергеляна [5], указавшего способ построения функции Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа в случае, когда S — кусок с гладким краем границы односвязной области, на основе теорем об аппроксимации в [17] построена матрица Карлемана для эллиптических систем (см. также [10]–[14]). В [10]–[14] для плоских ограниченных и неограниченных областей и для пространственных ограниченных областей построена матрица Карлемана в явном виде и на ее основе – регуляризованное решение задачи Коши.

Введем матричный дифференциальный оператор $A(\partial_x) = \|A_{ij}(\partial_x)\|_{3\times3}$, где $A_{ij}(\partial_x) = \delta_{ij}\mu\Delta + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$. Тогда уравнение равновесия однородной изотропной упругой среды (1) запишется в матричной форме $A = (\partial_x)u = 0$.

Определение 1. Матрица $\Gamma(y,x) = \|\Gamma_{kj}(y,x)\|_{3\times3}$ называется матрицей фундаментальных решений ([15], с. 32), где

$$\Gamma_{kj}(y,x)=\frac{\lambda'\delta_{kj}}{|y-x|}+\mu'\frac{(y_k-x_k)(y_j-x_j)}{|y-x|^3},\quad k,j=1,2,3,$$
$$|y-x|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2},$$
$$\lambda'=(\lambda+3\mu)[4\pi\mu(\lambda+2\mu)]^{-1},\quad \mu'=(\lambda+\mu)[4\pi\mu(\lambda+2\mu)]^{-1}.$$

Матрица $\Gamma(y,x)$ симметричная, и каждые ее столбец и строка удовлетворяют уравнению упругости в произвольной точке $x\in E^3$, кроме $x=y$. Таким образом, $A(\partial_x)\Gamma(y,x)=0$, $x\neq y$. Здесь нуль в правой части обозначает матрицу размера 3×3 с нулевыми элементами.

Следуя [2], приведем

Определение 2. Матрицей Карлемана задачи (1)–(2) называется 3×3-матрица $\Pi(y,x,\sigma)$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) $\Pi(y,x,\sigma)=\Gamma(y,x)+G(y,x,\sigma)$, где σ — положительный числовой параметр, матрица $G(y,x,\sigma)$ по переменной y удовлетворяет системе (1) всюду в области D, $\Gamma(y,x)$ — матрица фундаментальных решений уравнений (1);

2) $\int\limits_{\Sigma}(|\Pi(y,x,\sigma)|+|T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)|)ds_y\le\varepsilon(\sigma)$ при фиксированном $x\in D$, где $\varepsilon(\sigma)\to 0$ при $\sigma\to\infty$; здесь и далее $|\Pi|$ означает евклидову норму матрицы $\Pi=\|\Pi_{kj}\|$, т. е. $|\Pi|=\Big(\sum\limits_{k,j=1}^{3}\Pi_{kj}^2\Big)^{1/2}$, в частности $|u|=\Big(\sum\limits_{k=1}^{3}u_k^2\Big)^{1/2}$ для вектора u.

Определение 3. Вектор-функция $u(y)=(u_1(y),u_2(y),u_3(y))$ называется регулярной в D, если $u_j(y)\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$, $j=1,2,3$, т. е. если она непрерывна вместе со своими частными производными второго порядка в D и первого порядка на $\overline{D}=D\cup\partial D$ (если D — неограниченная область, то непрерывность $u(y)$ и ее частных производных требуется лишь в конечных точках ∂D).

В теории уравнений в частных производных важную роль играют представления решений этих уравнений в виде функции типа потенциала. Приведем здесь формулу Сомилиана ([15], с. 57).

Теорема 1. *Всякое регулярное решение $u(y)$ уравнения* (1) *в области D определяется формулой*

$$u(x)=\int_{\partial D}[\Gamma(y,x)\{T(\partial_y,n)u(y)\}-\{T(\partial_y,n)\Gamma(y,x)\}'u(y)]ds_y,\quad x\in D.$$

Поскольку матрица Карлемана отличается от матрицы фундаментальных решений на решение транспонированной системы, то формула Сомилиана остается справедливой, если в ней заменить фундаментальное решение на матрицу Карлемана.

Пусть область $D\subset E^3$ лежит внутри слоя $0<y_3<h$, $h=\frac{\pi}{\rho}$, $\rho>0$, граница ее состоит из плоскости $\Sigma: y_3=0$ и гладкой поверхности S, заданной уравнением $y_3=F(y_1,y_2)$, удовлетворяющей условиям $0<F(y_1,y_2)\le h$, $|\operatorname{grad}F(y_1,y_2)|\le\text{const}<\infty$, $y_1,y_2\in E^2$. Обозначим через $A(D)$ пространство всех регулярных в D решений системы (1), а через $A_\rho(D)$ — класс функций из $A(D)$, удовлетворяющих следующему условию роста:

$$A_\rho(D)=\{u(y)\in A(D):|u(y)|+|\operatorname{grad}u(y)|\le\exp(o\exp\rho|y_1|),\quad y\to\infty,\quad \rho>0\}.$$

С целью построения приближенного решения задачи (1)–(2) рассмотрим матрицу

$$\Pi(y,x,\sigma)=\left\|\lambda'\delta_{kj}\Phi(y,x,\sigma)-\mu'(y_j-x_j)\frac{\partial\Phi(y,x,\sigma)}{\partial y_k}\right\|_{3\times 3},\tag{3}$$

где

$$\lambda' = \frac{\lambda\mu + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)}, \quad \mu' = \frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)},$$

$$\Phi(y,x,\sigma) = [-\pi K(x_3)]^{-1}\int_0^\infty \operatorname{Im}\frac{K(\omega)}{\omega - x_3}\cdot\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \tag{4}$$

$$K(\omega) = (\omega - x_3 + 2h)^{-1}\exp(\sigma\cdot\omega), \quad \omega = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_3,$$

$$\alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad 0 < x_3 < h, \quad K(x_3) = (2h)^{-1}\exp(\sigma x_3).$$

В [7] доказана

Лемма 1. *Функция $\Phi(y,x,\sigma)$, определенная формулой (4), представима в виде*

$$\Phi(y,x,\sigma) = \frac{1}{r} + \psi(y,x,\sigma), \quad r = |y-x|,$$

где $\psi(y,x,\sigma)$ — некоторая функция, определенная для всех значений y, x и гармоническая по переменной y во всем E^3.

Лемма 2. *Матрица $\Pi(y,x,\sigma)$, определенная формулой (3), является матрицей Карлемана задачи (1)–(2), т. е. представима в виде*

$$\Pi(y,x,\sigma) = \Gamma(y,x) + G(y,x,\sigma), \tag{5}$$

где $G(y,x,\sigma) = \|G_{kj}(y,x,\sigma)\|_{3\times3}$ — матрица, определенная для всех значений y, x, и по переменной y удовлетворяющая системе (1) во всем E^3,

$$A(\partial_y)G(y,x,\sigma) = 0. \tag{6}$$

Доказательство. В силу леммы 1 и определения 1 имеем

$$\Pi(y,x,\sigma) = \left\|\lambda'\delta_{kj}\left[\frac{1}{r} + \psi(y,x,\sigma)\right] - \mu'(y_j - x_j)\frac{\partial}{\partial y_k}\left[\frac{1}{r} + \psi(y,x,\sigma)\right]\right\|_{3\times3} =$$

$$= \left\|\frac{\lambda'\delta_{kj}}{|y-x|} + \mu'\frac{(y_k - x_k)(y_j - x_j)}{|y-x|^3}\right\|_{3\times3} +$$

$$+\left\|\lambda'\delta_{kj}\psi(y,x,\sigma) - \mu'(y_j - x_j)\frac{\partial\psi(y,x,\sigma)}{\partial y_k}\right\|_{3\times3} = \Gamma(y,x) + G(y,x,\sigma),$$

где $\psi(y,x,\sigma)$ — функция, гармоническая по y во всем E^3. Отсюда следует (5). Докажем, что матрица

$$G(y,x,\sigma) = \|G_{kj}(y,x,\sigma)\|_{3\times3} = \left\|\lambda'\delta_{kj}\psi(y,x,\sigma) - \mu'(y_j - x_j)\frac{\partial\psi(y,x,\sigma)}{\partial y_k}\right\|_{3\times3}$$

есть регулярное решение уравнения (1) по переменной y, включая и точку $y = x$. Поскольку

$$\Delta\psi(y,x,\sigma) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2},$$

$$\operatorname{div} G^j(y,x,\sigma) = \frac{1}{2\pi(\lambda+\mu)}\frac{\partial}{\partial y_j}\psi(y,x,\sigma),$$

то для k-й компоненты вектора $A(\partial_y)G^j(y,x,\sigma)$ получим

$$\sum_{i=1}^{3} A_{kj}(\partial_y)G_{ij}(y,x,\sigma) = \mu\Delta\left[\lambda'\delta_{kj}\psi(y,x,\sigma) - \mu'(y_j - x_j)\frac{\partial\psi(y,x,\sigma)}{\partial y_k}\right] +$$

$$+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y_k}\operatorname{div} G^j(y,x,\sigma) = -\frac{\lambda+\mu}{2\pi(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2\psi(y,x,\sigma)}{\partial y_j^2} + \frac{\lambda+\mu}{2\pi(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2\psi(y,x,\sigma)}{\partial y_j^2} = 0.$$

Таким образом, каждый столбец матрицы $G(y,x,\sigma)$ удовлетворяет уравнению (1), т.е. имеет место (6) во всем E^3.

Из формулы (4) видно, что на $\Sigma(y_3=0)$ функция $\Phi(y,x,\sigma)$, ее градиент $\nabla\Phi(y,x,\sigma)$ и вторые частные производные $\frac{\partial^2\Phi(y,x,\sigma)}{\partial y_i\partial y_j}$ $(i,j=1,2,3)$ при $\sigma\to\infty$ экспоненциально стремятся к нулю при всех y_1, y_2 и $x\in E^3$, $x_3>0$. Тогда в силу (3), (4) матрица $G(y,x,\sigma)$ и ее напряжение $T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)$ при $\sigma\to\infty$ также стремятся к нулю при всех y_1, y_2 и $x\in E^3$, $x_3>0$. В силу определения 2 матрица $\Pi(y,x,\sigma)$, определенная формулами (3), (4), является матрицей Карлемана для области D и части Σ. $\square$

Предположим, что $u(y)\in A(D)$ ограничена вместе с нормальной производной на ∂D:

$$|u(y)|+|T(\partial_y,n)u(y)|\leq M,\quad y\in\Sigma. \tag{7}$$

В этих предположениях верна формула Сомилиана ([15], с. 57)

$$u(x)=\int_{\partial D}[\Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial_y,n)u(y)\}-u(y)\{T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)\}]ds_y,\quad x\in D. \tag{8}$$

Обозначим

$$u_\sigma(x)=\int_{S}[\Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial_y,n)u(y)\}-u(y)\{T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)\}]ds_y,\quad x\in D. \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть $u(x)\in A_\rho(D)$ удовлетворяет граничному условию* (7). *Тогда*

$$|u(x)-u_\sigma(x)|\leq MC_\rho(x)\sigma^2\exp(-\sigma x_3),\quad x\in D, \tag{10}$$

где $C_\rho(x)=C(\rho)\int\limits_\Sigma|(\sigma r)^{-1}+r^{-2}|ds_y$, $r=|y-x|$.

Доказательство. Согласно формуле (8) имеем

$$u(x)-u_\sigma(x)=\int_{\Sigma}[\Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial_y,n)u(y)\}-u(y)\{T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)\}]ds_y,$$

а в силу (7)

$$|u(x)-u_\sigma(x)|\leq M\int_\Sigma|\Pi(y,x,\sigma)|+|T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)|ds_y. \tag{11}$$

Оценим $\Pi(y,x,\sigma)$ и $|T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)|$. Для этого необходимо оценить

$$\Phi,\ \ \frac{\partial\Phi}{\partial y_i},\ \ \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_i\partial y_j},\quad i,j=1,2,3.$$

По построению

$$\Phi(y,x,\sigma)=-\frac{2h}{\pi}\exp\sigma(y_3-x_3)\Big(\int_0^\infty\frac{(y_3-x_3)}{u^2+r^2}\frac{\sin\sigma\sqrt{u^2+\alpha^2}}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}du+\int_0^\infty\frac{1}{u^2+r^2}\cos\sigma\sqrt{u^2+\alpha^2}du\Big).$$

Тогда

$$|\Phi(y,x,\sigma)|\leq C_1(\rho)r^{-1}\sigma\exp\sigma(y_3-x_3). \tag{12}$$

Нетрудно проверить, что при $i,j=1,2,3$

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial y_i}\right|\leq C_2(\rho)r^{-2}\sigma\exp\sigma(y_3-x_3), \tag{13}$$

$$\left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_i\partial y_j}\right|\leq C_3(\rho)r^{-3}\sigma^2\exp\sigma(y_3-x_3). \tag{14}$$

Тогда по определению $\Pi(y,x,\sigma)$ и из неравенств (12)–(14) получим

$$|\Pi(y,x,\sigma)| \le C_4(\rho) r^{-1} \sigma \exp \sigma(y_3 - x_3), \tag{15}$$

$$|T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)| \le C_5(\rho) r^{-2} \sigma^2 \exp \sigma(y_3 - x_3). \tag{16}$$

Следовательно, из последних неравенств и (11) имеем

$$|u(x) - u_\sigma(x)| \le M\sigma^2 \exp(-\sigma x_3) \int_\Sigma [C_4(\rho) r^{-1} + C_5(\rho) r^{-2}] ds_y.$$

Обозначив $C_\rho(x) = \int\limits_\Sigma [C_4(\rho) r^{-1} + C_5(\rho) r^{-2}] ds_y$, получим (10). $\square$

Приведем оценку устойчивости.

Теорема 3. *Пусть $u(x) \in A_\rho(D)$ на гиперплоскости $y_3 = 0$ удовлетворяет граничному условию (7), а на S — условию*

$$|u(y)| + |T(\partial_y,n)u(y)| \le \delta, \quad y \in S, \quad 0 < \delta < 1.$$

Тогда

$$|u(x)| \le C_\rho(x) \frac{2M^{1-x_3/h}}{h^2} \delta^{x_3/h} \ln\left(\frac{M}{\delta}\right)^2, \quad x \in D,$$

где

$$C_\rho(x) = C(\rho) \int_{\partial D} [r^{-1} + r^{-2}] ds_y.$$

Доказательство. Из теоремы 2 вытекает

$$|u(x)| \le MC'_\rho(x)\sigma^2 \exp(-\sigma x_3)|u_\sigma(x)|.$$

Согласно условию теоремы 3 и неравенствам (15), (16) имеем

$$\begin{aligned}
|u_\sigma(x)| &\le \delta \int_S [|\Pi(y,x,\sigma)| + |T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)|] ds_y \le \\
&\le \delta\sigma^2 \exp(-\sigma x_3) \int_S [C_4(\rho) r^{-1} + C_5(\rho) r^{-2}] \exp(-\sigma y_3) ds_y \le \\
&\le \delta\sigma^2 \exp \sigma(h - x_3) \int_S [C_4(\rho) r^{-1} + C_5(\rho) r^{-2}] ds_y.
\end{aligned}$$

Теперь из (13) и (14) $|u(x)| \le C_\rho(x)\sigma^2 \exp(-\sigma x_3)[M + \delta \exp \sigma h]$. Здесь $M = \delta \exp(\sigma h)$ или $\sigma = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{M}{\delta}\right)$. В результате получим

$$|u(x)| \le C_\rho(x) \frac{2M^{1-x_3/h}}{h^2} \sigma^{x_3/h} \ln\left(\frac{M}{\delta}\right)^2. \quad \square$$

Теперь предположим, что вместо $u(y)$ и $T(\partial_y,n)u(y)$ на S заданы их непрерывные приближения $f_\delta(y)$ и $g_\delta(y)$ соответственно,

$$\max_S |u(y) - f_\delta(y)| + \max_S |T(\partial_y,n)u(y) - g_\delta(y)| < 1,$$

предполагаем, что S удовлетворяет условиям Ляпунова.

Обозначим

$$u_{\sigma\delta}(x) = \int_S [\Pi(y,x,\sigma) g_\delta(y) - f_\delta(y)\{T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)\}] ds_y, \quad x \in D. \tag{17}$$

Теорема 4. *Пусть $u(y) \in A_\rho(D)$ удовлетворяет граничному условию* (7). *Тогда*

$$|u(x) - u_{\sigma\delta}(x)| \leq C_\rho(x) \frac{2M^{1-x_3/h}}{h^2} \delta^{x_3/h} \ln\left(\frac{M}{\delta}\right)^2,$$

где $\sigma = h^{-1} \ln\left(\frac{M}{\delta}\right)$, $C_\rho(x) = C(\rho) \int\limits_{\partial D} [r^{-1} + r^{-2}] ds_y$.

Доказательство. Согласно (8) и (17) имеем

$$u(x) - u_{\sigma\delta}(x) = \int_\Sigma [\Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial_y, n)u(y)\}\{T(\partial_y, n)\Pi(y,x,\sigma)\}] ds_y +$$
$$+ \int_\Sigma [\Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial_y,n)u(y) - g_\delta(y)\} - (u(y) - f_\delta(y))\{T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)\}] ds_y.$$

В силу теорем 2 и 3 получим

$$|u(x) - u_{\sigma\delta}(x)| \leq M \int_\Sigma [|\Pi(y,x,\sigma)| + |T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)|] ds_y +$$
$$+\delta \int_S [|\Pi(y,x,\sigma)| + |T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)|] ds_y \leq C_\rho(x) \frac{2M^{1-x_3/h}}{h^2} \delta^{x_3/h} \ln\left(\frac{M}{\delta}\right)^2. \quad \square$$

Из доказанных теорем получаем

Следствие 1. Предельные равенства

$$\lim_{\sigma \to x} u_\sigma(x) = u(x), \quad \lim_{\delta \to 0} u_{\sigma\delta}(x) = u(x)$$

выполняются равномерно на каждом компакте из D.

Формула (9) дает в явном виде приближенное решение задачи (1)–(2) в точке $x \in D$, формула (17) представляет приближенное решение, когда данные Коши на S заданы приближенно. Эти формулы основаны на постановке и методе анализа, предложенных в [2], [4].

2. Приведем аналогичные результаты для системы уравнений термоупругости. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ — точки трехмерного евклидова пространства E^3, односвязная неограниченная область $D \subset E^3$ лежит внутри слоя $0 < y_3 < h$, $h = \pi/\rho$, $\rho > 0$, граница ее состоит из плоскости $\Sigma : y_3 = 0$ и гладкой поверхности S, заданной уравнением $y_3 = F(y_1, y_2)$ и удовлетворяющей условиям $0 < F(y_1, y_2) \leq h$, $|\operatorname{grad} F(y_1, y_2)| \leq \text{const} < \infty$, $(y_1, y_2) \in E^2$, т. е. $\partial D = \Sigma \cup S$. Рассмотрим матричный дифференциальный оператор

$$B(\partial_x, \omega) = \|B_{mj}(\partial_x, \omega)\|_{4\times 4},$$
$$B_{mj}(\partial_x, \omega) = (1 - \delta_{m4})(1 - \delta_{4j})[\delta_{mj}\mu(\Delta(\partial_x) + q\omega^2/\mu) + (\lambda + \mu)\partial^2/\partial x_m \partial x_j] -$$
$$-\delta_{4j}(1 - \delta_{m4})\gamma\partial/\partial x_m + i\omega\eta\delta_{m4}(1 - \delta_{4j})\partial/\partial x_j + \delta_{m4}\delta_{4j}(\Delta(\partial_x) + i\omega/\chi), \quad m, j = 1, 2, 3, 4,$$

где $\Delta(\partial_x)$ — оператор Лапласа, λ, μ, q — постоянные Ламе и плотность упругой среды соответственно, ω — частота колебания, δ_{mj} — символ Кронекера, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$, α — коэффициент линейного температурного расширения среды, χ — коэффициент температуропроводности, i — мнимая единица, k — коэффициент теплопроводности среды, $\eta = \gamma\theta_0/k$, θ_0 — температура среды в недеформированном состоянии. Уравнение термоупругоколебательного состояния среды D в компонентах смешения принимает вид ([15], с. 12)

$$B(\partial_x, \omega)U = 0, \tag{1'}$$

где $U = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (u, u_4)$ — четырехмерный вектор, u_1, u_2, u_3, как и выше, обозначают компоненты смещения, $u_4 = \theta$ — отклонение температуры среды от температуры θ_0. Решение U системы (1′) в области D назовем регулярным, если $U \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$.

Обозначим через $A(D)$ пространство всех регулярных в D решений системы $(1')$, а через $A_\rho(D)$ — класс функции из $A(D)$, удовлетворяющих следующему условию роста:

$$A_\rho(D) = \{U(y) \in A(D) : |U(y)| + |\operatorname{grad} U(y)| \leq \exp(0(\exp \rho |y_1|)), \quad y \to \infty, \quad \rho > 0\}.$$

Далее будем использовать матричный дифференциальный оператор термонапряжения

$$R(\partial_y, n(y)) = \left\| \begin{matrix} & T & & -\gamma n_1 \\ & & & -\gamma n_2 \\ & & & -\gamma n_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial/\partial n \end{matrix} \right\|,$$

где T означает оператор напряжения

$$T(\partial_y, n(y)) = \|T_{mj}\|_{3\times 3} = \|\lambda n_m \partial/\partial y_j + \mu n_j \partial/\partial y_m + \mu \delta_{mj} \partial/\partial n\|_{3\times 3},$$

$n(y) = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂D в точке y. Через $\widetilde{R}(\partial_y, n(y))$ обозначим матрицу, которая получается из $R(\partial_y, n(y))$ заменой в последнем столбце γ на $i\omega\eta$.

Постановка задачи. Требуется определить регулярное решение U системы $(1')$ в области D, исходя из ее данных Коши, заданных на поверхности S,

$$U(y)|_S = f(y), \quad R(\partial_y, n(y))U(y)|_S = g(y), \tag{2'}$$

$f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, $g = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ — заданные непрерывные вектор-функции.

Данная задача также является некорректной. Характер некорректности такой же, как у задачи Коши для уравнения Гельмгольца. Для случая $\omega = 0$, $\gamma = 0$ рассматриваемая задача для специальных неограниченных классов областей исследована в [10]–[14].

Следуя [2], приведем

Определение 4. Матрицей Карлемана задачи $(1')$–$(2')$ называется 4×4-матрица $\Pi(y, x, \omega, \gamma, \sigma)$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) $\Pi(y, x, \omega, \gamma, \sigma) = \Gamma(y, x, \omega, \gamma) + G(y, x, \omega, \gamma, \sigma)$,

где σ — положительный числовой параметр, матрица $G(y, x, \omega, \gamma, \sigma)$ по переменной y удовлетворяет системе $(1')$ всюду в области D, $\Gamma(y, x, \omega, \gamma)$ — матрица фундаментальных решений уравнений $(1')$ (см. [15], с. 38);

2) $\int\limits_{\Sigma} |\Pi| + |(\widetilde{R}\Pi^*)^*| ds_y \leq \varepsilon(\sigma)$,

где $\varepsilon(\sigma) \to 0$ при $(\sigma) \to \infty$; здесь и далее Π^* означает матрицу, сопряженную матрице Π, а $|\Pi|$ — евклидова норма матрицы Π , т. е. $|\Pi| = \Big(\sum\limits_{m,j=1}^{4} \Pi_{mj}^2\Big)^{1/2}$.

С целью построения приближенного решения задачи $(1')$ –$(2')$ рассмотрим матрицу

$$\Pi(y, x, \omega, \gamma, \sigma) = \|\Pi_{mj}(y, x, \omega, \gamma, \sigma)\|_{4\times 4}, \tag{18}$$

$$\Pi_{mj}(y, x, \omega, \gamma, \sigma) = \frac{(1-\delta_{m4})(1-\delta_{j4})}{2\pi}\left[\frac{\delta_{mj}}{\mu}\Phi_\sigma(y, x, i\lambda_k) - \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_j}\Phi_\sigma(y, x, i\lambda_k)\right] +$$

$$+\frac{i\omega\eta}{2\pi}\delta_{m4}(1-\delta_{j4})\sum_{k=1}^{3}\beta_k \frac{\partial}{\partial x_j}\Phi_\sigma(y, x, i\lambda_k) -$$

$$-\frac{\gamma}{2\pi}\delta_{i4}(1-\delta_{m4})\sum_{k=1}^{3}\beta_k \frac{\partial}{\partial x}\Phi_\sigma(y, x, i\lambda_k) + \sum_{k=1}^{3}\frac{\delta_{j4}\delta_{m4}}{2\pi}\gamma_k \Phi_\sigma(y, x, i\lambda_k),$$

где постоянные α_k, β_k, γ_k, λ_k явно выражаются через постоянные термоупругости — коэффициенты системы ($1'$) ([15], с. 432)

$$\Phi_\sigma(y,x,\Lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \operatorname{Im}\frac{K(\sigma(\omega-x_3))}{\omega-x_3}\frac{\cos\Lambda u\,du}{\sqrt{u^2+r_1^2}},$$
$$K(\sigma\omega)=(\omega-x_3+2h)^{-1}\exp(\sigma\omega+\omega^2),\quad \omega=i\sqrt{u^2+r_1^2}+y_3, \tag{19}$$
$$r_1^2=(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2,\quad r_1>0,\quad 0<x_3<h.$$

Из результатов работы [17] вытекает

Лемма 3. *Функция $\Phi_\sigma(y,x,\Lambda)$ является функцией Карлемана для уравнения Гельмгольца, т. е. обладает следующими двумя свойствами:*

$$\Phi_\sigma(y,x,\Lambda)=\frac{\exp(\Lambda r)}{4\pi r}+\nu(y,x,\Lambda,\sigma),\quad r=|x-y|,$$

где $\nu(y,x,\Lambda,\sigma)$ — некоторая функция, определенная для всех значений y, x и удовлетворяющая условию Гельмгольца

$$\Delta(\partial_y)\nu-\Lambda^2\nu=0,\quad y\in D,$$
$$\int_\Sigma\left(|\Phi_\sigma|+\left|\frac{\partial\Phi(\sigma)}{\partial n}\right|\right)ds_y\le C(\Lambda,D)\sigma\exp(-\sigma x_3),$$

где $C(\Lambda,D)$ — постоянная.

Верна аналогичная лемма для системы ($1'$).

Лемма 4. *Матрица $\Pi(y,x,\omega,\gamma,\sigma)$, определенная равенствами* (18) *и* (19), *является матрицей Карлемана для задачи* ($1'$)–($2'$).

Доказательства лемм 3, 4 аналогичны доказательствам лемм 1, 2. Положим

$$2U^\sigma(x)=\int_S(\Pi(y,x,\omega,\gamma,\sigma)g(y)-(\widetilde{R}(\partial_y,n(y))\Pi^*(y,x,\omega,\gamma,\sigma))f(y))ds_y,\quad x\in D. \tag{20}$$

Имеет место

Теорема 5. *Пусть $U\in A_\rho(D)$ удовлетворяет условию*

$$|U(y)|+|R(\partial_y,n)U(y)|\le 1,\quad y\in\Sigma,$$
$$|U(x)|+|R(\partial_y,n)U(x)|\le\exp(o(\exp\rho\sqrt{x_1^2+x_2^2})),\quad x\to\infty,\quad x\in D. \tag{21}$$

Тогда при $\sigma\ge 1$ справедливо неравенство

$$|U(x)-U^\sigma(x)|\le C_1(\lambda,\nu,\omega,\gamma,D)\sigma^3\exp(-\sigma x_3),\quad x\in D.$$

Заметим, что в теореме 5 при сделанных предположениях верна интегральная формула

$$U(x)=\int_{\partial D}(\Pi R(\partial/\partial y,n)U(y)-\widetilde{R}(\partial/\partial y,n)\Pi^*)^*U(y)ds,\quad x\in D.$$

Приведем результат, который позволяет вычислить $U(x)$ приближенно, когда на поверхности S вместо $U(y)$ и $R(\partial/\partial y,n(y))U(y)$ заданы их непрерывные приближения $f_\delta(y)$ и $g_\delta(y)$, для которых

$$\max_S|f(y)-f_\delta(y)|+\max_S|g(y)-g_\delta(y)|\le\delta,\quad 0<\delta<1.$$

Предполагаем, что S удовлетворяет условиям Ляпунова. Определим функцию

$$2U^{\sigma\delta}(x)=\int_S\left(\Pi g_\delta(y)-\widetilde{R}\left(\frac{\partial}{\partial y},n\right)\Pi^*\right)f_\delta(y)ds_y,\quad x\in D, \tag{22}$$

где $\sigma = \frac{1}{x_3^0} \ln \frac{1}{\delta}$, $x_3^0 = \max\limits_D x_3$. Тогда имеет место

Теорема 6. *Пусть $U \in A_\rho(D)$ удовлетворяет граничному условию (21) на всей границе. Тогда справедливо неравенство*

$$|U(x) - U^{\sigma\delta}(x)| \leq C_2(\lambda, \mu, \omega, \gamma, D)\delta^{x_3/x_3^0}\left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^3, \quad x \in D.$$

Доказательства теорем 5, 6 аналогичны доказательствам теорем 2, 4.

Следствие 2. Предельные равенства

$$\lim_{\sigma\to\infty} U^\sigma(x) = U(x), \quad \lim_{\delta\to 0} U^{\sigma\delta}(x) = U(x),$$

выполняются равномерно на каждом компакте из D.

Формула (19) дает в явном виде приближенное решение задачи $(1')$–$(2')$ в точке $x \in D$, а формула (21) изображает приближенное решение, когда данные Коши на S заданы приближенно. Эти формулы получены на основе результатов М.М. Лаврентьева (см. [2], [4]).

В заключение автор выражает признательность профессору Ш.Я. Ярмухамедову за постановку задачи и обсуждения в процессе ее решения.

Литература

1. Адамар Ж. *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа.* – М.: Наука, 1978. – С. 38–70.
2. Лаврентьев М.М. *О некоторых некорректных задачах математической физики.* – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962. – 92 с.
3. Берс А., Джон Ф., Шехтер М. *Уравнения с частными производными.* – М.: Мир, 1966. – 351 с.
4. Лаврентьев М.М. *О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка* // ДАН СССР. – 1957. – Т. 112. – № 2. – С. 195–197.
5. Мергелян С.Н. *Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа* // УМН. – 1956. – Т. 11. – Вып. 5. – С. 3–26.
6. Иванов В.К. *Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе* // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т.1. – № 1. – С. 131–136.
7. Ярмухамедов Ш.Я. *О задаче Коши для уравнения Лапласа* // ДАН СССР. – 1977. – Т. 235. – № 2. – С. 281–283.
8. Ярмухамедов Ш.Я., Ишанкулов Т.И., Махмудов О.И. *О задаче Коши для системы уравнений теории упругости в пространстве* // Сиб. матем. журн. – 1992. – Т. 33. – № 2. – С. 281–283.
9. Айзенберг Л.А., Тарханов Н.Н. *Абстрактная формула Карлемана* // ДАН СССР. – 1988. – Т. 298. – № 6. – С. 1292–1296.
10. Махмудов О.И. *Задача Коши для системы уравнений пространственной теории упругости в перемещениях* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 1. – С. 54–61.
11. Махмудов О.И., Ниёзов И.Э. *Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений теории упругости в перемещениях* // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39. – № 1. – С. 27–35.
12. Ниёзов И.Э. *Задача Коши для системы теории упругости на плоскости* // Узб. матем. журн. – 1996. – № 1. – С. 44–51.
13. Ишанкулов Т.И., Махмудов О.И. *Задача Коши для системы уравнений термоупругости в пространстве* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 6. – С. 27–32.
14. Махмудов О.И., Ниёзов И.Э. *Регуляризация решения задачи Коши для системы теории упругости* // Матем. заметки. – 2000. – Т. 68. – № 4. – С. 548–554.

15. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башевейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. *Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Классическая и микрополярная теория. Статика, гармонические колебания, динамика. Основы и методы решения.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1976. – 663 с.
16. Тихонов А.Н. *О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации* // ДАН СССР. – 1966. – Т. 151. – № 3. – С. 501–504.
17. Тарханов Н.Н. *О матрице Карлемана для эллиптических систем* // ДАН СССР. – 1985. – Т. 284. – № 2. – С. 294–297.

Самаркандский государственный университет

Поступили
первый вариант 04.06.2001
окончательный вариант 22.03.2002